

# BULLETIN DE LA S. M. F.

H. ANDOYER

## Sur la sommation des séries

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 33 (1905), p. 36-41

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1905\\_\\_33\\_\\_36\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__36_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LA SOMMATION DES SÉRIES;**

Par M. H. ANDOYER.

La méthode qui se présente naturellement pour obtenir la somme d'une série numérique consiste à calculer directement la somme d'un certain nombre de termes à partir du premier, et à fixer, quand on le peut, une limite de l'erreur ainsi commise. Malheureusement, il arrive trop souvent que cette méthode n'a aucune valeur pratique : c'est ainsi qu'en calculant exactement la somme des vingt mille premiers termes de la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

et en supposant que les calculs eux-mêmes ne donnent lieu à

aucune erreur, on obtient un résultat dont l'erreur atteint encore 0,000025 environ.

Cependant les ouvrages classiques en usage de nos jours sont muets sur les méthodes à employer pour obtenir des résultats plus satisfaisants. Il ne semblera donc peut-être pas inutile d'indiquer comment on peut procéder pour obtenir rapidement, avec une grande précision, facile d'ailleurs à évaluer, la somme de certaines séries formant une classe très étendue. Le principe de la méthode que nous allons expliquer est indiqué et longuement développé par J. Stirling (*Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*; Londres, 1730); nous n'avons fait que le présenter d'une façon générale et approprier son exposition aux habitudes actuelles.

Envisageons la série convergente de terme général  $u_n$ , l'indice  $n$  prenant successivement les valeurs  $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$ , telle que le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  soit développable suivant les puissances décroissantes de  $n$ ; c'est-à-dire que,  $q$  étant un entier positif quelconque, on peut écrire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \dots + \frac{\alpha_q}{n^q} + \frac{A_{q+1}}{n^{q+1}},$$

$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  étant des constantes, et  $A_{q+1}$  une fonction de  $n$  ayant une limite quand  $n$  devient infini.

On a d'ailleurs  $|\alpha_0| \leq 1$ ; de plus, si  $\alpha_0 = 1$ , il faut, comme on sait d'après la règle de Gauss,  $\alpha_1 < -1$ ; et si  $\alpha_0 = -1$ , le premier des coefficients  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  qui n'est pas nul est positif.

Si

$$\begin{aligned} s_n &= u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_{n-1} + u_n, \\ r_n &= u_{n+1} + u_{n+2} + \dots, \end{aligned}$$

la somme de la série est

$$S = s_n + r_n.$$

Soit  $\varepsilon_n$  une fonction de  $n$  ayant comme limite zéro pour  $n$  infini, et faisons

$$u'_n = u_n + \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n;$$

la série dont le terme général est  $u'_n$  est convergente, et si l'on

fait

$$r'_n = u'_{n+1} + u'_{n+2} + \dots,$$

on a évidemment

$$r_n = z_{n+1} + r'_n;$$

si de plus on pose

$$z_n = u_n t_n,$$

on a

$$u'_n = u_n \left( 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1} \right),$$

avec

$$r_n = u_{n+1} t_{n+1} + r'_n.$$

Le calcul de  $r_n$  est ainsi ramené à celui de  $r'_n$ ; en choisissant  $t_n$  de façon convenable, on pourra, comme nous allons le voir, obtenir une valeur approchée de  $r_n$  comprise entre des limites faciles à déterminer, et, en ajoutant à  $r_n$  la somme  $s_n$  calculée directement, on aura finalement  $S$  avec une approximation qu'on peut fixer.

Pour le choix de  $t_n$  il est nécessaire de distinguer deux cas, suivant que  $\alpha_0$  est inférieur ou égal à 1.

Supposons d'abord  $\alpha_0 < 1$ , et faisons

$$t_{n+1} = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

les  $\beta_i$  étant des constantes,  $p$  un entier positif quelconque. On aura par suite

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n-1} + \frac{\beta_2}{(n-1)^2} + \dots + \frac{\beta_{p+1}}{(n-1)^{p+1}},$$

et en développant chaque terme suivant les puissances décroissantes de  $n$ , on a

$$t_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \frac{\beta_3 + 2\beta_2 + \beta_1}{n^3} + \dots \\ + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2} \beta_{p-2} + \dots}{n^p} + \frac{\beta_{p+1}}{n^{p+1}},$$

la loi des numérateurs étant évidente, et  $B_{p+1}$  étant une fonction de  $n$  ayant une limite pour  $n$  infini.

Si maintenant nous nous servons de la valeur de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en y

faisant  $q = p$ , on voit que l'expression .

$$T = 1 - t_n + \frac{u_{n+1}}{u_n} t_{n+1}$$

se développe elle-même sous la forme

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{n} + \frac{\gamma_2}{n^2} + \dots + \frac{\gamma_p}{n^p} + \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$  étant des constantes, et  $C_{p+1}$  une fonction de  $n$  ayant une limite pour  $n$  infini. On voit alors que, à cause de  $1 - \alpha_0 \neq 0$ , on peut choisir  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  de façon à annuler  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_p$ , et de plus  $\beta_{p+1}$  de façon que la limite de  $C_{p+1}$  ait une valeur donnée à l'avance quelconque.

Si l'on a  $\alpha_0 = 1$ , le calcul précédent est impossible; mais on arrive au même résultat en faisant

$$t_{n+1} = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p}{n^p},$$

d'où

$$t_n = \beta n + (\beta_0 - \beta) + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2 + \beta_1}{n^2} + \dots + \frac{\beta_p + (p-1)\beta_{p-1} + \dots}{n^p} + \frac{B_{p+1}}{n^{p+1}},$$

comme plus haut; en se servant de la valeur de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ , où l'on fait  $q = p + 1$ , on peut encore déterminer  $\beta, \beta_0, \dots, \beta_{p-1}, \beta_p$  de façon que  $T$  ait la forme  $\frac{C_{p+1}}{n^{p+1}}$ ,  $C_{p+1}$  ayant une limite arbitraire.

Ainsi, dans tous les cas

$$\frac{u'_n}{u_n} = \frac{C_{p+1}}{n^{p+1}},$$

$C_{p+1}$  ayant une limite quelconque; or, on peut prendre  $n$  assez grand pour que la somme  $r'_n$  ait le signe de son premier terme  $u'_{n+1}$ ; en supposant donc la limite de  $C_{p+1}$  successivement positive et négative, on aura deux valeurs de  $r_n$ , fournies par l'expression  $u_{n+1} t_{n+1}$ , approchées en sens contraire, et d'autant moins différentes que  $p$  sera plus grand. Il en sera de même pour la somme  $S$  de la série proposée.

Les exemples suivants feront bien comprendre l'esprit de la méthode et son application.

1° Soit

$$u_n = \frac{(-1)^{n-n_0} C}{n-1},$$

C étant une constante.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -1 + \frac{1}{n},$$

et l'on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4n} - \frac{1}{8n^3} + \frac{\beta_3}{n^5},$$

on a

$$C_3 = -\beta_3 \left[ 1 + \left( \frac{n}{n-1} \right)^5 - \frac{1}{n} \right] + \frac{n(2n-1)^2}{8(n-1)^3}.$$

Pour  $\beta_3 = 0$ , la limite de  $C_3$  est positive; pour  $\beta_3 = \frac{1}{2}$ , elle est négative, en donnant donc successivement ces deux valeurs à  $\beta_3$  dans  $t_{n+1}$ , la valeur de  $r_n$  sera comprise entre les deux valeurs obtenues pour  $u_{n+1} t_{n+1}$ . Faisons par exemple  $C = 1$ ,  $n_0 = 2$ ,  $n = 10$ , de sorte que la série à sommer est

$$\log \text{nép} 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

On a directement

$$s_n = 0,745634920 \dots,$$

et  $r_n$  est compris entre  $-0,0524875$  et  $-0,0524880$ ; donc S est compris entre

$$0,69314742 \dots \text{ et } 0,69314692 \dots$$

De même en faisant

$$C = 2, \quad n_0 = \frac{3}{2}, \quad n = \frac{19}{2},$$

de sorte que la série à sommer est

$$\pi = 4 \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right),$$

on a directement

$$s_n = 3,25236593 \dots,$$

et  $r_n$  est compris entre  $-0,11077263 \dots$  et  $-0,11077399$ ; donc

S est compris entre

$$3,14159330\dots \text{ et } 3,14159194\dots$$

2° Soit

$$u_n = \frac{1}{(n-1)^2},$$

de sorte que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2};$$

on trouve qu'en faisant

$$t_{n+1} = n + \frac{1}{2} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{30n^3} + \frac{\beta_5}{n^5},$$

on a

$$C_6 = \frac{5n^5 - 5n^3}{30(n-1)^3} - \beta_5 \left[ \frac{n^6}{(n-1)^5} - n + 2 - \frac{1}{n} \right].$$

Pour  $\beta_5 = 0$ , la limite de  $C_6$  est positive; pour  $\beta_5 = \frac{1}{10}$ , elle est négative.

Faisant  $n_0 = 2$ ,  $n = 10$ , de sorte que la série à sommer est

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots;$$

on a directement

$$s_n = 1,539767731\dots,$$

et  $r_n$  est compris entre

$$0,105166333\dots \text{ et } 0,105166343\dots;$$

donc S est compris entre

$$1,644934064\dots \text{ et } 1,644934074\dots$$

Pratiquement, on se dispense de calculer la quantité  $C_{p+1}$ , et l'allure du développement de  $t_{n+1}$  permet de se rendre compte d'une façon suffisante de l'approximation obtenue en arrêtant ce développement à un certain rang.

---