BULLETIN DE LA S. M. F.

M. PÉTROVITCH

Sur les fonctions représentées par une classe étendue d’intégrales définies

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 67-103
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__67_1>

SUR LES FONCTIONS REPRÉSENTÉES PAR UNE CLASSE ÉTENDUE D'INTÉGRALES DÉFINIES;

Par M. Michel Petrovitch.

I. — Généralités.

1. Les intégrales de la forme

$$\int_L R(t, z)\,dt, \tag{1}$$

où R est une fonction *rationnelle en* z, à coefficients fonctions *quelconques de* t, sont susceptibles de représenter des fonctions analytiques arbitraires de la variable z.

En effet, *toute fonction analytique de* z *se laisse définir, et cela d'une infinité de manières, par des intégrales de la forme* (1), *qui la représentera dans telle ou telle partie du plan*.

Ainsi, la formule fondamentale de Cauchy

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(t)}{t-z}\,dt,$$

ainsi que celles qui s'en déduisent par des différentiations, des changements de la variable ou du chemin d'intégration, etc., fournissent des expressions analytiques de la fonction $F(z)$ sous la forme (1).

On en déduit une infinité d'autres formules du même type en les appliquant à des fonctions assujetties à des conditions plus particulières. Telles sont, par exemple, les formules de Stieltjes (¹)

$$F(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{t\psi(t)}{t^2+z^2}\,dt,$$
$$F(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{z\varphi(t)}{t^2+z^2}\,dt$$

[où φ et ψ sont la partie réelle et le coefficient de i dans $F(ti)$], applicables à des classes étendues des fonctions; ou bien les formules, en nombre illimité, de la forme

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(\lambda + ti)\,dt,$$
$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} R(t, z) F(t + \mu i)\,dt,$$

valables, la première dans les cas où la fonction $F(z)$ est holomorphe pour les z à partie réelle plus grande que λ, la seconde lorsque $F(z)$ est holomorphe pour les z à coefficient de i plus grand que μ (²), etc.

Une fonction $F(z)$ étant donnée par son développement de Taylor

$$F(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

le coefficient A_n se laisse mettre d'une infinité de manières sous la forme

$$A_n = \int_L A(t)\,[r(t)]^n\,dt, \tag{2}$$

(¹) Stieltjes, *Sur le développement de* $\log\Gamma(a)$ (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1889, p. 425-444).

(²) Petrovitch, *Généralisation de certaines formules de Stieltjes* (*Rendiconti del Circ. matem. di Palermo*, t. XVII, 1903).

ou sous la forme d'une somme de termes (2); ceci fait, on aura

$$F(z) = \int_L \frac{A(t)}{1-(z-a)r(t)}\,dt.$$

On connaît des solutions particulières du problème d'exprimer A_n sous la forme (2) pour des cas très étendus. M. Le Roy, par exemple, a indiqué la manière de mettre A_n sous la forme

$$A_n = \int_0^1 A(t)\,t^n\,dt$$

toutes les fois que A_n est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini, ou encore si A_n est exprimable par une série procédant suivant des puissances positives quelconques de n et, en particulier, si A_n est une fonction algébrique de n régulière à l'infini ou n'ayant qu'un pôle ([1]).

D'autres solutions sont fournies par celles du *problème des moments* traité récemment par MM. Stieltjes, Borel et Le Roy, et consistant à mettre une suite dénombrable de quantités A_0, A_1, A_2, ..., sous la forme

$$A_n = \int_0^\infty \varphi(t)\,t^n\,dt$$

On peut, d'ailleurs, transformer ces formules en une infinité d'autres rentrant dans le type (2). Dans des cas particuliers, on aura des solutions diverses du même problème par de nombreuses intégrales définies connues de la forme (2) ([2]).

Certaines classes spéciales de fonctions $F(z)$ se laissent exprimer par une formule de la forme (1) par des procédés particuliers ne convenant qu'à de telles fonctions. C'est ainsi que les formules connues

$$\int_0^1 [F(0) + zF'(zt)]\,dt = F(z),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+(\alpha-1)\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha}}$$

fournissent le moyen d'exprimer le logarithme, ou l'arc tang, ou

([1]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1900.

([2]) *Voir*, par exemple, les formules de la page 77 de ce Mémoire.

bien la racine carrée d'une fonction rationnelle quelconque de z sous la forme d'une intégrale portant sur une fonction rationnelle de z, etc.

2. Remarquons maintenant qu'*une fois la fonction* $F(z)$ *exprimée d'une manière quelconque sous la forme* (1), *on saura l'exprimer d'une infinité de manières par une intégrale de la forme que nous avons ici en vue.*

En effet, il existe un nombre illimité de fonctions $\Phi(t, z)$, rationnelles en z et jouissant de cette propriété que pour toute valeur de z, appartenant à une certaine partie du plan, on ait

$$\int_L \Phi(t, z)\, dt = 0. \tag{3}$$

Ainsi, l'arc d'intégration L formant un contour fermé et $P(t, z)$, $Q(t, z)$ étant deux polynomes en z à coefficients fonctions uniformes en t, si les deux équations

$$P = \infty, \qquad Q = 0,$$

pour $|z| < a$ (a étant un nombre réel et positif donné) n'ont pas de racines en t comprises à l'intérieur du contour L, on aura

$$\int_L \frac{P(t, z)}{Q(t, z)}\, dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à a.

Si le chemin L coïncide avec l'intervalle $(0, \infty)$, on peut prendre pour $\Phi(t, z)$ la fonction

$$\frac{1}{1+t^2}\,\frac{\lambda z \cos t - z^2}{\lambda^2 - 2\lambda z \cos t + z^2}$$

(où λ est un nombre réel et positif quelconque); l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos nt}{1+t^2}\, dt$$

étant nulle pour toute valeur positive de n, on aura

$$\int_0^\infty \Phi(t, z)\, dt = 0$$

pour toute valeur de z à module inférieur à λ.

De même, on sait qu'il y a une infinité de fonctions $\varphi(t)$ jouissant de cette propriété que, pour $n = 0, 1, 2, \ldots$, on ait

$$\int_0^\infty \varphi(t) t^n \, dt = 0 \text{ (1)};$$

on construira, à l'aide de telles fonctions, une infinité de fonctions $\Phi(t, z)$ satisfaisant à la condition (3), etc.

De telles fonctions $\Phi(t, z)$ existent pour un chemin L quelconque; en en ajoutant autant qu'on voudra à la fonction figurant sous le signe de l'intégrale (1), on aura des représentations analytiques, en nombre illimité, de la fonction donnée $F(z)$ sous la forme de l'intégrale portant sur une fonction rationnelle en z.

3. Les fonctions $F(z)$, définies par des intégrales (1), ne sont donc pas des fonctions spéciales : toute fonction analytique est susceptible d'être exprimée d'une infinité de manières sous cette forme.

De plus, à des fonctions $F(z)$ compliquées, à des transcendantes irréductibles aux fonctions usuelles correspondent souvent les fonctions $R(t, z)$ rationnelles en z à coefficients fonctions très simples. Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$\frac{e^{-at^2}}{1 - z e^{-bt^2}}$$

(le chemin L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendante irréductible

$$F(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{a + bn}};$$

ou bien le cas de la fonction

$$\frac{e^{-t} - e^{-bt} + z e^{-bt}(1 - e^{-at})}{(1 - z e^{-at}) t},$$

(L étant l'intervalle $0, \infty$) correspondant à la transcendante

$$F(z) = \sum_0^\infty \log(a + bn) z^n, \qquad \ldots.$$

---

(1) *Voir*, par exemple, BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, Chap. II.

Des transcendantes pareilles se présentent, d'ailleurs, d'elles-mêmes, dans une foule de problèmes variés, directement exprimées sous la forme que nous avons ici en vue.

Ainsi l'intégrale de l'équation

$$\frac{dx}{f(x, z)} = \frac{dy}{\varphi(y)},$$

où f est une fonction rationnelle en z et quelconque en x, sera, lorsqu'on y fixe la valeur de x, une fonction de z qui s'exprime par des combinaisons simples de fonctions fournies par des quadratures et de certaines fonctions $F(z)$ directement exprimées sous la forme (1).

En y faisant, par exemple, $x = \infty$, on aura la valeur asymptotique de l'intégrale exprimée comme fonction du paramètre z. La valeur asymptotique, par exemple, de l'intégrale de l'équation

$$(e^{\alpha x^2} - z e^{\beta x^2}) \frac{dy}{dx} = \varphi(y) \qquad (0 < \alpha < \beta),$$

dans les cas où l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y)$$

est à l'intégrale uniforme, sera ou bien une fonction rationnelle de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{\sqrt{\alpha + (\beta - \alpha)n}},$$

ou bien rationnelle en $e^{a\theta(z)}$, ou bien algébrique en $\mathrm{sn}[a\theta(z)]$, où a, le module de sn et les coefficients de ces fonctions rationnelles ou algébriques étant constants.

Étant donnée une équation algébrique du premier ordre

$$F\left(x, y \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{4}$$

à points critiques fixes et du genre zéro, l'évaluation de l'intégrale $\int_L y\,dx$ ou, plus généralement, de

$$\int_L R(x, y)\,dx \tag{5}$$

(R étant rationnelle en y, quelconque en x), conduit également aux transcendantes dont nous nous occupons ici. Car l'intégrale y sera une combinaison rationnelle d'une certaine fonction

$$u = \frac{C v_1 + v_2}{C w_1 + w_2}$$

fournie par l'intégration d'une certaine équation de Riccati, rattachée à l'équation (4). L'intégrale (5) sera donc de la forme

$$\int_L P(x, C)\, dx,$$

où P est une certaine fonction rationnelle en C à coefficients fonctions de x dépendant algébriquement de v_1, v_2, w_1, w_2 et des coefficients fonctions de l'équation différentielle (4) : elle sera donc une fonction de la constante d'intégration C qui se présente directement sous la forme (1).

Dans le cas, par exemple, de l'équation bien simple

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 - \alpha^2 x,$$

l'intégrale

$$\int_0^\infty (y + \alpha)\, dx$$

a pour valeur

$$C\sqrt{\alpha\pi}\sum_0^\infty \frac{C^n}{\sqrt{n+1}}\cdots$$

4. Supposons maintenant qu'on se donne à l'avance une intégrale déterminée (1), où les coefficients de la fonction rationnelle R, ainsi que le chemin L, soient précisés. Il y aurait un intérêt manifeste à étudier les particularités de la fonction $F(z)$ qu'elle représente directement sur l'expression analytique ainsi donnée, sans chercher à la ramener à des combinaisons explicites de fonctions connues. C'est à cet ordre d'idées que se rattache la présente étude. Je m'y propose, en particulier, d'indiquer quelques relations existant entre certaines particularités des fonctions figurant comme coefficients dans la fonction rationnelle R et celles de la fonction $F(z)$ elle-même, correspondant à la fonction R et le chemin d'intégration donnés.

Tout d'abord, le développement de l'intégrale en série ordonnée suivant les puissances de la variable z met en évidence la possibilité d'exprimer la fonction $F(z)$ comme combinaison simple de diverses puissances de z et de certaines fonctions $\theta(z)$ jouant, par rapport à $F(z)$, le rôle d'une espèce d'éléments simples.

Les coefficients des séries

$$\theta(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

ainsi obtenues et correspondant à ces éléments simples apparaissent sous la forme

$$a_n = \int_L A(t)[r(t)]^n dt,$$

où les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ dépendent algébriquement des coefficients de la fonction rationnelle R.

La forme même de la dernière intégrale, déjà étudiée sous quelques rapports et dans certains cas plus particuliers, rend particulièrement faciles diverses recherches concernant, par exemple, la manière dont a_n varie avec n, ses limites supérieures ou inférieures, sa valeur approchée ou valeur asymptotique pour n très grand, la convergence des séries $\theta(z)$ et diverses autres particularités des fonctions $\theta(z)$ (zéros, singularités, valeurs asymptotiques, mode de croissance, etc.).

Les résultats récents sur les séries de Taylor et sur les fonctions représentées par des intégrales définies, comme par exemple ceux de MM. Hadamard et Le Roy, y trouveront un vaste champ d'applications variées. Je me bornerai à en signaler quelques-uns les plus directes, n'ayant pour but que d'en faire ressortir la possibilité et l'intérêt d'une théorie plus complète des fonctions faisant l'objet de ce Mémoire.

II. — Développement en séries de Taylor.

1. Considérons l'intégrale

$$F(z) = \int_L R(t, z)\, dt, \tag{6}$$

où R est une fonction rationnelle de z à coefficients fonctions analytiques quelconques de t. Nous supposerons que ni le numérateur ni le dénominateur de R ne contiennent de facteurs de la forme $(z-a)^k$ (a étant constant), sans quoi on tirerait ces facteurs en dehors de l'intégrale. La fonction R étant holomorphe pour les valeurs de z au voisinage de $z=0$, on aura, pour z suffisamment petit,

$$(7) \qquad R(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \ldots.$$

D'après le théorème bien connu sur les développements des fonctions rationnelles en séries de Taylor, le coefficient général H_n sera la somme d'un nombre limité de termes ayant tous la forme

$$(8) \qquad P_i(n, t)[r_i(t)]^n;$$

les fonctions $r_i(t)$ ne dépendent que de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r

$$(9) \qquad G(t, r) = 0,$$

transformée en $z = \frac{1}{r}$ de l'équation obtenue en égalant à zéro le dénominateur de $R(t, z)$; les fonctions $P_i(n, t)$ sont des polynomes en n à coefficients fonctions de t dépendant rationnellement des coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$; enfin, le degré du polynome P_i en n sera égal à $\lambda_i - 1$, où λ_i désigne l'ordre de la racine correspondante $r = r_i(t)$ de l'équation algébrique (9). A chaque racine r de (9) correspondra un terme (8) dans l'expression de H_n.

Le coefficient H_n sera donc la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n^k A_i(t)[r_i(t)]^n,$$

où les fonctions $A_i(t)$ et $r_i(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent algébriquement des coefficients de la fonction $R(t, z)$.

Par conséquent, en supposant que l'intégration de la série (7) soit légitime, on aura le résultat suivant :

Le coefficient a_n de la série

$$(10) \qquad F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

correspondant à la fonction étudiée (6), *sera la somme d'un* *nombre limité de termes*

$$n^k \mathrm{I}(n), \tag{11}$$

où k est un entier positif, et I(n) *une fonction de n donnée par la formule*

$$\mathrm{I}(n) = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{A}(t)[r(t)]^n \, dt. \tag{12}$$

La détermination du coefficient a_n se ramène donc au calcul des intégrales de la forme (12).

Il arrive, toutefois, dans certains cas particuliers, que quelques-unes parmi les intégrales I(n), correspondant à la fonction donnée F(z), soient infinies ou indéterminées, quoique F(z) soit holomorphe pour $z = 0$. De tels cas se présentent lorsque plusieurs intégrales I(n), multipliées par une même puissance de n, sont infinies ou indéterminées quel que soit n, cette discontinuité disparaissant dans leur somme. *La détermination du coefficient a_n se ramène alors au calcul des intégrales de la forme*

$$\int_{\mathrm{L}} \left\{ \mathrm{A}_1(t)[r_1(t)]^n + \mathrm{A}_2(t)[r_2(t)]^n + \ldots \right\} dt, \tag{13}$$

où le nombre de termes sous le signe $\int$ est limité.

Ceci se présente, par exemple, dans le cas de la fonction

$$\mathrm{F}(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-t}}{1-z} - \frac{e^{-2t}}{1-ze^{-t}} \right\} \frac{dt}{t}, \tag{14}$$

à laquelle correspond le coefficient

$$a_n = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t} e^{-nt} \right] dt; \tag{15}$$

chacune des deux intégrales (15), prise séparément, est infinie; le coefficient a_n est, cependant, fini et a pour valeur

$$a_n = \log(n+2).$$

2. Revenons aux intégrales (12) auxquelles se ramène, dans le cas général, le calcul des coefficients a_n.

D'abord, dans certains cas ces intégrales se laissent exprimer sous la forme explicite comme fonctions de n.

Supposons, par exemple, que l'arc d'intégration forme un contour fermé qui entourera alors nécessairement des singularités d'au moins une fonction $A(t)$ et $r(t)$; $I(n)$ sera la somme d'intégrales prises le long des circonférences de rayon infiniment petit décrites autour de ces singularités. En particulier, chaque pôle de $A(t)$ donnera, dans l'expression de $I(n)$, un terme de la forme

$$n(n-1)\ldots(n-h)ab^n,$$

où a et b sont des constantes indépendantes de n et h un entier positif également indépendant de n. Chaque pôle de $r(t)$ fournira un terme dont la valeur sera donnée par le résidu correspondant; celui-ci peut représenter des fonctions infiniment variées de n, comme l'on s'assure, par exemple, en prenant

$$r(t) = \frac{1}{t},$$

dans quel cas le résidu représentera le coefficient c_{n-1} de la série

$$A(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots.$$

Un grand nombre d'intégrales $I(n)$ se calculerait par des méthodes spéciales liées aux hypothèses faites sur les fonctions $A(t)$, $r(t)$ et le chemin d'intégration L, ou à l'aide des formules connues du Calcul intégral. En voici quelques intégrales connues de cette espèce :

$$\int_0^\infty e^{-at^2} e^{-nbt^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{a+bn}},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt}\cos at\,dt = \frac{n}{a^2+n^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt^2}\cos at^2\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{n+\sqrt{a^2+n^2}}{a^2+n^2}},$$

$$\int_0^\infty e^{-nt}\sin at\,\frac{dt}{t} = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{n},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a+ti}\right)^n c^{cti}\,dt = \frac{2\pi}{e^{ac}}\,\frac{c^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^n dt = 2\pi\left(\frac{1}{2a}\right)^{2n-1}\frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)},$$

$$\int_0^1 \frac{t^{2n}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots2n},$$

$$\int e^t\left(\frac{1}{t}\right)^n dt = \frac{2\pi i}{1.2.3\ldots(n-1)}.$$

l'intégrale étant prise le long d'une circonférence décrite autour de l'origine), etc.

3. Dans les cas où il est impossible d'exprimer $I(n)$ comme fonction explicite de n, on peut en préciser des limites supérieures ou inférieures soit pour la valeur même de $I(n)$, soit pour son module; la forme même de ces intégrales rend particulièrement faciles les recherches de cette espèce.

Ainsi, le chemin d'intégration étant réel ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, le théorème de la moyenne fournira soit des limites supérieures, soit des limites inférieures de $I(n)$. Pour les intégrales, par exemple, de la forme

$$I(n) = \int_0^\infty A(t) e^{ant}\, dt \qquad (a < 0),$$

on aurait

$$\frac{M_1}{n} < I(n) < \frac{M_2}{n},$$

M_1 et M_2 étant des constantes; pour

$$I(n) = \int_0^\infty A(t) e^{ant^2}\, dt,$$

il serait

$$\frac{M_1}{\sqrt{n}} < I(n) < \frac{M_2}{\sqrt{n}};$$

pour

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) \left(\frac{1}{a^2+t^2}\right)^n dt,$$

on aurait

$$M_1 \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \left(\frac{1}{2a}\right)^{2n-1} < I(n) < M_2 \frac{n(n+1)\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots(n-1)} \left(\frac{1}{2a}\right)^{2n-1}$$

Lorsque le chemin d'intégration ou les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ ne sont pas réels, en choisissant, par exemple, deux fonctions $\lambda(t)$ et $u(t)$ de sorte qu'on ait constamment, le long de l'arc d'intégration,

$$|A(t)| \leqq |\lambda(t)|,$$
$$|r(t)| \leqq |u(t)|,$$

on aurait

$$|I(n)| < \int_L |\lambda(t)|\, |u(t)|^n\, ds,$$

s étant la longueur de l'arc L.

En particulier, on peut prendre comme intégrales de comparaison celles où la fonction $u(t)$ se réduit à une constante. Soit M le *minimum maximorum* du module de $r(t)$ le long des arcs obtenus en déformant L de manière que $I(n)$ conserve la même valeur que le long de L. Toutes les fois que l'intégrale

$$P = \int_L |\lambda(t)|\, ds$$

est une valeur finie, déterminée et différente de zéro, on aura

$$|I(n)| < PM^n.$$

Si le *minimum maximorum* n'existe pas, on prendrait pour M la plus grande valeur qu'acquiert la fonction $r(t)$ le long de L.

En faisant des hypothèses sur les fonctions $A(t)$ et $r(t)$, et en prenant pour fonctions de comparaison des fonctions variées de t, on aura des intégrales de comparaison en nombre illimité.

Considérons, par exemple, les intégrales de la forme

$$I(n) = \int_0^\infty A(t)[r(t)]^n\, dt,$$

où les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont supposées réelles pour toute valeur réelle positive de t et satisfont à cette condition qu'on ait en valeur absolue

$$A(t) \leqq kt, \qquad r(t) \leqq \frac{h}{\sqrt{a^2+t^2}}.$$

On aura alors en valeur absolue (pour $n > 2$)

$$I(n) < kh^n \int_0^\infty \frac{t\, dt}{(a^2+t^2)^{\frac{n}{2}}},$$

ou bien

$$I(n) < \frac{kh^2}{n-2}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-2}.$$

Signalons, en passant, un résultat plus général fourni par des considérations de ce genre. Soit $f(z)$ une fonction réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle, positif et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment avec un argument quelconque compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

La valeur absolue du coefficient $A_n (n > 1)$ *de la série de Taylor*

$$f(z) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots,$$

où a *est une quantité réelle et positive quelconque, est inférieure à la valeur*

$$\frac{2N}{(n-1)\pi a^{n-1}},$$

N désignant la plus grande valeur absolue qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z = 0$ à $z = \infty$, et $\psi(z)$ représentant le coefficient de i dans $f(zi)$.

En effet, comme je l'ai montré ailleurs (¹), pour toute fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions énumérées, on aura, en valeur absolue,

$$A_n < \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi(t)}{(\sqrt{a^2+t^2})^{n+1}}\, dt.$$

Or, le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$, nul pour $z = \infty$, fini pour $z = \infty$, et holomorphe pour toute valeur positive de z, présentera certainement un maximum N fini et déterminé, lorsque z varie de $z = 0$ à $z = \infty$, de sorte qu'on aura en valeur absolue, pour les valeurs positives de t,

$$\psi(t) \leqq Nt,$$

ce qui conduit directement au résultat énoncé.

4. Outre les méthodes de comparaison précédentes, on peut, grâce à la forme des intégrales $I(n)$, avoir des limites supérieures de $I(n)$ par bien d'autres procédés.

Ainsi, lorsque le chemin L forme un contour fermé, on aurait, dans des cas étendus, des limites supérieures du module de $I(n)$ par des procédés analogues à celui par lequel on détermine de telles limites pour les coefficients des fonctions entières en partant de leur expression sous la forme de l'intégrale de Cauchy.

Supposons, pour indiquer un autre procédé, que le chemin L se réduise à un intervalle limité ou illimité de valeurs réelles, les

(¹) *Généralisation de certaines formules de Stieltjes* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1903, p. 334).

fonctions $A(t)$ et $r(t)$ étant réelles, finies et continues entre les limites d'intégration. L'inégalité de M. Schwartz

$$\left[\int \varphi\psi\, dt\right]^2 < \left[\int \varphi^2\, dt\right]\left[\int \psi^2\, dt\right],$$

valable pour les fonctions φ et ψ réelles et intégrables entre les limites de l'intégration, appliquée aux fonctions

$$\varphi = A(t), \qquad \psi = [r(t)]^n,$$

conduit à l'inégalité

$$I(n) < A\sqrt{Y(n)},$$

où A est une constante indépendante de n ayant pour valeur

$$A = \sqrt{\int_L [A(t)]^2 dt},$$

et $Y(n)$ étant une fonction de n donnée par

$$Y(n) = \int_L [r(t)]^{2n}\, dt.$$

Appliquée, par exemple, aux intégrales

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t)\left(\frac{1}{a+bt^2}\right)^n dt,$$

où a et b sont des constantes positives et $A(t)$ une fonction telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(t)\, dt$$

ait un sens, la dernière inégalité conduit à

$$I(n) < \alpha\beta^n \sqrt{\frac{2n(2n+1)\ldots(4n-1)}{1.2.3\ldots(2n-1)}},$$

α et β étant indépendants de n.

D'autres limites de $I(n)$ seraient fournies par le théorème connu d'Ossian Bonnet consistant en ce que, si $\varphi(x)$ est une fonction positive et croissante dans l'intervalle (a, b), on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\, dx$$

(avec $a < \xi < b$), et si $\varphi(x)$ est positive et décroissante, on aura

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)\,dx.$$

Supposons, par exemple, que le chemin L, ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ figurant dans $I(n)$, soient réels, et que, de plus, $r(t)$ et $r'(t)$ conservent des signes invariables pendant que t varie dans l'intervalle (a, b) [nous considérerons le signe de $r(t)$ comme positif] et enfin que l'intégrale

$$\int_\xi^\eta A(t)\,dt$$

reste finie, déterminée et différente de zéro pour toute valeur de ξ et η comprise entre a et b.

En appliquant le théorème de Bonnet aux fonctions

$$f(t) = A(t), \qquad \varphi(t) = [r(t)]^n,$$

on aura

$$I(n) = AB^n,$$

où A et B sont des constantes ayant pour valeurs :

Si $r'(t) > 0$,

$$A = \int_\xi^b A(t)\,dt, \qquad B = r(a);$$

si $r'(t) < 0$,

$$A = \int_a^\eta A(t)\,dt, \qquad B = r(b),$$

ξ et η étant deux nombres compris entre a et b.

Si donc N *et* M *représentent une limite supérieure et une limite inférieure des intégrales* A *ainsi définies, on aura*

$$NB^n < I(n) < MB^n.$$

III. — Décomposition en éléments simples.

1. Le coefficient b_n de la série

$$H(t, z) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \ldots,$$

correspondant à la fonction $F(z)$ étudiée, sera, comme nous l'avions remarqué, la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$P(t, n)[r(t)]^n,$$

où les $r(t)$ ne dépendent pas de n et s'obtiennent comme racines d'une certaine équation algébrique en r à coefficients fonctions de t; $P(t, n)$ sont des polynomes en n à coefficients fonctions de t des degrés indépendants de n.

Chaque polynome $P(t, n)$ se laisse mettre, et cela d'une seule manière, sous la forme

$$P(t, n) = A_0(t) + nA_1(t) + n(n-1)A_2(t) + \ldots,$$

où les $A_i(t)$ seront fonctions de t définies par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}
&P(t, 0) = A_0,\\
&P(t, 1) = A_0 + A_1,\\
&P(t, 2) = A_0 + 2A_1 + 2A_2,\\
&P(t, 3) = A_0 + 3A_1 + 6A_2 + 6A_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Par suite, le coefficient b_n se laisse exprimer sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k)I(n),$$

où k ne dépend pas de n, et où $I(n)$ sera de la forme

$$I(n) = \int_L A(t)[r(t)]^n\,dt. \tag{16}$$

Les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ ne dépendent pas de n et dépendent *algébriquement* des fonctions de t figurant comme coefficients des diverses puissances de z dans $R(t, z)$.

La fonction étudiée $F(z)$ s'exprime donc sous la forme de la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$\sum_0^\infty n(n-1)\ldots(n-k)I(n)z^n = z^k\frac{d^k}{dz^k}\sum_0^\infty I(n)z^n,$$

d'où le théorème suivant, fondamental pour l'étude que nous nous proposons :

En désignant par

$$\mathrm{I}_1(n),\quad \mathrm{I}_2(n),\quad \mathrm{I}_3(n),\quad \ldots$$

les diverses intégrales de la forme (16), *rattachées à la fonction considérée* F(z), *et par*

$$\theta_1(z),\quad \theta_2(z),\quad \theta_3(z),\quad \ldots$$

les diverses fonctions

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \mathrm{I}(n)\, z = \int_{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{A}(t)}{1 - z r(t)}\, dt,$$

correspondant à ces intégrales, la fonction F(z) *se laisse mettre sous la forme d'une combinaison linéaire de termes*

$$\begin{array}{llll} \theta_1(z), & z\dfrac{d\theta_1}{dz}, & z^2\dfrac{d^2\theta_1}{dz^2}, & \ldots, \\ \theta_2(z), & z\dfrac{d\theta_2}{dz}, & z^2\dfrac{d^2\theta_2}{dz^2}, & \ldots, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \end{array}$$

On arriverait, comme on s'en rend bien compte, au même résultat en décomposant la fraction rationnelle R(t, z) en fractions simples, et en intégrant l'expression obtenue le long du chemin L. La décomposition précédente de F(z) n'est donc pas restreinte aux valeurs de z à l'intérieur du cercle de convergence de la série correspondante $\theta(z)$, pourvu que, pour les valeurs de z hors de ce cercle, on considère $\theta(z)$ comme définie par son expression

$$\theta(z) = \int_{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{A}(t)}{1 - z r(t)}\, dt,$$

qui la représente dans tout le plan.

2. Les fonctions $\theta(z)$ jouent le rôle d'une espèce d'*éléments simples* par rapport aux fonctions F(z). Ces éléments sont, d'ailleurs, infiniment variés et représentent, en général, des fonctions transcendantes de z.

Ainsi, les fonctions F(z) correspondant aux fonctions

$$\mathrm{A}(t) = e^{ut},\qquad r(t) = \frac{1}{t}$$

et à l'arc L représentant un contour fermé entourant l'origine, sont des combinaisons linéaires d'un nombre limité de termes de la forme $z^k e^{az}$.

Les fonctions $F(z)$ correspondant aux fonctions $A(t)$ et $r(t)$ de la forme

$$A(t) = e^{at^2}, \qquad r(t) = e^{bt^2}$$

(a et b étant des constantes à partie réelle négative) et à l'arc L se réduisant au demi-axe réel, se réduisent à des combinaisons linéaires des puissances de z, de la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \frac{a}{\sqrt{a+bn}}$$

et de ses dérivés par rapport à z.

Lorsque les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont de la forme

$$A(t) = \frac{\sin at}{t}, \qquad r(t) = e^{-t},$$

l'arc L se réduisant au demi-axe réel, le rôle d'élément simple est joué par la transcendante

$$\theta(z) = \sum_0^\infty \left(\operatorname{arc\,tang} \frac{a}{n}\right) z^n, \; \ldots.$$

3. Dans certains cas, les fonctions $\theta(z)$ se réduisent à des fonctions *rationnelles* de z. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $I(n)$ soit polynome en

$$n, \quad a^n, \quad b^n, \quad c^n, \quad \ldots,$$

$a, b, c, \ldots$, et des degrés de ces polynomes étant indépendants de n.

En mettant à part le cas évident où la fonction correspondante $r(t)$ se réduit à une constante, il en sera ainsi, par exemple, *toutes les fois que l'arc* L *forme un contour fermé entourant un nombre limité de pôles de* $A(t)$, *et à l'intérieur duquel la fonction correspondante* $r(t)$ *est holomorphe*. Dans ce cas, l'intégrale $I(n)$ sera la somme d'un nombre limité de termes de la forme

$$n(n-1)\ldots(n-h)ab^n,$$

où a, b sont des constantes indépendantes de n, et h un entier également indépendant de n; la fonction $\theta(z)$ est donc rationnelle.

IV. — Convergence des séries $\theta(z)$.

1. Par la réduction des fonctions étudiées $F(z)$ aux éléments simples, la question de la convergence des séries

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

est ramenée à celle des séries

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \ldots,$$

Si ρ_1, ρ_2, ρ_3, ... sont les rayons de convergence des séries θ_1, θ_2, θ_3, ... rattachées à la fonction $F(z)$, le rayon de convergence R de la série $F(z)$ sera le plus petit parmi les rayons ρ_i.

De même, si λ_1, λ_2, λ_3, ... sont des limites inférieures des ρ_i, la plus petite d'entre elles sera une limite inférieure du rayon R.

Occupons-nous donc de la convergence des séries $\theta(z)$.

D'abord, dans les cas où l'intégrale correspondante $I(n)$ se laisse exprimer sous la forme explicite comme fonction de (n), le rayon de convergence ρ de $\theta(z)$ sera donné comme limite pour $n = \infty$ de l'une ou l'autre des expressions

$$\frac{I(n)}{I(n+1)}, \quad \frac{1}{\sqrt[n]{I(n)}},$$

dans lesquelles l'intégrale $I(n)$ peut aussi être remplacée par sa valeur asymptotique.

Dans les cas où l'on ne sait calculer ni $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut, à l'aide des inégalités relatives à $I(n)$, déterminer des limites inférieures du rayon ρ.

Ainsi, si le long de l'arc L on a constamment

$$|r(t)| < M,$$

la constante

$$P = \int_L |A(t)|\, ds$$

ayant un sens, *une limite inférieure de ρ sera donnée par* $\frac{1}{M}$.

Imaginons maintenant que l'on déforme le chemin d'intégration de manière que l'intégrale $I(n)$ ne change pas de valeur. A tout chemin correspondra une valeur M et, si μ est le plus petit parmi les M ainsi obtenus, $\frac{1}{\mu}$ *sera une limite inférieure de* ρ.

Or, *dans des cas généraux* $\frac{1}{\mu}$ *représente même la valeur exacte du rayon* ρ.

Il en sera, d'abord, ainsi toutes les fois que l'arc L se réduit à une portion (a, b), limitée ou illimitée, de l'axe réel, le long de laquelle les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues, et l'intégrale $\int A(t)\,dt$ finie et différente de zéro.

Pour le faire voir, supposons d'abord que $r(t)$ garde constamment un même signe dans l'intervalle (a, b) (nous considérerons ce signe comme positif) et que la dérivée $r'(t)$ y soit positive. D'après le théorème cité de Ossian Bonnet, on aura

$$I(n) = AB^n \tag{17}$$

avec

$$A = \int_\xi^b A(t)\,dt, \qquad B = r(b), \qquad a < \xi < b,$$

d'où l'on conclut que

$$\rho = \frac{1}{r(b)}.$$

Si maintenant la dérivée $r'(t)$ était négative, on aurait encore l'égalité (17) avec

$$A = \int_a^\xi A(t)\,dt, \qquad B = r(a), \qquad a < \xi < b,$$

et le rapport de convergence serait

$$\rho = \frac{1}{r(a)}.$$

Si, enfin, $r(t)$ et la dérivée $r'(t)$ changeaient de signe dans l'intervalle (a, b), on décomposerait cet intervalle en plusieurs autres où $r(t)$, ainsi que $r'(t)$, gardent des signes invariables. Chacun de ces intervalles partiels donnera dans $I(n)$ un terme de la forme AB^n; la valeur asymptotique de $I(n)$ coïncidera avec celui de ces termes pour lequel $B = r(t)$ a la plus grande valeur, de sorte qu'en désignant celle-ci par μ on aura l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim A\mu^n,$$

et le rayon ρ aura pour valeur $\frac{1}{\mu}$.

Voici maintenant un second cas général où le rayon ρ a pour valeur exacte $\frac{1}{\mu}$. Supposons qu'on puisse déformer le chemin d'intégration, réel ou imaginaire, de manière à le faire passer par un point α autre qu'une limite de l'intégrale et jouissant des propriétés suivantes : 1° qu'on ait $r'(\alpha) = 0$; 2° que la plus grande valeur de $r(t)$ le long du nouveau chemin ait lieu en α; 3° que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient holomorphes au voisinage de α. *Dans ce cas, on aura encore*

$$\rho = \frac{1}{|r(\alpha)|}.$$

Ceci résulte directement du théorème de M. Darboux consistant en ce que, dans les conditions énumérées, l'égalité asymptotique de Laplace est valable et l'intégrale $I(n)$ se laisse mettre, pour les grandes valeurs de n, sous la forme

$$N\frac{[r(\alpha)]^n}{\sqrt{n}}(1+\varepsilon),$$

où N est une constante indépendante de n, et ε une fonction de n tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment.

2. D'une manière générale, la question de convergence des fonctions $\theta(z)$ est étroitement liée à celle des valeurs asymptotiques des intégrales $I(n)$ ou, ce qui revient au même, à celle des valeurs approchées des $I(n)$ pour les grandes valeurs de n.

Nous rappellerons quelques égalités asymptotiques de cette espèce, connues ou faciles à démontrer, s'appliquant directement à la question de convergence des fonctions $\theta(z)$.

En premier lieu, l'égalité asymptotique de Laplace

$$\int_L A(t)\,r[(t)]^n\,dt \sim \frac{AB^n}{\sqrt{n}}$$

(où A et B sont des constantes, indépendantes de n), applicable dans les conditions connues, précisées par M. Darboux ([1]) et citées dans le paragraphe précédent.

MM. Flamme ([2]) et Hamy ([3]) se sont particulièrement occupés des intégrales de la forme

$$\int_L A(t)t^n\,dt, \quad \int_L A(t)\left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

et ont mis en évidence la manière dont leurs valeurs asymptotiques dépendent de la nature des singularités de la fonction $A(t)$.

M. Le Roy ([4]) s'est occupé des valeurs asymptotiques des intégrales

$$I(n) = \int_0^\infty A(t)e^{nt}\,dt$$

lorsque la fonction $A(t)$ satisfait à certaines conditions assez larges.

Un procédé simple, dû à M. Poincaré ([5]), permet de traiter le cas des intégrales $I(n)$ de la forme

$$\int_L A(t)e^{int}\,dt,$$

prises le long d'un chemin réel ou imaginaire de longueur finie; on arrive à l'égalité asymptotique

$$I(n) \sim \frac{A\,e^{an}}{n},$$

où A et a ne dépendent pas de n.

Citons encore le cas où l'intégrale $I(n)$ donnée est une fonction de n régulière dans le domaine de l'infini et, par suite, dévelop-

---

([1]) Mémoire *Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres*, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1878).

([2]) *Recherches des expressions approchées*, etc. (Thèse de doctorat, Paris, 1887).

([3]) *Sur le développement approché de la fonction perturbatrice*, etc. (*Journ. de Math. pures et appl.*, 1894).

([4]) *Valeurs asymptotiques de certaines séries*, etc. (*Bull. des Sciences math.*, 1900).

([5]) *Théorie analytique de la propagation de la chaleur*, Chap. XII.

pable en série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{n}$, convergente pour les valeurs suffisamment grandes de n : on démontre aisément l'égalité asymptotique

$$I(n) = \frac{A}{n^p},$$

A étant une constante et p un entier positif ou nul, indépendants de n. Tel est, par exemple, le cas des intégrales

$$\int_0^\infty A(t) e^{-nt}\, dt$$

lorsque $A(t)$ est holomorphe au voisinage de $t = 0$ et telle que, en posant

$$A(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots,$$

la série

$$\sum n!\, \alpha_n t^n$$

converge pour les valeurs suffisamment petites de t [ce qui arrive, en particulier, toutes les fois que $A(t)$ est une fonction entière du genre zéro].

3. Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction considérée $\theta(z)$ est une *fonction entière* de z. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'une ou l'autre des expressions

$$\sqrt[n]{I(n)}, \quad \frac{I(n+1)}{I(x)}$$

tende vers zéro lorsque n croît indéfiniment. La proposition subsiste, d'ailleurs, si l'on substitue aux intégrales $I(n)$ leurs valeurs asymptotiques, dont il a été question dans le paragraphe précédent.

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{int}\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\frac{n^2}{4a}}$$

est une fonction entière de n; au contraire, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} e^{-nt}\, dt$$

n'est pas entière, la valeur asymptotique de $I(n)$, d'après une proposition du paragraphe précédent, étant égale à $\frac{1}{n}$.

Dans les cas où l'on ne saurait exprimer sous la forme explicite ni la valeur exacte $I(n)$ ni sa valeur asymptotique, on peut procéder par comparaison, comme dans l'étude de la convergence des séries $\theta(z)$. La règle intuitive suivante rendra souvent des services à cet égard :

Soient $\lambda(t)$ et $u(t)$ deux fonctions telles qu'à l'intégrale

$$Y(n) = \int_L |\lambda(t)|\,|u(t)|^n\,ds$$

correspond la fonction entière

$$Y(0) + Y(1)z + Y(2)z^2 + \ldots.$$

Si le long du chemin L on a constamment

$$|A(t)| \leqq |\lambda(t)|,$$
$$|r(t)| \leqq |u(t)|,$$

la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale $I(n)$ sera également une fonction entière de z.

En nous reportant à ce qui a été dit pour le rayon de convergence des séries $\theta(z)$, on trouverait aisément d'autres règles fournissant des conditions suffisantes ou bien pour que $\theta(z)$ soit une fonction entière, ou bien pour qu'elle ne le soit pas. Elle ne le sera pas, par exemple, si, le chemin d'intégration étant réel, les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles, finies et continues le long de ce chemin, l'intégrale

$$\int_L A(t)\,dt$$

ayant un sens.

Ou bien encore : si $A(t)$ et $r(t)$ satisfont aux conditions pour que l'inégalité asymptotique de Laplace soit applicable à l'intégrale correspondante $I(n)$, etc.

V. — Particularités diverses des fonctions $\theta(z)$.

1. La forme même des expressions analytiques des fonc-

tions $\theta(z)$, données soit sous la forme des séries

$$\theta(z) = \mathrm{I}(0) + \mathrm{I}(1)z + \mathrm{I}(2)z^2 + \ldots \tag{18}$$

avec

$$\mathrm{I}(n) = \int_{\mathrm{L}} \mathrm{A}(t)\,[r(t)]^n\,dt, \tag{19}$$

soit comme intégrales

$$\theta(z) = \int_{\mathrm{L}} \frac{\mathrm{A}(t)}{1 - z\,r(t)}\,dt, \tag{20}$$

rend particulièrement facile l'étude de ces fonctions, en mettant en évidence des relations existant entre leurs diverses particularités et celles des fonctions correspondantes $\mathrm{A}(t)$ et $r(t)$.

La première expression analytique définit $\theta(z)$ à l'intérieur d'une certaine circonférence; la seconde en fournit le prolongement analytique dans tout le plan. Chacune d'elles met en évidence certaines particularités des fonctions qu'elle définit. La première, par exemple, se prête directement à l'application des résultats récents de la théorie des séries de Taylor, relatifs aux relations existant entre la manière dont varie $\mathrm{I}(n)$ avec n et celle dont croît $\theta(z)$ avec z; ou bien entre les particularités de $\mathrm{I}(n)$ et les singularités de $\theta(z)$, ses zéros, ses pôles, etc. La seconde expression est souvent plus commode pour le calcul numérique des fonctions $\theta(z)$; elle rend possible l'étude des propriétés de $\theta(z)$ au delà du cercle de convergence de la série correspondante, etc. Les résultats récents relatifs à certaines intégrales de la forme (20), dus à M. Le Roy, offrent, par exemple, le moyen d'étudier les valeurs asymptotiques des fonctions $\theta(z)$, la distribution de leurs singularités dans le plan des z, la manière dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z approche du cercle de convergence de la série $\theta(z)$ ou bien d'une singularité, ou lorsque z tourne autour de celle-ci, etc.

Nous n'indiquerons qu'à titre d'exemples quelques résultats de cette nature.

2. Tout d'abord, les connaissances sur des limites supérieures ou inférieures du module de la fonction $\mathrm{A}(t)$ ou $r(t)$ entraînent des connaissances sur les limites que ne saurait dépasser le module de la fonction correspondante $\theta(z)$ pour les valeurs données de z.

Ainsi, en désignant par M le plus grand module de $r(t)$ le long de l'arc L ou bien d'un chemin équivalent, *la fonction rationnelle*

$$\frac{P}{1-Mz}$$

avec

$$P=\int_L |A(t)|\,ds$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ *pour toutes les valeurs de* z *à module inférieur à* $\frac{1}{M}$.

On aura des limites plus précises dans les cas où les limites supérieures des modules de $A(t)$ et $r(t)$ sont fournies par des fonctions diverses de t.

Ainsi, l'axe L se réduisant au demi-axe réel, si les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ sont réelles pour les valeurs réelles et positives de t et telles que pour les valeurs positives convenablement choisies de k, h, a on ait en valeur absolue

$$A(t)\leqq kt, \qquad r(t)\leqq\frac{h}{\sqrt{a^2+t^2}},$$

on aura en valeur absolue

$$I(n)<\frac{kh^2}{n-2}\left(\frac{h}{a}\right)^{n-2} \qquad (n>2),$$

de sorte que *la fonction*

$$I(0)+I(1)z+I(2)z^2+kh^2z^2\log\left(1-\frac{hz}{a}\right)$$

représentera une limite supérieure de $|\theta(z)|$ *pour toutes les valeurs de* z *à module inférieur à* $\frac{a}{h}$.

Signalons, à ce propos, un résultat d'une portée plus générale, fourni par les mêmes considérations et conduisant à une inégalité intéressante relative aux accroissements finis d'une classe étendue de fonctions.

Considérons une fonction $f(z)$ réelle pour z réel et positif, holomorphe pour toute valeur de z à partie réelle positive et tendant vers zéro lorsque z croît indéfiniment dans une direction quelconque correspondant aux parties réelles positives.

Comme nous l'avons montré précédemment, à partir du rang $n = 2$, les coefficients A_n du développement

$$f(z) = A_0 + A_1(z - \lambda) + A_2(z - \lambda)^2 + \ldots$$

sont, en valeurs absolues, inférieurs aux coefficients correspondants de la série

$$\theta(z) = I(2)(z - \lambda)^2 + I(3)(z - \lambda)^3 + \ldots,$$

où

$$I(n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\psi(t)}{\sqrt{(\lambda^2 + t^2)^{n+1}}}\,dt,$$

$\psi(t)$ désignant le coefficient de i dans $f(ti)$ et λ étant un nombre réel et positif quelconque.

Or, comme l'on a, en vertu de ce qui précède,

$$I(n) < \frac{2N}{\pi}\,\frac{1}{(n-1)\lambda^{n-1}}$$

(N désignant la plus grande valeur absolue, finie et différente de zéro, qu'acquiert le rapport $\frac{\psi(z)}{z}$ pendant que z varie par valeurs positives de $z = 0$ à $z = \infty$), on aura en valeur absolue

$$\theta(z) < \frac{2N}{\pi}\log\left(1 - \frac{z-\lambda}{\lambda}\right),$$

d'où, en faisant

$$\lambda = x, \qquad z = x + h,$$

on tire le résultat suivant :

La valeur absolue de l'expression

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

est inférieure à celle de l'expression

$$\frac{2N}{\pi}\log\left(1 - \frac{h}{x}\right)$$

quelles que soient les quantités réelles et positives h et x pourvu qu'elles satisfassent à la condition $-x < h < x$.

3. Lorsque la fonction $\theta(z)$ est *entière*, on peut, dans des cas

étendus, étudier la manière dont elle se comporte lorsque le module de z croît indéfiniment.

Supposons, par exemple, qu'on ait déterminé, par des procédés de M. Hadamard, une fonction $\chi(n)$ au plus égale, pour les valeurs entières de n, au module de l'intégrale $I(n)$ et telle que la fonction

$$\varphi(n) = \sqrt[n]{\chi(n)}$$

soit une fonction réelle, positive, continue et croissante de n, devenant infinie pour $n = \infty$. En désignant par x le module de z et par $\psi(z)$ la fonction inverse de φ, d'après le théorème bien connu de M. Hadamard, *la fonction* $\theta(z)$ *croîtra moins vite que la fonction*

$$x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{\alpha} dx},$$

le nombre ε *étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.*

Ainsi, la fonction $\theta(z)$ correspondant à l'intégrale

$$I(n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} e^{nti}\, dt = A\, e^{-\alpha n^2}$$

(où a, A, α sont des constantes positives) croîtra moins vite que la fonction

$$x^{\varepsilon} e^{\frac{1}{\alpha}(\log x)^2}$$

Dans des cas étendus, on saura même préciser la valeur asymptotique de la fonction $\theta(z)$, supposée entière, pour les grandes valeurs de z. Considérons, par exemple, le cas étudié par M. Le Roy (¹) : supposons qu'en posant

$$-\log I(n) = \varpi(n),$$

la fonction $\varpi(n)$ satisfasse aux conditions suivantes :

1° Cette fonction, ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres sont réelles, positives et continues pour les valeurs positives de n ;

2° $\varpi(n)$ et $\varpi'(n)$ croissent jusqu'à l'infini tandis que $\varpi''(n)$ décroît jusqu'à zéro pour $n = \infty$;

(¹) *Valeurs asymptotiques de certaines séries* (*Bull. des Sciences math.*, 1900, p. 262).

3° Le produit $n^2 \varpi''(n)$ représente une fonction positive et indéfiniment croissante avec n;

4° Le rapport $\frac{\varpi(n)}{n}$ devient infini avec n.

D'après un théorème dû à M. Le Roy, *lorsque la variable z croît indéfiniment dans la direction des z réels et positifs, la fonction correspondante* $\theta(z)$ *tendra asymptotiquement vers la fonction*

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{u\varpi'(u)-\varpi(u)}}{\sqrt{\varpi''(u)}},$$

u désignant la racine réelle et positive de l'équation

$$\varpi'(u) = \log z.$$

Ainsi, dans le cas de

$$\mathrm{I}(n) = e^{-n^p} \qquad (1 < p < 2),$$

on aura

$$\varpi(n) = n^p, \qquad u = \left(\frac{\log z}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}},$$

de sorte que la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$ sera

$$\alpha(\log z)^k e^{\beta(\log z)^h},$$

α, ρ, k, h étant des constantes faciles à préciser.

Dans les cas où la fonction $\theta(z)$ n'est pas entière, on connaîtra dans des cas étendus sa valeur asymptotique lorsque z approche d'un point du cercle de convergence de la série $\theta(z)$. Tel est, par exemple, le cas de M. Le Roy suivant :

Supposons que, le rayon de convergence de $\theta(z)$ étant égal à l'unité, l'intégrale correspondante $\mathrm{I}(n)$ soit une fonction réelle, positive et constamment décroissante de n, tendant vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Soit $\mathrm{F}(n)$ une fonction de n telle qu'on ait, pour $n = \infty$,

$$\lim \frac{1}{\mathrm{I}(n)}\,\frac{d\mathrm{F}}{dn} = 1.$$

D'après un théorème de M. Le Roy [1], *la valeur asympto-*

[1] *Valeurs asymptotiques de certaines séries* (*Bull. des Sciences math.*, 1900, p. 250).

tique de $\theta(z)$ pour z voisin de 1 *est de la forme*

$$CF\left(\frac{1}{1-z}\right) \qquad (C = \text{const.}).$$

Ainsi, dans le cas où

$$I(n) = \int_0^\infty e^{-nt^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

la valeur asymptotique de la fonction correspondante $\theta(z)$, pour z voisin de 1, sera

$$\frac{C}{\sqrt{1-z}}.$$

Remarquons que la fonction $F(n)$ coïncide avec l'intégrale

$$\int \varphi(n)\,dn,$$

$\varphi(n)$ étant la valeur asymptotique de $I(n)$ pour les grandes valeurs de n, dont nous nous sommes précédemment occupé.

Remarquons aussi qu'au cas précédent se ramène facilement celui où le rayon de convergence de $\theta(z)$ n'est pas égal à l'unité, ou bien celui où $I(n)$ tend vers une limite finie différente de zéro.

4. Certains résultats dus à M. Le Roy, concernant les singularités des fonctions représentées par les séries de Taylor et par certaines classes d'intégrales définies, s'appliquent avec la plus grande facilité aux fonctions qui nous occupent, et fournissent directement des connaissances sur les singularités de ces fonctions, la nature analytique de celles-ci, etc.

Supposons, par exemple, que l'intégrale

$$I(n) = \int_L A(t)[r(t)]^n\,dt,$$

correspondant à la fonction considérée $\theta(z)$, se laisse transformer en une autre de la forme

$$I(n) = \int_0^1 B(x)x^n\,dx,$$

la fonction $B(x)$ n'étant assujettie qu'à la condition que l'intégrale

$$\int_0^1 |B(t)|\, dt$$

ait un sens.

La fonction correspondante $\theta(z)$ *sera holomorphe en tout point du plan, sauf peut-être pour* z *réel et plus grand que* 1. En particulier, si le cercle de convergence de la série

$$\theta(z) = I(0) + I(1)z + I(2)z^2 + \ldots$$

a l'unité pour rayon, il ne contient qu'un point singulier de $\theta(z)$: c'est $z = 1$.

La portion $(+1, +\infty)$ de l'axe réel est pour $\theta(z)$ une coupure. Si $B(t)$ est holomorphe pour $0 > t > 1$, la coupure n'est pas essentielle, et $\theta(z)$ n'a pas d'autres points singuliers que $z = 1$ et $z = \infty$.

La fonction $\theta(z)$ *n'est pas uniforme, et le calcul du saut brusque subi par l'intégrale, quand on franchit la coupure, donne ses diverses déterminations.*

Plusieurs circonstances peuvent alors se présenter. Si $B(t)$ est holomorphe dans tout le plan, sauf peut-être à l'origine, *les périodes de* $\theta(z)$, *quand on tourne autour du point singulier* 1, *sont données par l'expression*

$$\frac{2k\pi i}{z} B\left(\frac{1}{z}\right).$$

Dans le cas général (la coupure n'étant cependant pas essentielle) *toutes les singularités sont possibles*, suivant la nature de la fonction $B(t)$, pour les déterminations de $\theta(z)$ autres que la détermination principale.

Les procédés de M. Le Roy permettent de traiter aussi des cas beaucoup plus généraux; convenablement modifiés, ils sont, d'ailleurs, propres à s'appliquer, dans des cas très étendus, à des fonctions $\theta(z)$ correspondant aux coefficients $I(n)$ exprimés directement sous la forme générale

$$I(n) = \int_L A(t)[r(t)]^n\, dt.$$

Ajoutons aussi que cette dernière expression permet d'étendre la manière dont se comporte la fonction $I(t)$ pour $t = \infty$. Or, des connaissances de cette nature on peut souvent tirer des renseignements sur la distribution des singularités de la fonction correspondante $\theta(z)$ dans le plan des z [1].

5. Dans une Note antérieure [2], j'ai démontré la proposition suivante : si l'on désigne par λ le plus petit module des zéros de la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \tag{20}$$

et si l'on forme la fonction

$$u(r) = \frac{1}{r^2} \sum_0^\infty | a_n |^2 r^2{}_n,$$

on aura

$$\lambda > \frac{| a_0 |}{\sqrt{u(z)}},$$

quelle que soit la valeur de la variable réelle et positive r, pourvu qu'elle reste inférieure au rayon de convergence de la série (20).

La proposition subsiste manifestement lorsqu'on substitue dans $u(r)$ aux coefficients

$$| a_1 |^2, \quad | a_2 |^2, \quad | a_3 |^2, \quad \ldots,$$

des nombres réels positifs quelconques qui leur sont supérieurs. *Ceci fait qu'appliquée aux fonctions* $\theta(z)$ *exprimées sous la forme des séries* (17), *elle fournit des renseignements sur les limites inférieures des modules des zéros de ces fonctions ou, plus généralement, des valeurs de* z *pour lesquelles* $\theta(z)$ *prend une valeur donnée* a. Il suffit pour cela de calculer la fonction $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z)$ donnée, après y avoir remplacé le coefficient $I(n)$ par l'une des limites supérieures de son module, choisie de manière que le calcul de $u(z)$, ou au moins celui d'une de ses limites supérieures, soit possible. Les divers procédés indiqués précédemment conduisent à de telles limites

---

(1) *Voir*, par exemple, DESAINT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXXXII, 1901, p. 1102-1104.

(2) *Bulletin de la Société mathém. de France*, t. XXIX, 1901, p. 303-312.

supérieures de $|I(n)|$, et ce genre de calcul ne présente aucune espèce de difficultés.

Envisageons, par exemple, les transcendantes

$$\theta(z) = \int_0^\infty \frac{z\,A(t)}{e^t - z}\,dt,$$

correspondant à

$$I(n) = \int_0^\infty A(t)e^{-nt}\,dt,$$

et supposons que, pour t réel et positif, la fonction $A(t)\sqrt{t}$ soit continue, réelle, positive et constamment inférieure à un certain nombre M. On aura

$$a_n < M\int_0^\infty \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}}\,dt = M\sqrt{\frac{\pi}{n}},$$

et $u(r)$ correspondant à la fonction $\theta(z) + a$ (où a est un nombre réel et positif quelconque) aura pour expression

$$u(r) = \frac{1}{r^2}\left[a^2 - M^2\pi\log(1 - r^2)\right],$$

de sorte qu'une limite inférieure μ des modules des valeurs de z pour lesquelles $\theta(z)$ prend la valeur donnée a, est fournie par la valeur de l'expression

$$\mu = \frac{ar}{\sqrt{a^2 - M^2\pi\log(1 - r^2)}},$$

et cela quelle que soit la valeur de r comprise entre 0 et 1. En prenant, en particulier,

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{e}} = 0{,}795\ldots,$$

une limite inférieure cherchée sera

$$\mu = \frac{0{,}795\,a}{\sqrt{a^2 + M^2\pi}}.$$

Indiquons encore un résultat plus général de cette espèce.

Soit $F(x)$ une fonction entière d'un genre fini μ. Désignons par M le maximum du module de $F(z)$ lorsque le module de z est égal à r, r étant une variable réelle positive.

On sait que, quel que soit le nombre réel et positif α, le produit

$$M(r)e^{-\alpha r^{p+1}}$$

reste inférieur à un certain nombre fini N lorsque r varie de o à ∞. D'autre part, en posant

$$F(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

l'expression de a_n, sous la forme de l'intégrale

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F(t)}{t}\left(\frac{1}{t}\right)^n dt,$$

conduit, comme l'on sait, à l'inégalité

$$|a_n| < N\frac{\beta^n}{n^{cn}},$$

où c et β sont des constantes numériques ayant pour valeurs

$$c = \frac{1}{p+1}, \qquad \beta = \left(\frac{\alpha e}{c}\right)^c.$$

Le rôle de la fonction $u(r)$ est donc joué par la fonction

$$\frac{|a_0|^2}{r^2} + \frac{N^2}{r^2}\sum_1^\infty \frac{(\beta r)^{2n}}{n^{2nc}},$$

et, en y faisant $r = \frac{1}{\beta}$, on arrive à la proposition suivante :

Une limite inférieure des modules des zéros de la fonction F(z) *est donnée par l'expression*

$$\frac{1}{a\alpha^{\frac{1}{p+1}}\sqrt{1 + b\left(\frac{K}{A}\right)^2}}, \tag{21}$$

où K désigne une limite supérieure de N; A le module de F(o); a et b deux constantes numériques ayant pour valeurs

$$a = [(p+1)e]^{\frac{1}{p+1}}, \qquad b = \theta\left(\frac{2}{p+1}\right),$$

$\theta(t)$ désignant la transcendante

$$\theta(t)=\sum_{1}^{\infty} n^{-nt}.$$

Les constantes a et b restent les mêmes pour toutes les fonctions $F(z)$ d'un même genre p et sont faciles à calculer une fois pour toutes. On trouvera ainsi :

pour $p=0$: $a=e \quad =2,7183$; $\quad b=\theta(2)=1,0639$;
pour $p=1$: $a=\sqrt{2e}=2,3316$; $\quad b=\theta(1)=1,2913$;
pour $p=2$: $a=\sqrt[3]{3e}=2,0128$; $\quad b=\theta(\frac{2}{3})=1,5383$, ...

En remplaçant dans (21) A par $|F(0)-C|$, cette expression fournit une limite inférieure des valeurs de z pour lesquelles $F(z)$ prend la valeur donnée C.

6. L'expression de $\theta(z)$, sous la forme de l'intégrale

$$\theta(z)=\int_{L} \frac{A(t)}{1-z r(t)}\, dt \tag{22}$$

se prête facilement au calcul numérique approché des valeurs que prend cette fonction pour des valeurs données de z. Elle met, en outre, mieux en évidence certaines particularités de la fonction que ne le ferait l'expression de $\theta(z)$ sous la forme de la série de Taylor.

Supposons, par exemple, que les limites de l'intégrale, ainsi que les fonctions $A(t)$ et $r(t)$ soient réelles et positives. L'expression (22) montre tout d'abord que *la fonction* $\theta(z)$ (*ou bien sa branche principale dans le cas où elle n'est pas uniforme*) *aura des valeurs réelles et positives pour les* z *réels, positifs ou négatifs, mais plus petits que* $\frac{1}{M}$, M *désignant la plus grande valeur de la fonction* $r(t)$ *entre les limites de l'intégrale.*

En posant

$$z=\xi+\eta i,$$

on aura

$$\theta(z)=U+i\eta V$$

avec

$$U = \int_L A(t) \frac{1 - \xi r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt,$$

$$V = \int_L A(t) \frac{r(t)}{[1 - \xi r(t)]^2 + \eta^2 [r(t)]^2} dt.$$

Le produit $A(t)r(t)$ étant positif pour toutes les valeurs de t comprises entre les limites de l'intégrale, la valeur V sera différente de zéro : *la fonction* $\theta(z)$ (*sa branche principale*) *ne saurait donc avoir aucun zéro imaginaire*. D'autre part, comme U ne saurait être nulle pour $\xi < \frac{1}{M}$, *les zéros de* $\theta(z)$ *sont tous réels, positifs et plus grands que* $\frac{1}{M}$, etc.

Il serait aussi facile d'en tirer des renseignements sur la façon dont se comporte $\theta(z)$ lorsque z croît indéfiniment par des valeurs positives ou négatives, ou bien lorsque z approche de la valeur $\frac{1}{M}$, etc. C'est là, par exemple, que les méthodes de M. Le Roy trouveraient de vastes applications.

Je me borne à signaler le vaste champ de recherches qu'offrent les fonctions $F(z)$ données par l'expression analytique faisant l'objet de ce Mémoire. Une étude plus approfondie de leurs diverses particularités mériterait d'être faite ; on y rencontrera une foule de transcendantes nouvelles dont on saura étudier les propriétés et qui présenteront de l'intérêt.