BULLETIN DE LA S. M. F.

WEILL

Sur une classe d'équations irréductibles du cinquième degré, résolubles par radicaux

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 82-87
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__82_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

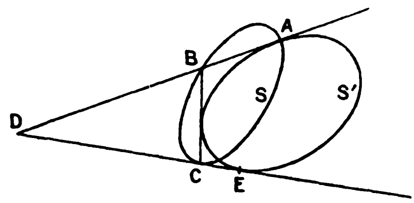
MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS IRRÉDUCTIBLES DU CINQUIÈME DEGRÉ, RÉSOLUBLES PAR RADICAUX;

Par M. MATHIEU WEILL.

Soient (*fig.* 1) une conique S′, trois tangentes DCE, DBA, BC, et une autre conique S passant par A, B, C, et touchant DE au

Fig. 1.



point C. Le pentagone ABCCB a ses sommets sur la conique S et ses côtés tangents à la conique S′; dès lors, il existe une infinité de pentagones inscrits dans S et circonscrits à S′.

On aura, pour S′ l'équation

$$\alpha\beta - \gamma^2 = 0,$$

et, pour S, l'équation

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^3\gamma + \mu\alpha) = 0$$

(BC ayant pour équation $\lambda^2\beta + 2\lambda\gamma + \alpha = 0$). Un point de la conique S est défini par

$$\alpha = 2\lambda \frac{t - \lambda^2}{\mu - t}\gamma,$$

$$\beta = \frac{-2\lambda}{t}\,\frac{\mu - \lambda^2}{\mu - t}\gamma.$$

La droite qui joint deux points a pour équation

$$\alpha[\mu - (t + t')] - \beta t t' - 2\lambda\gamma(t + t' - \lambda^2) = 0.$$

Cette droite sera tangente à S′, dont un point est défini par

$$\alpha = \lambda\theta,$$

$$\beta = \frac{\lambda}{\theta},$$

si l'équation

$$\theta^2[\mu - (t + t')] - tt' - 2\lambda\theta(t + t' - \lambda^2) = 0$$

a ses racines égales, ce qui donne

$$t^2(\lambda^2 - t') + t[2\lambda^2(t' - \lambda^2) - t'^2 + \mu t'] + \lambda^2(t' - \lambda^2)^2 = 0.$$

Considérons un pentagone inscrit dans la conique S et circonscrit à la conique S′, et soient $t_1\, t_2\, t_3\, t_4\, t_5$ les valeurs correspondantes du paramètre t. On aura

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} t_2 + t_5 &= \frac{2\lambda^2(t_1 - \lambda^2) - t_1^2 + \mu t_1}{t_1 - \lambda^2},\\ t_2 t_5 &= \lambda^2(\lambda^2 - t_1).\end{aligned}\right.$$

Transportons ces valeurs dans l'équation de la droite qui joint les points correspondant à t_2 et t_5, nous aurons t_1 au second degré, nous en déduirons, immédiatement, l'équation de l'enveloppe des droites qui joignent de deux en deux les sommets du pentagone

$$(\alpha + 2\lambda\gamma)^2 + \beta(2\lambda^3\gamma + \mu\alpha) + (\mu - \lambda^2)(\gamma^2 - \alpha\beta) = 0.$$

Cette conique passe par les points communs aux deux premières, résultat bien connu.

D'autre part, en éliminant t_1 entre les relations (1), nous aurons, entre t_2 et t_5, la relation

$$\lambda^2(t_2 t_5)(t_2+t_5)+\mu\lambda^6-\lambda^8-\mu\lambda^2 t_2 t_5-t_2^2 t_5^2=0.$$

Cette même relation existe évidemment, entre t_1 et t_3, et aussi entre t_1 et t_4 ; on a donc

$$t_3+t_4=\lambda^2\frac{\mu-t_1}{\lambda^2-t_1},$$

$$t_3 t_4=\lambda^6\frac{\mu-\lambda^2}{t_1(\lambda^2-t_1)}.$$

Désignons par θ la somme des produits 2 à 2 des 5 quantités t_1 t_2, t_3, t_4, t_5, c'est-à-dire la quantité

$$(t_2+t_3+t_4+t_5)t_1+t_3 t_4+t_2 t_5+(t_3+t_4)(t_2+t_5),$$

on aura donc

$$\theta=\frac{f(t_1)}{\varphi(t_1)}$$

ou

$$\theta\,\varphi(t_1)-f(t_1)=0,$$

relation où t_1 pourra être remplacé par chacune des valeurs t_2, t_3, t_4, t_5 ; on obtient ainsi l'équation

$$\begin{aligned} t^5-t^4(2\lambda^2+\mu)+\theta t^3-\lambda^2 t^2(2\theta-\mu\lambda^2-\mu^2-3\lambda^4) \\ -\lambda^4 t(2\lambda^4+\mu\lambda^2-\theta)+\lambda^8(\lambda^2-\mu)=0. \end{aligned}$$

Cette équation donnera, par la variation de θ, les 5 valeurs de t qui définissent le pentagone. Or, 2 quelconques de ces valeurs étant données, les autres en sont des fonctions rationnelles, comme le montre l'analyse précédente, c'est donc une équation de Galois, c'est à-dire que les 5 racines s'expriment par des radicaux portant sur des fonctions rationnelles des 3 paramètres θ, μ, λ^2. On a donc le théorème suivant :

L'équation

$$\begin{aligned} t^5-t^4(2a+b)+ct^3-at^2(2c-ab-b^2-3a^2) \\ -a^2 t(2a^2+ab-c)+a^4(a-b)=0, \end{aligned}$$

dans laquelle a, b, c sont 3 *quantités quelconques, est résoluble par radicaux.*

Soient t_1 et t_2 deux des racines, les autres auront pour valeurs

$$t_3 = \frac{a(a - t_2)}{t_1},$$
$$t_4 = a^2 \frac{t_1 + t_2 - a}{t_2},$$
$$t_5 = \frac{a(a - t_1)}{t_2}.$$

On peut employer une autre méthode. Considérons deux coniques ayant pour équations

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0,$$
$$Ax^2 + By^2 - z^2 = 0.$$

Un point de la première est défini par les équations

$$x = z\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \qquad y = z\frac{2t}{1 + t^2},$$

et la droite qui joint 2 points a pour équation

$$x(1 - tt') + y(t + t') - z(1 + tt') = 0.$$

En exprimant que cette droite touche la seconde conique, on trouve facilement

$$\frac{(t + t')^2}{B} + \frac{(1 - tt')^2}{A} - (1 + tt')^2 = 0,$$

ou bien

$$t^2(1 + \lambda t'^2) + 2\mu tt' + t'^2 + \lambda = 0,$$
$$\left(\lambda = \frac{B - AB}{A}, \qquad \mu = \frac{A - B - AB}{A}\right).$$

Considérons un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde, et soient t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 les paramètres qui correspondent aux sommets. On aura

$$t_2 + t_5 = \frac{-2\mu t_1}{+\lambda t_1^2}, \qquad t_2 t_5 = \frac{\lambda + t_1^2}{1 + \lambda t_1^2}.$$

Il en résulte entre t_3 et t_5 une relation de la forme

$$t^2(1+\lambda_1 t'^2)+2\mu_1 tt'+t'^2+\lambda=0,$$

avec

$$\lambda_1=\frac{4\lambda\mu^2}{(\lambda^2-1)^2}; \qquad \mu_1=1-\frac{2\mu^2(\lambda^2+1)}{(\lambda^2-1)^2}.$$

On aura donc

$$t_3+t_4=\frac{-2\mu_1 t_1}{1+\lambda_1 t_1^2}, \qquad t_3 t_4=\frac{\lambda_1+t_1^2}{1+\lambda_1 t_1^2}.$$

Appelons θ le produit t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, nous aurons

$$\theta=t_1\frac{\lambda+t_1^2}{1+\lambda t_1^2}\,\frac{\lambda_1+t_1^2}{1+\lambda_1 t_1^2}.$$

Donc l'équation

$$t(\lambda+t^2)(\lambda_1+t^2)-\theta(1+\lambda t^2)(1+\lambda_1 t^2)=0$$

aura pour racines les 5 valeurs de t; cette équation développée est

$$t^5-\theta\lambda\lambda_1 t^4+t^3(\lambda+\lambda_1)-\theta(\lambda+\lambda_1)t^2+\lambda\lambda_1 t-\theta=0.$$

Les paramètres λ et λ_1 sont liés par une relation qu'il faut trouver.

Or, si nous joignons t_1 à t_3, puis t_3 à t_5, la droite $t_1 t_5$ sera telle que l'on aura entre t_1 et t_5 la relation

$$t^2(1+\lambda_2 t'^2)+2\mu_2 tt'+t'^2+\lambda_2=0,$$

avec

$$\lambda_2=\frac{4\lambda_1\mu_1^2}{(\lambda_1^2-1)^2}, \qquad \mu_2=1-\frac{2\mu_1^2(\lambda_1^2+1)}{(\lambda_1^2-1)^2}.$$

On aura, si le polygone se ferme,

$$\lambda_2=\lambda, \qquad \mu_2=\mu.$$

Exprimant ces conditions, on trouve

$$16\mu^2[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]^2(\lambda^2-1)^2=[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]^2,$$

$$1-\mu=\frac{[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]^2[(\lambda^2-1)^4+16\lambda^2\mu^4]}{[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]^2\,8\mu^2(\lambda^2-1)^2}.$$

La première donne

$$4\mu(\lambda^2-1)[(\lambda^2-1)^2-2\mu^2(\lambda^2+1)]\pm[16\lambda^2\mu^4-(\lambda^2-1)^4]=0.$$

et la seconde, combinée avec la première, donne

$$8\mu^2(1-\mu)(\lambda^2-1)^2-[(\lambda^2-1)^4+16\lambda^2\mu^4]=0.$$

On voit facilement que, dans la première, il faut prendre le signe $+$.

En posant $\lambda^2-1=z$, les 2 relations deviennent

$$(z-2\mu)[-z^3+2\mu z^2+(4\mu^2-8\mu^3)z-8\mu^3]=0,$$
$$(z+2\mu)(-z^3+2\mu z^2+\ldots)=0.$$

La relation cherchée est donc, en posant $2\mu=t$,

$$z^3-tz^2+(t^3-t^2)z+t^3=0.$$

Elle donne, sous une forme simple, la condition entre A et B pour qu'il existe un pentagone inscrit dans la première conique et circonscrit à la seconde; elle peut s'écrire

$$(\lambda^2-1)^3-2\mu(\lambda^2-1)^2+(8\mu^3-4\mu^2)(\lambda^2-1)+8\mu^3=0,$$

elle permet d'exprimer μ en fonction de λ par des radicaux, et par suite, λ_1 en fonction de λ par des radicaux, donc l'équation du 5ᵉ degré envisagée plus haut est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles des deux paramètres indépendants λ et θ. On trouve, d'ailleurs, entre λ et λ_1, la relation

$$(\lambda\lambda_1-1)^2\lambda\lambda_1-(\lambda-\lambda_1)^2=0.$$

Posons

$$\lambda\lambda_1=a, \qquad \lambda+\lambda_1=b,$$

il vient

$$b=\sqrt{a^3-2a^2+5a},$$

on a donc l'énoncé suivant.

L'équation

$$t^5-act^4+(t^3-ct^2)\sqrt{a^3-2a^2+5a}+ta-c=0,$$

où a et c sont deux paramètres indépendants, est soluble par radicaux portant sur des fonctions rationnelles de a et c.