BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LANDAU

Sur quelques théorèmes de M. Petrovitch relatifs aux zéros des fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 33 (1905), p. 251-261

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1905__33__251_0>

SUR QUELQUES THÉORÈMES DE M. PETROVITCH RELATIFS AUX ZÉROS DES FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. E. LANDAU.

I.

Dans un Mémoire qu'a inséré ce *Bulletin* (¹) M. Petrovitch démontre, par une méthode très intéressante, le théorème suivant (²) :

A. *Si l'on désigne par* λ *le plus petit module des zéros de la série*

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

(où a_0 est supposé différent de 0) *et si l'on forme la fonction*

$$u(z) = \left|\frac{1}{z^2}\right| \sum_0^\infty |a_n z^n|^2,$$

on aura

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} \quad (^3), \tag{2}$$

(¹) *Remarque sur les zéros des séries de Taylor,* t. XXIX, 1901, p. 303-312.

(²) *Ibidem,* voir p. 306.

(³) Je change ici, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le signe $>$ en $\geqq$. En réalité, sa démonstration prouve seulement que la série (1) n'a pas de zéro dont le module soit inférieur à $\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}}$. Avec le signe $>$ dans l'inégalité (2), le théorème ne serait plus exact, comme l'exemple suivant le fera voir. La série

$$-1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{-1+2z}{1-z}$$

admet, dans son cercle de convergence (de rayon 1), la seule racine $\frac{1}{2}$. Donc $\lambda = \frac{1}{2}$. Or, pour $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a

$$\frac{|a_0|}{\sqrt{u(z)}} = \frac{1}{\sqrt{2\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} = \lambda.$$

quelle que soit la valeur de la variable complexe z à l'intérieur du cercle de convergence de la série (1).

En d'autres termes, si R est le rayon de convergence de la série (1) et r une quantité positive inférieure à R, on a

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}. \tag{3}$$

Si

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

est une fonction entière, l'inégalité (3) s'applique à toutes les valeurs positives de r.

M. Petrovitch a déduit de son théorème A, vers la fin de son Mémoire, une autre proposition. Il se sert de l'inégalité

$$\sum_0^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \left(\sum_0^{\infty} |a_n| r^n\right)^2,$$

dont le second membre représente le carré de la fonction majorante $\mathfrak{M}(r)$ relative à $f(z)$ pour la circonférence de rayon r. M. Petrovitch conclut donc de (3) l'inégalité

$$\lambda > \frac{|a_0|r}{\sum_0^{\infty} |a_n| r^n} = \frac{|a_0|r}{\mathfrak{M}(r)}, \tag{4}$$

qu'il énonce sous la forme suivante [1] :

B. *Une fonction $f(z)$, holomorphe dans une circonférence* C *décrite autour de l'origine comme centre, ne s'annulant pas à l'origine, ne saurait avoir de zéro de module inférieur à l'expression*

$$\frac{|f(0)|}{\mathrm{M}},$$

où M *désigne la plus petite* [2] *valeur que prend le module du*

---

(1) *Idem, voir* p. 311-312.

(2) Je corrige ici une faute d'écriture, en remplaçant, dans l'énoncé de M. Petrovitch, le mot *grande* par *petite*.

rapport de la fonction majorante de $f(z)$ à la variable z pour les valeurs de z comprises à l'intérieur de la circonférence C.

II.

Je ferai observer en premier lieu que ce théorème B doit être considéré comme presque évident; en effet, en vertu de l'inégalité

$$\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} < 1.$$

pour

$$|z| \leqq \frac{|a_0| r}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n}, \qquad m \geqq 1,$$

on a aussi

$$|z|^m \leqq \left(\frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} \right)^m r^m \leqq \frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} r^m;$$

d'où

$$|f(z) - a_0| = |a_1 z + a_2 z^2 + \ldots| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m| |z|^m$$

$$\leqq \frac{|a_0|}{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n} \sum_{n=1}^{\infty} |a_m| r^m < |a_0|,$$

$$|f(z)| = |a_0 + \{f(z) - a_0\}| \geqq |a_0| - |f(z) - a_0| > 0.$$

III.

On peut obtenir une proposition plus instructive que B en interprétant l'inégalité (3) de M. Petrovitch de la manière suivante.

Les formules connues de la théorie des séries de Fourier, si on les applique au carré du module de

$$f(z) = f(re^{\varphi i}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \cos n\varphi - \gamma_n r^n \sin n\varphi) + i \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n r^n \sin n\varphi + \gamma_n r^n \cos n\varphi)$$

(où l'on a posé $a_n = \beta_n + \gamma_n i$), donnent

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2 \, d\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (\beta_n^2 r^{2n} + \gamma_n^2 r^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n},$$

où, dans l'intégrale, z parcourt la circonférence $re^{\varphi i}$. Cette identité (5), connue, quoique pas très usuelle, montre qu'en désignant par $M(r)$ le maximum de $|f(z)|$ pour $|z| = r$, on a

$$(6) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqq \{M(r)\}^2 \quad (1).$$

De (3) et (6), on conclut l'inégalité

$$(7) \qquad \lambda \geqq \frac{|a_0| r}{M(r)} \quad (2).$$

Si la fonction $|f(z)|$ n'est pas constante pour $|z| = r$, on a même

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} < \{M(r)\}^2,$$
$$\lambda > \frac{|a_0| r}{M(r)},$$

---

(1) L'inégalité (6) a été démontrée, sans faire intervenir les intégrales, par M. Gutzmer dans sa Note : *Ein Satz über Potenzreihen* (*Mathematische Annalen,* t. XXXII, 1888, p. 596-600). Ce fait intéressant que $\{M(r)\}^2$ est supérieur ou égal non seulement à chacune des quantités $|a_n|^2 r^{2n}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$), ainsi que Cauchy l'avait démontré, mais aussi à leur somme, n'est mentionné presque dans aucun traité.

(2) Dans l'exemple contenu dans la troisième note de la page 251, la limite indiquée par le second membre de (7) est atteinte. Car on a $M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$. D'ailleurs, pour $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on a, indépendamment de φ, $|f(z)| = \left|\frac{-1+2z}{1-z}\right| = \sqrt{2}$.

ce qui, en vertu de la relation

$$\mathrm{M}(r) \leqq \mathfrak{M}(r),$$

entraîne l'inégalité

$$\lambda > \frac{|a_0|r}{\mathfrak{M}(r)}. \tag{4}$$

Si $|f(z)|$ est constant pour $|z| = r$, on a certainement

$$\mathrm{M}(r) < \mathfrak{M}(r),$$

de sorte que (7) entraîne l'inégalité (4).

IV.

Cependant l'inégalité (7) n'est pas nouvelle; au contraire, elle est une conséquence presque immédiate du théorème de M. Jensen ([1]), dont voici l'énoncé dans le cas des fonctions $f(z)$ régulières pour $|z| \leqq r$ et différentes de o pour $z = 0$:

Si $z_1, z_2, \ldots, z_k$ sont les zéros de la fonction dont le module ne surpasse pas r, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)|\,d\varphi = \log\left|\frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right|, \tag{8}$$

où z parcourt la circonférence $re^{\varphi i}$.

Il résulte de (8) que

$$\log\left|\frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right| \leqq \log \mathrm{M}(r),$$

$$\left|\frac{f(0)r^k}{z_1 z_2 \ldots z_k}\right| \leqq \mathrm{M}(r). \tag{9}$$

Donc, pour $|z_1| \leqq r < |z_2|$, en posant $k = 1$, $|z_1| = \lambda$, on a

$$\frac{|a_0|r}{\lambda} \leqq \mathrm{M}(r),$$

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|r}{\mathrm{M}(r)}.$$

([1]) *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (*Acta mathematica*, t. XXII, 1899, p. 359-364).

C'est l'inégalité (7), pour $|z_1| \leqq r < |z_2|$. Pour $k = 0$, c'est-à-dire pour $0 < r < |z_1|$, elle résulte de ce que

$$M(r) > |a_0|,$$
$$\lambda = |z_1| > r > \frac{|a_0|}{M(r)} r.$$

Pour $k \geqq 2$, c'est-à-dire pour $|z_2| \leqq r$ et r inférieur au rayon du cercle de convergence de la série (1), elle résulte de

$$M(r) \geqq \left|\frac{f(0) r^k}{z_1 \ldots z_k}\right| = \frac{|a_0| r}{\lambda} \cdot \frac{r}{|z_2|} \cdots \frac{r}{|z_k|} \geqq \frac{|a_0| r}{\lambda} \cdot 1 \ldots 1 = \frac{|a_0| r}{\lambda}.$$

De cette façon, M. Lindelöf [1] est même arrivé à déduire du théorème de M. Jensen, pour tous les ν, l'inégalité

$$M(r) \geqq \frac{|a_0| r^\nu}{|z_1| \ldots |z_\nu|}, \tag{10}$$

où les racines $z_1, z_2, \ldots$ sont rangées par ordre de modules croissants et où r désigne un nombre positif quelconque inférieur au cercle de convergence de (1). Il est vrai que M. Lindelöf ne parle, à l'endroit cité, que des fonctions entières; mais il n'y a rien à changer à son raisonnement pour le cas général. Seulement il faut mettre $\geqq$ à la place de $>$, pour embrasser tous les cas, ce qui est fait dans la formule (10). Voici donc la démonstration de l'inégalité (10) :

Soient $z_1, \ldots, z_k$ les zéros dont la valeur absolue est $\leqq r$.

1° Pour $k = \nu$, c'est-à-dire pour $|z_\nu| \leqq r < |z_{\nu+1}|$, (10) n'est autre chose que (9).

2° Pour $k < \nu$, on a $0 < r < |z_\nu|$, et (10) résulte de (9) en vertu de

$$\frac{|a_0| r^\nu}{|z_1| \ldots |z_\nu|}$$
$$= \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|} \cdot \frac{r}{|z_{k+1}|} \cdots \frac{r}{|z_\nu|} \leqq \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|} \cdot 1 \ldots 1 = \frac{|a_0| r^k}{|z_1| \ldots |z_k|}.$$

3° Pour $k > \nu$, on a $r \geqq |z_{\nu+1}|$; (10) est alors la conséquence

[1] *Mémoire sur la théorie des fonctions entières de genre fini* (*Acta Societatis Scientiarum Fennicæ*, t. XXXI, 1902, p. 13-14).

de (9) et de

$$\frac{|a_0|r^k}{|z_1|\dots|z_k|}$$
$$= \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\dots|z_\nu|}\cdot\frac{r}{|z_{\nu+1}|}\cdots\frac{r}{|z_k|} \geqq \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\dots|z_\nu|}\cdot 1\dots 1 = \frac{|a_0|r^\nu}{|z_1|\dots|z_\nu|}.$$

V.

Je vais maintenant montrer que non seulement l'inégalité (7), tirée du théorème A, peut être déduite du théorème de M. Jensen, mais que le théorème A lui-même est contenu dans le théorème de M. Jensen.

En appliquant l'identité (5), on voit qu'il s'agit de démontrer l'inégalité

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(z)|^2\,d\varphi}}, \tag{11}$$

en partant du théorème de M. Jensen.

Celui-ci peut s'écrire

$$\frac{|a_0|r^k}{|z_1|\dots|z_k|} = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varphi}.$$

Le premier membre étant, comme on l'a vu, toujours supérieur ou égal à $\frac{|a_0|r}{\lambda}$, on a

$$\frac{|a_0|r}{\lambda} \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varphi}. \tag{12}$$

Soit $g(\varphi)$ une fonction de φ, continue pour $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$. La moyenne géométrique de n nombres positifs étant inférieure ou égale à leur moyenne arithmétique, on a

$$\sqrt[n]{e^{g(0)}e^{g\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\dots e^{g\left\{(n-1)\frac{2\pi}{n}\right\}}}$$
$$= e^{\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} g\left(\nu\frac{2\pi}{n}\right)} \leqq \frac{1}{n}\left\{e^{g(0)} + e^{g\left(\frac{2\pi}{n}\right)} + \dots + e^{g\left((n-1)\frac{2\pi}{n}\right)}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1} e^{g\left(\nu\frac{2\pi}{n}\right)},$$

d'où, en passant à la limite,

$$e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\,d\varphi} \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{g(\varphi)}\,d\varphi. \tag{13}$$

Supposons d'abord que $f(z)$ n'ait pas de zéros sur la circonférence $|z| = r$, et posons, dans (13),

$$g(\varphi) = 2\log|f(re^{\varphi i})| = \log\{|f(re^{\varphi i})|^2\};$$

nous aurons

$$\left(e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\varphi}\right)^2 \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi; \tag{14}$$

donc, en vertu de (12),

$$\frac{|a_0|\,r}{\lambda} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi}. \tag{15}$$

Les deux membres de (15) étant des fonctions continues de r, cette inégalité subsiste aussi dans le cas où $f(z)$ a des zéros dont le module est égal à r.

Donc on a

$$\lambda \geqq \frac{|a_0|\,r}{\sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\,d\varphi}}, \tag{11}$$

ce qui constitue, comme nous l'avons vu plus haut, le théorème A de M. Petrovitch.

VI.

Soient, plus généralement, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu$ les modules des ν premiers zéros de la fonction $f(z)$, situés dans le cercle de convergence de la série

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

On a vu, au paragraphe IV, que, pour tout r inférieur au rayon de ce cercle, on a

$$\frac{|a_0|\,r^\nu}{\lambda_1\ldots\lambda_\nu} \leqq \frac{|a_0|\,r^k}{|z_1\ldots z_k|},$$

où $z_1, \ldots, z_k$ désignent les zéros dont le module ne surpasse pas r. Donc, par le théorème de M. Jensen,

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \leqq e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(z)|\, d\varphi},$$

et, en appliquant (14),

$$\frac{|a_0| r^\nu}{\lambda_1 \ldots \lambda_\nu} \leqq \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z)|^2\, d\varphi},$$

ce qui, en vertu de (5), peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu \geqq \frac{|a_0| r^\nu}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}}.$$

Pour $\nu = 1$, on retrouve le théorème de M. Petrovitch.

VII.

Enfin, j'indiquerai une démonstration directe et très élémentaire du théorème A. L'inégalité en question

$$\lambda \geqq \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}} \tag{3}$$

sera évidemment démontrée si l'on réussit à prouver que

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \frac{|a_0|^m r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{m}{2}}} \leqq |a_0|; \tag{16}$$

car, pour

$$|z| < \frac{|a_0| r}{\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}}},$$

on aura alors

$$|f(z)-a_0| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m\right| \leqq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m|\,|z|^m < \sum_{m=1} |a_m| \frac{|a_0|^m r^m}{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}\right)^{\frac{m}{2}}} \leqq |a_0|,$$

$$f(z) \neq 0.$$

En d'autres termes, si l'on pose dans (16), pour $m = 1, 2, \ldots,$

$$\frac{|a_m|\, r^m}{|a_0|} = p_m,$$

il suffit de prouver : si $p_1, p_2, \ldots$ sont des quantités réelles et si la série

$$1 + p_1^2 + p_2^2 + \ldots$$

converge, on a

$$\text{(17)} \qquad S = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m}{(1+p_1^2+p_2^2+\ldots)^{\frac{m}{2}}} \leqq 1.$$

Cette inégalité (17) peut être déduite d'une inégalité plus générale établie par M. Pringsheim [1] dans un autre but. Elle s'établit directement de la manière suivante, en excluant le cas banal de $p_1 = p_2 = \ldots = 0$, où $S = 0 < 1$.

On a, pour α et β réels,

$$2\alpha\beta \leqq \alpha^2 + \beta^2.$$

Appliquons cette identité à

$$\alpha = \frac{p_m}{(p_1^2+p_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}}, \qquad \beta = \frac{(p_1^2+p_2^2+\ldots)^{\frac{1}{2}}}{(1+p_1^2+p_2^2+\ldots)^{\frac{m}{2}}},$$

où m désigne un des nombres $1, 2, \ldots$; nous aurons

$$\text{(18)} \qquad \frac{2p_m}{(1+p_1^2+p_2^2+\ldots)^{\frac{m}{2}}} \leqq \frac{p_m^2}{p_1^2+p_2^2+\ldots} + \frac{p_1^2+p_2^2+\ldots}{(1+p_1^2+p_2^2+\ldots)^m}.$$

---

[1] Voir, par exemple, *Elementare Theorie der ganzen transcendenten Funktionen von endlicher Ordnung* [*Mathematische Annalen*, t. LVIII, 1904, p. 268, formule (b), en lisant, entre les deux membres, $\leqq$ au lieu de $<$].

Ajoutons ces inégalités (18) pour $m = 1, 2, \ldots$; nous obtiendrons

$$2S \leqq \frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}{p_1^2 + p_2^2 + \ldots} + \frac{p_1^2 + p_2^2 + \ldots}{p_1^2 + p_2^2 + \ldots} = 1 + 1 = 2,$$

$$S \leqq 1;$$

c'est l'inégalité (17) qu'il fallait démontrer, ou, en d'autres termes, le théorème A de M. Petrovitch.