BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Résolution de l'équation $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 170-171
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__170_1>

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$;

Par M. DE MONTCHEUIL.

Soient S *une surface quelconque,* ρ *le segment qui relie ses centres de courbure,* x, y, z *les coordonnées de sa surface moyenne; on a tout le long des lignes de cette dernière surface correspondant aux lignes ombilicales de* S

$$d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

En effet, ξ, u, u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet relatives à S; R, R' ses rayons de courbure; ds l'élément linéaire de la surface moyenne, on vérifie la relation

$$ds^2 = \left[d\left(\frac{R+R'}{2}\right)\right]^2 + \left(\frac{R-R'}{1+uu_1}\right)^2 du\, du_1 \text{ (1)}.$$

D'où, pour $R = R'$,

$$\left[d\left(\frac{R+R'}{2}\right)\right]^2 = d\rho^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

---

(1) *La développée moyenne et les surfaces applicables* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXI, 1903).

Il suffira donc de se donner une surface S quelconque et de déterminer ses lignes ombilicales pour obtenir des expressions sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe quelconque de l'espace.

On obtiendra les courbes réelles en choisissant pour S une surface réelle à lignes ombilicales réelles.

Si nous définissons S par l'équation

$$\zeta = u F_1 + u_1 F + \Phi + \Phi_1\,;$$

F, Φ désignant deux fonctions quelconques de u; F_1, Φ_1 deux fonctions de u_1; F', Φ', F'_1, Φ'_1 leurs dérivées, on obtient le système de formules

$$\begin{aligned} x &= u F' - F - \Phi', \\ y &= i(F - u F' - \Phi'), \\ z &= \Phi - u\Phi' - F', \\ s &= \Phi - u\Phi' + F'. \end{aligned}$$

On trouve pour les courbes réelles

$$\begin{aligned} x &= \alpha\theta - A', \\ y &= \beta\theta - B', \\ z &= \left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \\ s &= \left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)\theta - \alpha A' - \beta B' + A + B, \end{aligned}$$

A, B désignant ici des fonctions respectives de α, β. Ces variables s'expriment en fonction de θ au moyen des relations

$$A'' = B'' = \theta.$$

Il faudra prendre pour A, B deux fonctions réelles permettant d'exprimer α, β par des fonctions réelles de θ.

Des relations précédentes on déduit le système

$$\frac{dx}{2\alpha} = \frac{dy}{2\beta} = \frac{dz}{\alpha^2+\beta^2-1} = \frac{ds}{\alpha^2+\beta^2+1},$$

qui permet de déterminer aisément les courbes de l'espace analogues aux *courbes de direction* étudiées par Laguerre.