BULLETIN DE LA S. M. F.

E. COTTON

Généralisation de la théorie du trièdre mobile

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 42-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__42_0>

GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DU TRIÈDRE MOBILE;

Par M. ÉMILE COTTON.

La première Partie de ce travail concerne les mouvements à plusieurs paramètres de l'espace ordinaire. Je montre comment on passe des formules habituelles définissant les éléments géométriques attachés aux trajectoires aux formules analogues relatives au trièdre mobile : on substitue aux dérivées des coordonnées ordinaires certaines fonctions des paramètres du mouvement; ces fonctions se déterminent de proche en proche par une méthode simple.

Dans la suite, j'attribue au mot *mouvement* un sens plus étendu encore. J'appelle, par exemple, *mouvement d'ensemble* à p paramètres $u_1, \ldots, u_p$ d'un espace $E(x_1, \ldots, x_n)$ par rapport à un espace fixe $E'(x'_1, \ldots, x'_n)$ une correspondance entre les $2n+p$ variables x, x' et u, obtenue en remplaçant dans les équations

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

d'un groupe fini continu et transitif G, les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ par des fonctions des variables $u_1, \ldots, u_p$.

Au lieu de supposer le mouvement d'ensemble explicitement donné, on peut le considérer comme déterminé par l'un de ces systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales dont j'ai fait antérieurement l'étude ([1]). On parvient alors (IIe Partie) à un principe de passage analogue à celui du début, tant par sa forme que par ses conséquences.

Dans la IIIe Partie, je montre que la notion d'élément réduit ([2]) relatif à une multiplicité de l'espace E' et au groupe G, permet d'attacher à toute multiplicité à p dimensions, un mouvement d'ensemble à p paramètres dont l'étude peut être substituée à celle de la multiplicité.

Cette notion de mouvement auxiliaire permet de présenter sous

---

([1]) *Comptes rendus*, 6 janvier 1902. *Annales de l'Université de Grenoble*, t. XVI, p. 367. Les renvois à ce dernier travail sont indiqués, dans la suite, par les mots *Systèmes* (L).

([2]) TRESSE, *Acta mathematica*, t. XVIII.

une forme intuitive un résultat donné par M. Vessiot dans l'un de ses beaux Mémoires (1) sur l'application de la théorie des groupes aux systèmes différentiels; il s'agit de la décomposition d'un système différentiel admettant un groupe en un système résolvant et un système automorphe.

Il n'est question ici que de groupes finis; mais ce cas particulier est important en Géométrie. J'espère que le présent travail facilitera l'utilisation des groupes (autres que celui des mouvements) qui se présentent naturellement dans des questions classiques; tel est, par exemple, le groupe de la représentation conforme.

J'indique rapidement, en terminant, de quelle façon on pourrait en tirer parti dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

I. — Sur la théorie du trièdre mobile.

1. Nous dirons qu'un point M est animé par rapport à un trièdre $T'(O'x'y'z')$ d'un *mouvement à deux paramètres* (2) u, v, lorsque les coordonnées x', y', z' de M sont fonctions des deux variables u, v.

Nous appellerons *vitesse* de M relativement à u, le vecteur $\overline{MM'_u}$ dont les projections sont $\frac{\partial x'}{\partial u}$, $\frac{\partial y'}{\partial u}$, $\frac{\partial z'}{\partial u}$; et définirons de même la vitesse $\overline{MM'_v}$ relative à v.

Par le point fixe O', menons le vecteur $\overline{O'V_u}$ équipollent à $\overline{MM'_u}$; et par M menons des vecteurs $\overline{MM''_{u^2}}$, $\overline{MM''_{uv}}$ équipollents respectivement aux vitesses de V_u relativement à u et v. Nous dirons que ces vecteurs $\overline{MM''_{u^2}}$ ou J_{u^2} et $\overline{MM''_{uv}}$ ou J_{uv} sont les accélérations relatives à u^2 et à uv. On définit d'une façon analogue les accélérations J_{vu} et J_{v^2} relatives à vu et à v^2; d'ailleurs J_{uv} et J_{vu} sont identiques.

(1) Vessiot, *Annales de l'École Normale*, 1903 et 1904; *Acta mathematica*, t. XXVIII. Ce dernier Mémoire est le plus important pour le sujet qui nous occupe.

(2) Nous distinguons le *mouvement* d'un point du *déplacement* de ce point. Dans le déplacement on ne s'occupe que de l'ensemble des positions occupées par le point variable; dans le mouvement on tient compte de la relation entre ces positions et les valeurs de certains paramètres. Si l'on remplace u, v par des fonctions de u', v', les nouvelles expressions de $x'y'z'$ définissent le même déplacement que les anciennes, et un nouveau mouvement.

Des accélérations du premier ordre, que l'on vient de définir, on passe à celles du second ordre J_{u^3}, J_{u^2v}, J_{uv^2}, J_{v^3}, puis à celles du troisième, du quatrième, ..., du $n^{\text{ième}}$ ordre par le même procédé qui permet de définir les accélérations du premier ordre en partant des vitesses. Les accélérations d'ordre n sont des vecteurs, ayant M pour origine, dont les projections sur $O'x'$ sont les dérivées d'ordre $n+1$ de x', et de même pour $O'y'$ et $O'z'$.

2. Imaginons maintenant que le mouvement absolu [1] de M soit déterminé par l'expression, en fonction des variables u, v, des coordonnées x, y, z de M relativement à un trièdre mobile $Oxyz$ ou T, le mouvement de T par rapport à T' étant donné par un système (L) d'équations linéaires aux différentielles totales, complètement intégrable.

Nous allons calculer les projections des vitesses et des accélérations sur les axes du nouveau trièdre.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} dx+\xi\,du+\xi_1\,dv+(q\,du+q_1\,dv)z-(r\,du+r_1\,dv)y=0,\\ dy+\eta\,du+\eta_1\,dv+(r\,du+r_1\,dv)x-(p\,du+p_1\,dv)z=0,\\ dz+\zeta\,du+\zeta_1\,dv+(p\,du+p_1\,dv)y-(q\,du+q_1\,dv)x=0,\end{cases}$$

le système (L) considéré [2].

D'après la façon même dont on obtient (1), on peut écrire les projections des vitesses

$$\begin{cases} \overline{MM'_u}\quad x_{10}=\dfrac{\partial x}{\partial u}+\xi+qz-ry, & y_{10}=\dfrac{\partial y}{\partial u}+\eta+rx-pz, & z_{10}=\dfrac{\partial z}{\partial u}+\zeta+py-qx,\\ \overline{MM'_v}\quad x_{01}=\dfrac{\partial x}{\partial u}+\xi_1+q_1z-r_1y, & y_{01}=\dfrac{\partial y}{\partial v}+\eta_1+r_1x-p_1z, & z_{01}=\dfrac{\partial z}{\partial v}+\zeta_1+p_1y-q_1x.\end{cases}$$

Nous désignerons, d'une façon générale, par $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$ les projections sur les axes de T de l'accélération d'ordre $\alpha+\beta-1$ relative à u^α et v^β. On obtient ces projections en reprenant le rai-

---

(1) Les mots *mouvement absolu*, *mouvement relatif*, *mouvement d'entraînement* seront employés avec un sens analogue à celui qu'ils ont en Cinématique.

(2) Tout système d'intégrales de (1) détermine les coordonnées (relatives à T) d'un point fixé à T'. *Voir* DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, Chap. VII, et KŒNIGS, *Cinématique*, Chap. X.

sonnement classique (1) qui conduit, en Cinématique, aux formules de Bour et à leur généralisation.

On a ainsi les formules de récurrence

$$(3)\qquad \begin{cases} x_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial u} + q z_{\alpha\beta} - r y_{\alpha\beta}, \\[2ex] y_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial u} + r x_{\alpha\beta} - p z_{\alpha\beta}, \\[2ex] z_{\alpha+1,\beta} = \dfrac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial u} + p y_{\alpha\beta} - q x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} x_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial x_{\alpha\beta}}{\partial v} + q_1 z_{\alpha\beta} - r_1 y_{\alpha\beta}, \\[2ex] y_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial y_{\alpha\beta}}{\partial v} + r_1 x_{\alpha\beta} - p_1 z_{\alpha\beta}, \\[2ex] z_{\alpha,\beta+1} = \dfrac{\partial z_{\alpha\beta}}{\partial v} + p_1 y_{\alpha\beta} - q_1 x_{\alpha\beta}, \end{cases}$$

applicables aussi aux accélérations du premier ordre (2). Ces formules ne dépendent que des fonctions x, y, z et des $p, p_1, \ldots, \zeta, \zeta_1$, celles-ci satisfaisant aux conditions d'intégrabilité connues.

3. L'emploi des formules précédentes repose sur une remarque bien simple :

Choisissons pour le trièdre fixe $T'(O'x'y'z')$, *resté jusqu'ici arbitraire, la position occupée par le trièdre mobile* T *pour les valeurs numériques* u^0, v^0 *de* u *et* v. *Les valeurs pour* u^0, v^0 *des coordonnées* x', y', z' *de leurs dérivées d'ordre* 1, 2, ..., n *sont égales aux expressions obtenues en remplaçant* u *par* u^0, v *par* v^0 *dans les fonctions correspondantes* $x, y, z, x_{10}, \ldots z_{0n}$.

La remarque antérieure nous donne immédiatement la représentation, par des séries entières, du mouvement absolu de M au voisinage des valeurs u^0 et v^0 de u et v. En développant en série de Taylor les coordonnées x, y, z de M, dont la signification vient

(1) KOENIGS, *Cinématique*, p. 130 et 149.

(2) Les diverses expressions que l'on peut obtenir pour les projections d'une même accélération sont identiques en vertu des conditions d'intégrabilité.

d'être précisée, on a [1]

$$(5)\quad \begin{cases} x' = x^0 + x^0_{10}(u-u_0) + x^0_{01}(v-v_0) + \frac{1}{2}x^0_{20}(u-u_0)^2 \\ \qquad + \frac{1}{2}x^0_{11}(u-u_0)(v-v_0) + \frac{1}{2}x^0_{02}(v-v_0)^2 + \ldots, \\ y' = y^0 + \ldots, \qquad z' = z^0 + \ldots. \end{cases}$$

Nous désignons par f^0 la valeur d'une fonction f de u et v pour les valeurs numériques u^0, v^0 de ces variables.

4. *Considérons un système* S' *de relations de la forme* [2]

$$\mathfrak{F}\left(x', y', z', \frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^n z'}{\partial v^n}\right) = 0$$

définissant, relativement au trièdre fixe T', *des éléments géométriques remarquables attachés à la surface trajectoire absolue de* M. Ces éléments sont soit des grandeurs (courbure moyenne, courbure totale, ...), soit des surfaces ou lignes remarquables (plan tangent, tangentes asymptotiques, ...).

Le système S' est donné par la Géométrie différentielle ordinaire, *le système* S *donnant les mêmes éléments rapportés au trièdre mobile s'en déduit en remplaçant* x', y', z' *par* x, y, z, *et les dérivées* $\frac{\partial^{\alpha+\beta} x'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$, $\frac{\partial^{\alpha+\beta} y'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$, $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z'}{\partial u^\alpha \partial v^\beta}$ *par* $x_{\alpha\beta}$, $y_{\alpha\beta}$, $z_{\alpha\beta}$.

Par exemple, pour l'origine O du trièdre mobile, on a

$$(6)\quad \begin{cases} x = 0, \qquad x_{10} = \xi, \qquad x_{01} = \xi_1, \qquad x_{20} = \dfrac{\partial \xi}{\partial u} + q\zeta - r\eta, \\ x_{11} = \dfrac{\partial \xi}{\partial v} + q_1\zeta - r_1\eta = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} + q\zeta_1 - r\eta_1, \qquad x_{02} = \dfrac{\partial \xi_1}{\partial v} + q_1\zeta_1 - r_1\eta_1, \end{cases}$$

et des formules analogues pour y et z.

5. Des formules habituelles relatives aux coordonnées curvilignes on déduit : l'équation (relative à T) du plan tangent à la trajectoire d'entraînement de O

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \xi & \eta & \zeta \\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \end{vmatrix} = 0;$$

[1] *Cf.* Kœnigs, *Cinématique*, p. 154-156.

[2] Nous supprimons l'indice *zéro* devenu inutile.

l'équation différentielle des lignes asymptotiques, qui s'obtient en remplaçant, dans la précédente, X par

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}+q\zeta-r\eta\right)du^2$$
$$+\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}+q_1\zeta-r_1\eta+\frac{\partial\xi_1}{\partial u}+q\zeta_1-r\eta_1\right)du\,dv+\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial v}+q_1\zeta_1-r_1\eta_1\right)dv^2,$$

Y et Z par des expressions analogues. On retrouvera facilement ainsi des résultats connus (¹).

Il serait aisé de multiplier les exemples et les applications; d'étudier, par exemple, la distribution des éléments remarquables relatifs aux surfaces trajectoires des différents points M liés au trièdre mobile (²).

II. — Extension de la théorie précédente.

6. Nous utiliserons désormais quelques locutions que nous allons tout d'abord expliquer.

Un point d'un *espace* E′ à n dimensions sera déterminé par ses coordonnées, c'est-à-dire par un système de valeurs attribuées à n variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$.

Supposons $x'_1, x'_1, \ldots, x'_n$ fonctions de p variables $u_1, \ldots, u_p$. Nous dirons que ces fonctions définissent un *mouvement à p paramètres* d'un point M par rapport à E′. L'ensemble des points de E′ avec lesquels M vient coïncider est la *multiplicité trajectoire* de ce point.

Soient

$$(7)\qquad x_i=f(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n;\, a_1, \ldots, a_r)\qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

les équations d'un groupe fini et continu G à r paramètres. Nous considérerons souvent une transformation du groupe comme définissant un *changement de coordonnées* (relatif à G) dans l'espace E′.

Résolvons les formules (7) par rapport aux x' et dans les équa-

(¹) Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. II, p. 382.

(²) La *Géométrie cinématique* de M. Mannheim contient un grand nombre de problèmes de cette nature.

tions

$$x'_i = F_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

ainsi obtenues, substituons aux a des fonctions de p variables u_1, $u_2, \ldots, u_p$,

$$a_h = g_h(u_1, \ldots, u_p) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \tag{9}$$

Les x étant regardés comme définissant les points d'un espace E, les formules exprimant les x' en fonction des x et des u définiront un *mouvement d'ensemble de l'espace* E *par rapport à l'espace* E', *relatif à* G, ce mouvement étant à p paramètres.

A chaque point M de E correspond un *mouvement d'entraînement* (par rapport à E').

Le mouvement d'ensemble peut être aussi bien défini par les formules (7) et (9); mais en considérant toujours les x' comme déterminés en fonction des x et des u.

Regardons aussi les x comme des fonctions données des paramètres u; en d'autres termes, définissons un mouvement à p paramètres d'un point par rapport à E. Nous l'appellerons le mouvement *relatif* et désignerons par mouvement *absolu* celui qui correspond à la superposition du mouvement relatif et du mouvement d'ensemble de E par rapport à E'. Le mouvement absolu se traduit analytiquement par les formules (8) où l'on remplace les x et les a par les fonctions correspondantes des variables u.

7. Au lieu de supposer les fonctions (9) connues, regardons-les comme déterminées par un système d'équations linéaires aux différentielles totales de la forme

$$da_h = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jh}(a)\, l_j(du) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r). \tag{10}$$

Dans ces équations, les expressions $\alpha_{jh}(a)$ sont les coefficients des dérivées $\frac{\partial F}{\partial a_h}$ dans les transformations infinitésimales

$$A_j F = \sum_{h=1}^{r} \alpha_{jh}(a) \frac{\partial F}{\partial a_h} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r), \tag{11}$$

du premier groupe des paramètres de G. Les symboles $l_j(du)$ désignent des expressions de Pfaff

$$(12) \qquad l_j(du) = \sum_{k=1}^{r} l_{jk}(u_1, \ldots, u_p)\, du_k \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

construites avec les variables u et leurs différentielles, et choisies de façon que (10) soit complètement intégrable [1].

A un même système (10) correspond une infinité de systèmes de fonctions a. Connaissant l'un d'eux, représenté par les équations (9), on obtient le système le plus général

$$(13) \quad a'_k = \gamma_k(u_1, u_2, \ldots, u_p;\ c_1, c_2, \ldots, c_r) \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

dépendant de r arbitraires c, en remplaçant les a par leurs expressions (9) dans les équations finies

$$(14) \qquad a'_k = \varphi_k(c_1, \ldots, c_r;\ a_1, \ldots, a_r)$$

du premier groupe des paramètres [2].

Il semble donc qu'un système (10) définit une infinité de mouvements de E par rapport à E'. Mais *on peut regarder ces mouvements comme identiques,* la différence entre leur représentation analytique tenant au choix des coordonnées auxquelles on rapporte E'.

On peut, en effet, obtenir les transformations relatives aux a'

$$(15) \qquad x_i = f_i(x', a'),$$

en effectuant d'abord la transformation

$$(16) \qquad x''_i = f_i(x', c),$$

puis les suivantes

$$(17) \qquad x_i = f_i(x'', a).$$

Mais on peut regarder (16) comme définissant un changement de coordonnées (relatif à G) dans l'espace E'; ce qui établit la proposition.

---

(1) *Systèmes* (L), nos 4-5.
(2) *Ibid.*, no 11.

8. Nous supposerons que l'on donne : 1° le système (10) déterminant le mouvement d'ensemble de E par rapport à E'; 2° les fonctions x des paramètres u définissant le mouvement relatif d'un point (par rapport à E); et nous chercherons à *déterminer le mouvement absolu au voisinage d'un système donné* $u_1^0, \ldots, u_p^0$ *de valeurs des paramètres* $u_1, u_2, \ldots, u_p$. Nous préciserons d'abord ces derniers mots.

Soient $a_1^0, \ldots, a_r^0$, r nombres choisis arbitrairement. Il existe un système de solutions de (10) et un seul tel que les valeurs initiales des a (valeurs pour $u = u^0$) soient précisément les constantes a^0 données. Au système ainsi défini de solutions de (10) et aux fonctions données x correspondent des fonctions x' bien déterminées des variables u. On se propose de développer ces dernières fonctions en séries entières ([1]) par rapport aux différences $u_1 - u_1^0, \ldots, u_p - u_p^0$.

Les coefficients de ces séries sont, à des facteurs numériques près, les valeurs pour $u = u^0$ des x' et de leurs dérivées.

Les termes constants des développements s'obtiennent sans difficulté si l'on connaît les équations finies (7) du groupe G.

D'ailleurs, en choisissant, comme nous le ferons plus loin, pour constantes a^0 les valeurs des paramètres correspondant à la substitution identique, nous pourrons nous dispenser de chercher les équations finies de G.

9. Pour calculer les termes du premier ordre, rappelons que les seconds membres des équations (8) satisfont au système complet ([2])

$$X_j F + A_j F = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{18}$$

où les $A_j F$ sont les transformations infinitésimales (11) du premier groupe des paramètres de G, et où les expressions

$$X_j F = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ji}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{19}$$

sont les transformations infinitésimales du groupe G.

([1]) Nous nous dispenserons d'énoncer les conditions restrictives qui assureraient la possibilité de ces développements.

([2]) LIE-ENGEL, *Transformationsgruppen*, t. I, p. 149.

Une fonction des x' devient par la substitution (8) une fonction des x et des a :

$$\Phi'(x'_1, \ldots, x'_n) = \Phi(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r), \tag{20}$$

la fonction Φ est une intégrale du système (18). En différentiant l'identité (20), il vient

$$d\Phi'(x') = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} da_h. \tag{21}$$

Remplaçons dans cette identité les a par le système de solutions de (10) considéré au n° 8, on a

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{h=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial a_h} \sum_{j=1}^{r} \alpha_{jh}(a)\, l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i + \sum_{j=1}^{r} \mathrm{A}_j \Phi\, l_j(du), \end{aligned}$$

et, puisque Φ est solution de (18),

$$\begin{aligned} d\Phi' &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dx_i - \sum_{j=1}^{r} \mathrm{X}_j \Phi\, l_j(du) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[dx_i - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du) \right]. \end{aligned}$$

Considérons maintenant les x comme des fonctions données des paramètres u, Φ' devient une fonction Ψ de ces paramètres, et l'on a

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial x_i}{\partial u_k} - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_{jk}(u) \right]. \tag{22}$$

10. Supposons d'abord que les valeurs initiales a^0 des a correspondent à la substitution identique de (7). Nous désignerons par $y_1, \ldots y_n$ les fonctions $x'_1, \ldots, x'_n$ que l'on détermine par ce choix particulier des constantes a^0.

Lorsque les a prennent ces valeurs a^0, $\Phi(x; a)$ et ses dérivées

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}$$

deviennent respectivement $\Phi'(x_1, \ldots, x_n)$ et

$$\frac{\partial \Phi'(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \Phi'(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_n}.$$

Dans la formule (22) faisons $\Phi' = \Psi = y_i$, et donnons aux u les valeurs u^0; il vient

$$(23) \quad \left(\frac{\partial y_i}{\partial u_k}\right)^0 = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_k}\right)^0 - \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x^0)\, l_{jk}(u^0) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (i = 1, 2, \ldots, n), \\ (k = 1, 2, \ldots, p), \end{array} \right.$$

les nouveaux indices rappelant que l'égalité a lieu pour les valeurs u^0 des paramètres u.

11. Substituons maintenant à $a_1, \ldots, a_r$ d'autres solutions $a'_1, \ldots, a'_r$ de (10), prenant pour $u = u^0$ des valeurs initiales quelconques $a'^0_1, \ldots, a'^0_r$. Soient x' les fonctions définies par

$$x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ a'_1, \ldots, a'_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les x' et les y définissent un même mouvement dans l'espace E', rapporté à deux systèmes distincts de coordonnées. Le changement de coordonnées est, comme on le voit facilement,

$$(24) \qquad y_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ a'^0_1, \ldots, a'^0_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les a'^0 sont des constantes; on passera donc des dérivées $\frac{\partial y_i}{\partial u_k}$ aux dérivées $\frac{\partial x'_i}{\partial u_k}$ en résolvant, par rapport aux dernières, les formules obtenues en prolongeant une fois le groupe (24). Ce prolongement se fait en regardant les x' comme fonctions des p variables non transformées $u_1, \ldots, u_p$.

Remplaçant alors $u_1, \ldots, u_p$ par $u^0_1, \ldots, u^0_p$ dans les formules obtenues, on a les coefficients des termes du premier ordre des développements cherchés (n° 8).

Nous pouvons énoncer ce résultat d'une autre façon, en observant que les valeurs u^0 sont quelconques.

Appelons *fonctions adjointes d'ordre zéro* les fonctions données $x_1, \ldots, x_n$ des variables u; *fonctions adjointes* *du premier ordre* celles que définissent les formules

$$
(25) \quad \begin{cases} x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_k} - \displaystyle\sum_{j=1}^{r} \xi_{ij}(x)\, l_{jk}(u), \\ \alpha_i = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq k, \quad \alpha_k = 1, \quad [(i = 1, 2, \ldots, n) \quad (k = 1, 2, \ldots, p)]. \end{cases}
$$

Considérons les fonctions x' définies par les équations (7) où l'on a remplacé les x par les fonctions d'ordre *zéro*, les a par un système *quelconque* de solutions de (10). Les valeurs des x' et de leurs dérivées premières s'obtiennent en prolongeant une fois le groupe (7) (à l'aide des variables u non transformées par ce groupe), remplaçant les x et leurs dérivées premières par les fonctions adjointes correspondantes, les a par le système considéré de solutions de (10), et résolvant les formules par rapport aux x' et à leurs dérivées.

12. Cet énoncé met bien en évidence le fait que le *calcul des x' et de leurs dérivées premières est entièrement analogue au calcul des x' seuls.*

C'est le groupe G_{1p} obtenu en prolongeant une fois G qui remplace ce dernier groupe; ce sont les $n + np$ fonctions adjointes d'ordre *zéro* et *un* qui remplacent les n fonctions adjointes d'ordre *zéro*.

D'une façon générale, soit G_{Np} le groupe obtenu en prolongeant G jusqu'à un ordre quelconque N (en regardant les x' comme fonctions de p variables non transformées). Les deux groupes G et G_{Np} ont même structure et même groupe des paramètres; et, dans les deux groupes, les mêmes valeurs des paramètres donnent la transformation identique.

Il résulte de là que *le calcul des dérivées secondes des x'* se fait par *un procédé analogue au précédent :* On définira d'abord des *fonctions adjointes du second ordre* en opérant sur les fonctions adjointes d'ordre *zéro* et *un* et sur G_{1p} comme on a opéré sur les fonctions adjointes d'ordre *zéro* et sur G pour obtenir les adjointes du premier ordre.

On désignera ces fonctions du second ordre par la notation $x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$, les indices α étant positifs ou nuls et leur somme étant égale à 2. Ces fonctions correspondent aux dérivées secondes

des x ; par exemple si α_k et α_h sont égaux à 1, les autres α étant nuls, $x_{i;\alpha_1,\ldots,\alpha_p}$ et $\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_k \partial u_h}$ se correspondent.

Au sujet du calcul de ces fonctions, il est bon d'observer que celles d'entre elles qui ont deux indices α non nuls peuvent s'obtenir de deux façons différentes. En tenant compte des conditions d'intégrabilité on pourrait vérifier l'identité des résultats obtenus, mais cette identité est manifeste quand on se reporte à l'interprétation, donnée plus loin, des valeurs numériques des fonctions adjointes.

On définit ensuite des fonctions adjointes d'ordre *trois,* et l'on parvient ainsi de proche en proche à des fonctions adjointes d'ordre quelconque.

On observe que *le calcul des fonctions adjointes utilise seulement les transformations infinitésimales de* G[1] *et les expressions correspondantes* $l_j(du)$ *satisfaisant aux conditions d'intégrabilité* [2].

13. La solution du problème du n° 8 peut être présentée de la façon suivante :

Les coordonnées auxquelles on rapporte l'espace fixe E' *étant convenablement choisies, le mouvement absolu, au voisinage d'un système quelconque de valeurs* u^0 *des paramètres* u *est défini par les valeurs correspondantes des fonctions adjointes des différents ordres.*

Le choix particulier de coordonnées dont il est question ici est tel que, pour les valeurs u^0, les valeurs des x' soient égales à celles des x de même indice. Dès lors *les valeurs numériques des dérivées des* x' *sont égales à celles des fonctions adjointes correspondantes.*

Les fonctions adjointes d'ordres 1, 2, 3, ..., n *sont évidem-*

---

(1) Celles des groupes G_{Np} s'en déduisent aisément. *Voir* dans les *Annales de l'École Normale* (1903) le Mémoire cité de M. Vessiot (n° 4).

(2) Ces conditions peuvent être écrites quand on connaît les transformations infinitésimales de G ; elles ne dépendent, en effet, que des constantes de structure. *Systèmes* (L), n° 4 et 5.

ment analogues aux projections des vitesses et des accélérations d'ordre 1, 2, ..., $n-1$ *sur les axes du trièdre mobile.* Il eût été facile de présenter le calcul de ces dernières de façon à accentuer encore cette analogie.

Le système (10) ne joue évidemment, dans tout ce qui précède, qu'un rôle secondaire; le mouvement d'entraînement est en réalité défini par les expressions $l_j(du)$. On peut d'ailleurs substituer au système (10) le système équivalent (¹)

$$dx_i = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du). \tag{26}$$

Avec le langage que nous avons adopté, on voit que le système (26) détermine les coordonnées, relatives à E, d'un point fixe par rapport à E′. Cela résulte des formules (25).

14. Le résultat énoncé dans le numéro précédent donne évidemment un *principe de passage* permettant de déterminer les éléments géométriques remarquables des trajectoires absolues en rapportant ces éléments à l'espace mobile E; il suffit de remplacer les x' et leurs dérivées par les fonctions adjointes correspondantes dans les formules (supposées connues) qui détermineraient ces éléments remarquables si le mouvement absolu était explicitement donné.

Ce qui précède permettrait d'énoncer, pour des groupes finis quelconques, des propositions analogues à celles que l'on rencontre dans les applications de la Cinématique à la Géométrie. Les plus intéressantes de ces applications, celles qui concernent l'étude des courbes et des surfaces au moyen d'un trièdre mobile, seront généralisées, du moins en partie, dans la suite. Nous n'aurons alors à considérer que le cas du repos relatif (les adjointes d'ordre *zéro* seront des constantes); toutefois les considérations précédentes auraient été compliquées par l'introduction immédiate de cette hypothèse restrictive.

15. Nous allons calculer rapidement, à titre d'exemple, les fonc-

(¹) *Systèmes* (I), n° 11.

tions adjointes d'ordre *un* et *deux* pour le groupe (¹)

$$(27)\quad \begin{cases} X_1 f = \dfrac{\partial f}{\partial x} + x\mathrm{U}, & X_2 f = \dfrac{\partial f}{\partial y} + y\mathrm{U}, \quad X_3 f = \dfrac{\partial f}{\partial z} + z\mathrm{U}, \\ X_4 f = z\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial z}, & X_5 f = x\dfrac{\partial f}{\partial z} - z\dfrac{\partial f}{\partial x}, \quad X_6 f = y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\ \mathrm{U} = x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + z\dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

des transformations projectives laissant invariable la quadrique $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$, et pour les expressions

$$(28)\quad \begin{cases} l_1(du) = -(\xi\, du + \xi_1\, dv), & l_2(du) = -(\eta\, du + \eta_1\, dv), & l_3(du) = -(\zeta\, du + \zeta_1\, dv), \\ l_4(du) = p\, du + p_1\, dv, & l_5(du) = q\, du + q_1\, dv, & l_6(du) = r\, du + r_1\, dv; \end{cases}$$

nous supposerons x, y, z constants.

La structure du groupe (27) est donnée par les identités

$$(X_2X_3) = X_4, \quad (X_1X_4) = 0, \quad (X_1X_5) = X_3, \quad (X_1X_6) = -X_2, \quad (X_5X_6) = X_4,$$

et celles que l'on en déduit par les permutations circulaires des indices 1, 2, 3 d'une part, 4, 5, 6 d'autre part.

Pour que les expressions (28) définissent un mouvement d'ensemble à deux paramètres, il faut que les coefficients des expressions (28) satisfassent aux identités

$$(29)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} = \eta r_1 - \eta_1 r + \zeta_1 q - \zeta q_1, & \dfrac{\partial p}{\partial v} - \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = \eta\zeta_1 - \eta_1\zeta + q r_1 - q_1 r, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = \zeta p_1 - \zeta_1 p + \xi_1 r - \xi r_1, & \dfrac{\partial q}{\partial v} - \dfrac{\partial q_1}{\partial u} = \zeta\xi_1 - \zeta_1\xi + r p_1 - r_1 p, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial v} - \dfrac{\partial \zeta_1}{\partial u} = \xi q_1 - \xi_1 q + \eta_1 p - \eta p_1, & \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = \xi\eta_1 - \xi_1\eta + p q_1 - p_1 q. \end{cases}$$

Les formules (25) donnent, pour les fonctions adjointes du premier ordre,

$$(30)\quad \begin{cases} x_{10} = \dfrac{\partial x}{\partial u} + (1 + x^2)\xi + xy\eta + xz\zeta + qz - ry, \\ x_{01} = \dfrac{\partial x}{\partial v} + (1 + x^2)\xi_1 + xy\eta_1 + xz\zeta_1 + q_1 z - r_1 y, \end{cases}$$

et des formules analogues pour y_{10}, y_{01}, z_{10}, z_{01}.

(¹) Lie-Engel, *Transformationsgruppen*, t. III, p. 410. Ce groupe est celui des mouvements cayleyens, la quadrique étant prise pour absolu.

Voir (pour les nᵒˢ 15 et 22) une Note de M. Demoulin, *Sur l'emploi d'un tétraèdre mobile en Géométrie Cayleyenne* (*Comptes rendus*, t. CXXXIX, 8 août 1904).

Pour obtenir les fonctions adjointes du second ordre, nous utiliserons les transformations infinitésimales du groupe prolongé

$$\begin{aligned} X_1^{(1)}f = X_1 f &+ x_{10}\left(x\frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y\frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z\frac{\partial f}{\partial z_{10}}\right) + x\left(x_{10}\frac{\partial f}{\partial x_{10}} + y_{10}\frac{\partial f}{\partial y_{10}} + z_{10}\frac{\partial f}{\partial z_{10}}\right) \\ &+ x_{01}\left(x\frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y\frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z\frac{\partial f}{\partial z_{01}}\right) + x\left(x_{01}\frac{\partial f}{\partial x_{01}} + y_{01}\frac{\partial f}{\partial y_{01}} + z_{01}\frac{\partial f}{\partial z_{01}}\right), \end{aligned}$$

$$X_2^{(1)}f = \ldots, \qquad X_3^{(1)}f = \ldots,$$

$$X_4^{(1)}f = X_4 f + z_{10}\frac{\partial f}{\partial y_{10}} - y_{10}\frac{\partial f}{\partial z_{10}} + z_{01}\frac{\partial f}{\partial y_{01}} - y_{01}\frac{\partial f}{\partial z_{01}},$$

$$X_5^{(1)}f = \ldots, \qquad X_6^{(1)}f = \ldots.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} x_{20} = \frac{\partial x_{10}}{\partial u} &+ (x_{10}x + x x_{10})\xi + (y_{10}x + y x_{10})\eta \\ &+ (z_{10}x + z x_{10})\zeta + q z_{10} - r y_{10} \end{aligned} \tag{31}$$

et des formules analogues pour $x_{11}, x_{02}, y_{20}, \ldots, z_{02}$.

Les formules (30) et (31) donnent pour l'origine du trièdre mobile ($x = y = z = 0$) les mêmes résultats que les formules (6). Cela tient à ce que les transformations infinitésimales (27) ne diffèrent de celles du groupe des mouvements euclidiens que par des termes du second ordre.

III. — Mouvement d'ensemble attaché a une multiplicité.

16. A tout point P d'une surface M de l'espace ordinaire correspond un trièdre remarquable T où $Pxyz$, tel que l'équation de la surface rapportée à T et résolue en z prend la forme réduite $z = ax^2 + by^2 + \ldots$, les termes non écrits étant du troisième ordre au moins. On sait d'ailleurs que $2a$ et $2b$ sont les inverses des rayons de courbures principaux de M en P.

Il est évident qu'à toute représentation paramétrique de la surface correspond un mouvement à deux paramètres du trièdre T; l'étude de ce mouvement peut être substituée à celle de la surface [1].

L'utilité de la notion précédente apparaît dans la recherche des

[1] Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, Livre V, Chap. I.

surfaces W dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation donnée (¹). On peut en effet la diviser en deux problèmes successifs : intégration d'un système résolvant (R) déterminant les translations et rotations du trièdre mobile T; intégration des systèmes (L) correspondant aux solutions de (R) et déterminant les positions respectives des trièdres fixes et mobiles. D'ailleurs à un même système de solutions de (R) correspond une famille de surfaces W égales entre elles.

17. Nous allons généraliser les résultats précédents, en considérant une multiplicité M à p dimensions contenue dans un espace E′ à n dimensions et un groupe fini et continu G que nous supposerons transitif.

Soient $x'_1, \ldots, x'_n$ les coordonnées définissant les points de E′ et

$$(32) \qquad x_i = f_i(x'_1, \ldots, x'_n;\ a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

les équations de G.

Supposons d'abord M définie par les expressions de x'_{p+1}, $x'_{p+2}, \ldots, x'_n$ en fonction de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$. Appelons *élément* de M (²) l'ensemble formé par un système de valeurs numériques de $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ satisfaisant aux équations de M et par les valeurs numériques correspondantes des dérivées de $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$. Ces valeurs sont appelées *coordonnées de l'élément*.

Au groupe G, on peut faire correspondre, pour les multiplicités à p dimensions, un nombre limité de formes réduites, telles que tout élément ε d'une telle multiplicité M peut se mettre, à l'aide d'une transformation bien déterminée du groupe, sous l'une de ces formes réduites. Les coordonnées de l'élément réduit $\mathcal{E}$ sont égales, les unes à des constantes fixes, les autres à des invariants fonctions des coordonnées de l'élément initial.

(¹) *Ibid.*, t. III, p. 317 et t. II, p. 345.

(²) Les notions d'élément et de forme réduite sont tirées de la thèse de M. Tresse, *Sur les invariants différentiels*, etc. (*Acta mathematica*, t. XVIII). *Voir* le Chapitre I de la troisième Partie de ce Mémoire et, en particulier, le théorème I dont l'énoncé est reproduit ci-dessus.

18. Si la multiplicité M est donnée par une représentation paramétrique

$$(33) \qquad x'_i = \psi_i(u_1, \ldots, u_p) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

un calcul de dérivées de fonctions implicites donnera, en fonction des paramètres u, les coordonnées de l'élément ε.

Écrivant alors que l'on passe de ε à l'élément réduit $\mathcal{E}$ par une transformation (32) convenablement prolongée, on détermine $a_1, \ldots, a_r$ en fonction de $u_1, \ldots, u_p$.

Regardons maintenant dans les équations (32) les x comme arbitraires, les a comme remplacés par les fonctions des variables u que l'on vient de déterminer; nous avons des formules définissant un *mouvement d'ensemble d'un espace* E *par rapport à l'espace* E'. Ce mouvement est à p paramètres $u_1, \ldots, u_p$, et relatif à G; la trajectoire du point de E dont les coordonnées x sont égales aux coordonnées d'ordre zéro (¹) de l'élément réduit est précisément la multiplicité M.

Les fonctions $a_1, \ldots, a_r$ des variables $u_1, \ldots, u_p$ définissant ce mouvement d'ensemble déterminent (²) les expressions de Pfaff $l_1(du), \ldots, l_r(du)$ qui figurent dans les systèmes (L) correspondant à ce mouvement (nᵒˢ 17 et 13). Nous dirons que *les expressions* $l(du)$ *correspondent à la multiplicité* M donnée par la représentation (33).

Il est aisé de voir (³) que *les expressions* $l(du)$ *correspondant à une multiplicité* M, *correspondent aussi à toutes les multiplicités déduites de* M *par les tranformations de* G *et à celles-là seulement.*

Si l'on changeait la représentation adoptée pour M, en prenant de nouveaux paramètres $v_1, \ldots, v_p$; les expressions de Pfaff $\lambda_1(dv), \ldots, \lambda_r(dv)$, correspondant à la nouvelle représentation, se déduiraient évidemment des anciennes $l_1(du), \ldots, l_r(du)$ par la transformation donnant $u_1, \ldots, u_p$ en fonction de $v_1, \ldots, v_p$.

19. Les systèmes (L) que l'on attache ainsi aux multiplicités à p dimensions de l'espace E' ont une forme particulière. Pour

---

(¹) On peut supposer ces coordonnées constantes, puisque G est transitif.

(²) *Systèmes* (L), nᵒ 4.

(³) *Ibid.*, nᵒ 11.

écrire qu'un système (L)

$$(34) \qquad dx_i = \sum_{j=1}^{r} \xi_{ji}(x)\, l_j(du) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

construit à l'aide des transformations infinitésimales de G et de r formes données $l(du)$ satisfaisant aux conditions d'intégrabilité, appartient au type précédent, on procède de la façon suivante :

Prenant pour fonctions adjointes d'ordre *zéro*, $x_1, \ldots, x_n$, les constantes qui sont les coordonnées d'ordre *zéro* de l'élément réduit, on calcule les fonctions adjointes d'ordre supérieur (n^{os} **11**, **12**) ([1]).

On écrit les équations qui donnent les dérivées de $x'_{p+1}, \ldots, x'_n$ par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$ en fonction des x' et de leurs dérivées par rapport à $u_1, \ldots, u_p$. On y remplace les x' et leurs dérivées par rapport à $x'_1, \ldots, x'_p$ par les coordonnées constantes de l'élément réduit, les dérivées des x' par rapport aux u par les fonctions adjointes correspondantes. On élimine les dérivées restantes; les relations obtenues ainsi entre les coefficients des formes $l(du)$ sont les conditions cherchées.

Un calcul analogue donne les expressions des invariants différentiels en fonction des paramètres u.

Reprenons, à ce point de vue, l'exemple du n° **15**. Le groupe (27) est transitif, celles de ses transformations laissant invariant le point o, o, o engendrent le groupe des rotations autour de ce point. On peut donc prendre le même élément réduit, pour une surface, que dans le cas de l'espace euclidien, c'est-à-dire $x' = y' = z' = \frac{\partial z'}{\partial x'} = \frac{\partial z'}{\partial y'} = \frac{\partial^2 z'}{\partial x' \partial y'} = 0$. Les expressions $\frac{1}{R} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial x'^2}\right)_0$, $\frac{1}{R'} = \left(\frac{\partial^2 z'}{\partial y'^2}\right)_0$ sont des invariants; nous appellerons R et R$'$ *les rayons de courbure principaux cayleyens.*

En appliquant la méthode précédente, on voit que les formes (28) définiront le mouvement cayleyen attaché à une surface si l'on a

$$(35) \qquad \zeta = \zeta_1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} p\eta - q\xi & \xi^2 & \eta^2 \\ p\eta_1 - q\xi_1 & \xi\xi_1 & \eta\eta_1 \\ p_1\eta_1 - q_1\xi_1 & \xi_1^2 & \eta_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

([1]) On pousse le calcul jusqu'aux fonctions d'ordre égal à l'ordre maximum des coordonnées constantes de l'élément réduit.

Les invariants $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{R'}$ sont définis par les équations

$$
\begin{aligned}
\xi^2 \frac{1}{R} + \eta^2 \frac{1}{R'} &= p\eta - q\xi, \\
\xi\xi_1 \frac{1}{R} + \eta\eta_1 \frac{1}{R'} &= p\eta_1 - q\xi_1, \\
\xi_1^2 \frac{1}{R} + \eta_1^2 \frac{1}{R'} &= p_1\eta_1 - q_1\xi_1,
\end{aligned}
$$

compatibles en vertu de la dernière des identités (35).

20. Un grand nombre de problèmes de Géométrie se rattachent au type suivant :

Déterminer dans un espace E′ *les multiplicités* M *à p dimensions dont les invariants vis-à-vis d'un groupe fini continu et transitif* G *satisfont à des relations données.*

Dans son Mémoire récent [1] *Sur l'intégration des systèmes différentiels qui admettent des groupes continus de transformations*, M. Vessiot s'est occupé d'un problème beaucoup plus général. Il nous est facile de présenter d'une façon simple, dans le cas particulier qui nous occupe, l'un des intéressants résultats obtenus par M. Vessiot. On remarquera également que la méthode suivante est une généralisation de celle que l'on utilise dans la recherche des surfaces W.

Nous chercherons d'abord le mouvement d'ensemble attaché à une multiplicité inconnue M. A cet effet, nous formerons un système *résolvant* (R) auquel doivent satisfaire les coefficients des formes $l(du)$ pris comme inconnues auxiliaires. Les équations de (R) comprennent : 1° les équations du n° 19 exprimant que le système (L) correspond au mouvement d'ensemble relatif à G attaché à une multiplicité d'un nombre de dimensions donné; 2° les équations obtenues en remplaçant, dans les relations données, les invariants différentiels par leurs expressions en fonction des coefficients des formes $l(du)$ et de leurs dérivées.

---

(1) *Acta mathematica*, t. XXVIII.

A chaque système de solutions de (R) correspond ensuite un système (L) que l'on peut choisir automorphe (n° 13), et dont l'intégration donnerait une famille de multiplicités, répondant au problème, et se déduisant toutes de l'une d'elles par les transformations de G.

Le système (Σ) formé par la réunion des systèmes (R) et (L) présente l'inconvénient de donner d'une infinité de façons différentes la même famille de multiplicités. Cela tient à ce que la représentation paramétrique de la multiplicité inconnue est arbitraire. Deux systèmes de solutions distincts de (R) donneront la même famille de solutions du problème posé, si l'on passe des expressions $l(du)$ correspondant à l'un d'eux aux expressions $\lambda(dv)$ correspondant à l'autre par un changement de variables. Si les $l(du)$ et les $\lambda(dv)$ sont connus, il est possible, par des opérations effectuables, de reconnaître si un pareil changement de variables existe, et, dans ce cas, de le déterminer (¹).

Mais on pourra toujours (²) réduire l'indétermination précédente par un choix plus précis des variables u, jusqu'ici entièrement arbitraires. On prendra, dans la mesure du possible, ces variables égales soit à des invariants différentiels de la multiplicité inconnue soit à des solutions d'équations différentielles auxiliaires.

21. Appliquons ce qui précède à la *recherche des surfaces dont les rayons de courbure cayleyens* R, R′ *sont liés par une relation donnée* $F(R, R') = 0$.

Nous simplifierons d'abord les formules, en prenant les paramètres u et v de telle façon que $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ soient respectivement les intégrales de $l_1(du) = 0$ et de $l_2(du) = 0$. On a alors $\xi_1 = \eta_1 = 0$, et les conditions (29) et (35) donnent $p = q_1 = 0$. On prendra donc

$$(36)\quad \begin{cases} l_1(du) = -\xi\, du, & l_2(du) = -\eta_1\, dv, & l_3(du) = 0, \\ l_4(du) = p_1\, dv, & l_5(du) = q\, du, & l_6(du) = r\, du + r_1\, dv. \end{cases}$$

(¹) *Voir*, à ce sujet, les nᵒˢ 23 et 9 de l'étude *Sur les variétés à trois dimensions* (*Annales de Toulouse*, 1900).

(²) VESSIOT, *loc. cit.*, n° 16.

Le système (R) est, en observant que $R = -\frac{\xi}{q}$, $R' = \frac{\eta_1}{p_1}$,

$$(37)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} = -\eta_1 r, & \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} = r_1 \xi, \\ \dfrac{\partial p_1}{\partial u} = -q r_1, & \dfrac{\partial q}{\partial v} = r p_1, \qquad \dfrac{\partial r}{\partial v} - \dfrac{\partial r_1}{\partial u} = -q p_1 + \xi \eta_1, \\ F\left(-\dfrac{\xi}{q}, \dfrac{\eta_1}{p_1}\right) = 0. \end{cases}$$

Enfin le système (L) est ici

$$(38)\quad \begin{cases} dx = -(1+x^2)\xi\, du - xy\,\eta_1\, dv - zq\, du + y(r\, du + r_1\, dv), \\ dy = -xy\,\xi\, du - (1+y^2)\eta_1\, dv + z p_1\, dv - x(r\, du + r_1\, dv), \\ dz = -xz\,\xi\, du - yz\,\eta_1\, dv - y p_1\, dv + xq\, du. \end{cases}$$

Pour le remplacer par un système automorphe ([1]), on chercherait d'abord les transformations infinitésimales d'un groupe simplement transitif de même structure que (27).

On peut encore substituer à (38) un système linéaire, en utilisant le groupe adjoint de (27).

Il est plus simple de prendre des coordonnées homogènes ([2]); on retrouve ainsi les résultats obtenus directement par M. Demoulin dans la Note citée plus haut.

22. La méthode précédente est applicable à des problèmes plus généraux, relatifs à des familles de multiplicités; c'est ainsi que M. Darboux ([3]) a employé la méthode du trièdre mobile dans la recherche des systèmes triples orthogonaux.

Indiquons rapidement comment on peut utiliser, pour le même problème, le groupe Γ des transformations isogonales de l'espace ordinaire.

On cherche d'abord une forme réduite à laquelle on puisse ramener, à l'aide d'une transformation de Γ, les équations de trois surfaces se coupant orthogonalement en un point. A l'aide des résultats donnés par M. Tresse ([4]), on établit sans difficulté

([1]) *Systèmes* (L), n° 11.

([2]) *Voir*, pour les formules de passage, LIE-ENGEL, t. I, p. 579.

([3]) *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, Liv. II, Chap. II.

([4]) Mémoire cité.

qu'on peut prendre

$$(39)\quad x=\frac{A}{2}(y^2-z^2)+\ldots,\quad y=\frac{B}{2}(z^2-x^2)+\ldots,\quad z=\frac{C}{2}(x^2-y^2)+\ldots,$$

les termes non écrits étant d'ordre supérieur à *deux*. De plus on prendra A, B, C liés par une relation non homogène, mais symétrique, telle que

$$(40)\qquad \frac{1}{A}+\frac{1}{B}+\frac{1}{C}=1.$$

Le groupe Γ est à dix paramètres. Donc un mouvement d'ensemble à trois paramètres, relatif à Γ, est défini par dix expressions de Pfaff à trois variables. Les trente coefficients de ces expressions étant pris comme inconnues, doivent satisfaire déjà à trente équations du premier ordre exprimant les conditions d'intégrabilité des systèmes (L) correspondants.

Si l'on veut exprimer ensuite qu'un pareil mouvement correspond, à l'aide de la forme réduite précédente [(39) et (40)], à un système triple orthogonal, il faut ajouter aux équations précédentes six équations d'ordre *zéro* et sept nouvelles équations du premier ordre.

En choisissant les paramètres du mouvement de telle façon que sur chaque surface du système triple l'un de ces trois paramètres reste constant, on réduit immédiatement le nombre des inconnues à 21, celui des équations à 34 (elles sont toutes du premier ordre). Les calculs qu'il faudrait faire pour pousser plus loin la réduction du nombre des inconnues seraient bien simplifiés par la symétrie qui persiste toujours.

De quelque façon que l'on écrive le système différentiel obtenu, à chacun de ses systèmes de solutions correspond une famille de ∞^{10} systèmes triples orthogonaux, se déduisant les uns des autres par des transformations isogonales. Leur détermination effective exigerait encore l'intégration d'un système (L) correspondant à Γ.