BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur le contact des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 28-37
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__28_0>

Sur le contact des surfaces; par M. Halphen.

(Séance du 9 décembre 1874)

1. On a jusqu'à présent accordé peu d'attention aux questions qui concernent le contact des surfaces quelconques avec les surfaces algébriques. Plusieurs sont cependant dignes d'intérêt : on en jugera peut-être ainsi de celle qui a donné lieu au présent travail. Peu de mots suffiront pour en faire connaître l'origine.

Le contact d'ordre n entre deux surfaces, S, Σ, dont l'une est supposée donnée ainsi que le point de contact, exige, comme on sait, $N_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ conditions. Donc : 1° si l'autre surface, Σ, renferme M arbitraires, on peut en disposer de manière à élever l'ordre du contact jusqu'à la plus grande valeur de n qui laisse N_n non supérieur à M; 2° pour que le contact puisse s'élever à l'ordre immédiatement supérieur $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à $(N_{n+1} - M)$ conditions.

Cette proposition, à laquelle on borne le plus souvent cette partie de la théorie du contact, souffre, dans un des cas les plus simples, une exception remarquable signalée dans le *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, par M. Hermite. Il s'agit du cas où Σ est une surface arbitraire du second degré. Le nombre M est ici égal à 9. Conformément à ce qui vient d'être rappelé, le maximum de n est égal à 2. Mais la seconde partie de la conclusion cesse d'être exacte. Le contact devrait pouvoir s'élever au 3ème ordre en des points satisfaisant à *une* condition sur la surface donnée. Il n'en est rien : les points dont il s'agit satisfont à *deux* conditions. Ils sont donc en nombre fini. De plus, en chacun d'eux, il existe un faisceau de surfaces du second degré ayant avec la proposée un contact du 3ème ordre.

Cette exception est-elle un fait isolé, ou a-t-elle lieu dans d'autres cas? Telle est la question qui s'offre ici. Je prouverai qu'une exception analogue a lieu dans le cas où la surface arbitraire est du 3ème, du 4ème ou du 5ème degré, et qu'il n'en existe point pour les surfaces de degré supérieur.

2. Voici d'abord une remarque des plus simples, qui donne une première indication sur le sujet dont il s'agit. Soit $\Sigma = 0$ l'équation d'une surface, et $T = 0$ celle de son plan tangent en un point a. Soit λ une constante arbitraire. Les surfaces du faisceau $\Sigma + \lambda T^m = 0$ ont manifestement, en a, avec Σ, un contact d'ordre $(2m-1)$. Si, en effet, on substitue aux coordonnées, dans l'équation du faisceau, celles d'un point de Σ, à distance infiniment petite du 1er ordre de a, Σ s'évanouit, et T est du 2ème ordre. Donc $\Sigma + \lambda T^m$ est infiniment petit d'ordre $2m$. Donc le contact est bien d'ordre $(2m-1)$.

Supposons maintenant que Σ soit du degré m. Nous avons formé, de la sorte, en un point arbitraire a de Σ, un faisceau de surfaces du même degré, ayant avec la proposée un contact d'ordre $(2m-1)$. Donc :

Si, en un point d'une surface, il existe une surface de degré m, ayant avec la proposée, un contact d'ordre non supérieur à $(2m-1)$, il en existe une infinité.

Si, comme je l'ai rappelé plus haut, on calcule le maximum de n relatif à une surface arbitraire de degré m, on trouve, pour $m=2$, 3 ou 4, que ce maximum est $(2m-2)$, c'est-à-dire 2, 4 ou 6.

Par conséquent, un contact d'ordre 3, 5 ou 7, en un mot d'ordre $(2m-1)$, est exceptionnel. La remarque précédente nous avertit donc que, si ce contact exceptionnel a lieu, en un point d'une surface S, à l'égard d'une surface de degré 2, 3 ou 4, il a également lieu à l'égard d'une infinité de pareilles surfaces.

Le maximum de n, calculé de même pour le cas où $m=5$, est égal à 9. Ici le nombre N_9 des conditions est précisément le même que celui des arbitraires, à savoir 55. On croirait donc qu'en chaque point d'une surface S, il existe *une* surface du 5$^{\text{ème}}$ degré ayant avec S un contact du 9$^{\text{ème}}$ ordre. Je dis *une* à cause de la forme linéaire des équations qui servent à déterminer la surface. Mais, d'après la remarque ci-dessus, s'il en existe une, il en existe une infinité. Voilà donc encore une exception à la théorie générale; et celle-là est un peu différente des précédentes.

Pour les valeurs de m supérieures à 5, le maximum de n, calculé de même, est, on le prouve aisément, supérieur à $(2m-1)$. La remarque ci-dessus cesse alors d'être utile.

Les indications précédentes ne suffisent pas pour résoudre les questions proposées. Une étude plus approfondie est nécessaire. Avant de l'aborder, je ferai remarquer que cet ordre de recherches peut être envisagé d'un point de vue, au premier abord, différent.

3. Soit, comme plus haut, Σ une surface à M arbitraires, et n l'ordre le plus élevé du contact que ces arbitraires permettent d'établir entre Σ et une surface donnée S en un point donné. Pour que l'ordre de ce contact puisse s'élever à $(n+1)$, il faut que le point de contact satisfasse à des conditions qui se traduisent par des relations entre les coordonnées et les dérivées partielles prises sur S. Or il est manifeste que ces relations ne sont autre chose que les équations aux dérivées partielles du groupe de surfaces Σ; c'est-à dire les équations qu'on obtient en différentiant l'équation de Σ jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination de toutes les arbitraires, et en faisant cette élimination.

Cette double interprétation des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes est un fait général en analyse, et sur lequel je pourrai revenir dans une autre occasion. Dans tous les cas de la théorie du contact, elle est immédiatement évidente. Par exemple, l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées, considérée comme définissant un lieu de points sur une surface donnée, y définit le lieu des points de contact des droites surosculatrices, c'est-à-dire ayant avec la surface un contact du 3ème ordre.

La considération de ce lieu, qui s'offre ici comme un exemple, fournit une explication simple de l'exception relative au contact des surfaces du second degré. Je l'indique en passant. Soit P cette courbe. Si, en un point p d'une surface S, il existe une surface Σ du 2ème degré ayant avec S un contact du 3ème ordre, les droites de Σ, qui passent en p, ont avec S un contact de ce même ordre. Le point p appartient donc doublement à la ligne P ; il en est un point double. Il n'y a donc qu'un nombre fini de tels points. Ainsi :

Les points d'une surface S, *en lesquels il existe des surfaces du* 2ème *degré ayant avec* S *un contact du* 3ème *ordre sont des points doubles du lieu des points de contact de* S *avec ses droites surosculatrices.*

La réciproque de cette proposition est exacte, comme on le verra plus loin.

J'arrive maintenant à la question générale, qui peut être ainsi posée : *Quelles sont les équations aux dérivées partielles d'ordre minimum, ne contenant aucune constante arbitraire, auxquelles satisfont les surfaces de degré m?*

4. Les surfaces de degré m contiennent un nombre M d'arbitraires, marqué par

$$M = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1.$$

J'en prends une passant à l'origine O des coordonnées, et y touchant le plan des xy. Elle contient (M — 3) arbitraires, et satisfait à 3 équations, à savoir, pour $x = 0$, $y = 0$,

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{dz}{dy} = 0. \tag{1}$$

Formons les dérivées partielles de z, au point O, jusqu'à l'ordre minimum qui permette l'élimination des (M — 3) arbitraires, et faisons cette élimination. Nous obtenons ainsi des équations :

$$0 = 0, \quad 0_1 = 0, \quad \ldots, \tag{2}$$

entre les dérivées partielles considérées. Ces équations, à cause de (1), ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du 1er ordre.

Je dis que *les équations* (2) *sont précisément les équations aux dérivées partielles des surfaces de degré m*, que je cherche.

Changeons, en effet, de coordonnées, en posant :

$$a + x = X, \quad b + y = Y, \quad c + px + qy + z = Z. \tag{3}$$

Tirons de ces équations x, y, z et remplaçons ces variables par leurs expressions dans (1) et (2). Il est clair que les équations (2) ne changent pas, sauf que x, y, z sont remplacées par les lettres X, Y, Z. Quant aux équations (1), elles deviennent, pour $X = a$, $Y = b$,

$$(4) \qquad Z = c, \quad \frac{dZ}{dx} = p, \quad \frac{dZ}{dy} = q.$$

Les équations (2) et (4) conviennent donc aux surfaces de degré m, passant au point $X = a$, $Y = b$, $Z = c$, et y touchant le plan

$$Z - c = p(X - a) + q(Y - b).$$

Il suffira d'éliminer les constantes arbitraires a, b, c, p, q pour avoir les équations qui conviennent à toutes les surfaces de degré m. Ces équations se réduisent donc aux équations (2). Ce qu'il fallait démontrer.

Donc, premier résultat : *les équations aux dérivées partielles des surfaces d'un degré donné, ne contiennent ni les coordonnées, ni les dérivées partielles du* 1^er^ *ordre.*

Ce résultat s'applique également à toute famille de surfaces, telle qu'on puisse mener une d'elles par un point quelconque, de manière à y toucher un plan quelconque. Dans ce cas général, comme dans celui qui nous occupe, on peut, pour former les équations, supposer la surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy.

Dans cette hypothèse, si un terme de l'équation de la surface est de la forme $Az^p y^r x^q$, et que x et y soient infiniment petits du 1^er^ ordre, ce terme est lui-même infiniment petit d'ordre $(r + q + 2p)$. Comme les dérivées partielles de z sont, à des facteurs numériques près, les coefficients du développement de z suivant les puissances croissantes de x et y, on voit que le terme considéré n'a aucune influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à $(r + q + 2p)$.

Ainsi, dans le cas du 2^ème^ degré, le terme en z^2 n'a pas d'influence sur les dérivées partielles d'ordre inférieur à 4. Les 7 dérivées du 2^ème^ et du 3^ème^ ordre dépendent donc simplement de 5, et non pas de 6 arbitraires $(M - 3 = 6)$. *Donc il y a au moins deux équations du* 3^ème^ *ordre.*

Pour le 3^ème^ degré, le terme en z^3 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 6^ème^ ordre. Les 18 dérivées du 2^ème^ au 5^ème^ ordre dépendent donc de 15 et non de 16 coefficients $(M - 3 = 16)$. *Donc au moins trois équations du* 5^ème^ *ordre.*

Pour le 4^ème^ degré, le terme en z^4 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 8^ème^ ordre. Les 33 dérivées du 2^ème^ au 7^ème^ ordre dépendent donc de 30, et non de 31 coefficients $(M - 3 = 31)$. *Donc encore au moins trois équations du* 7^ème^ *ordre.*

Pour le 5^ème^ degré, le terme en z^5 n'intervient pas dans le calcul des dérivées avant le 10ème ordre. Les 52 dérivées du 2ème au 9ème ordre dépendent donc de 51 et non de 52 coefficients ($M-3=52$). *Il y a donc au moins une équation du 9ème ordre.*

Là s'arrête l'application de cette nouvelle remarque. Elle ne diffère pas essentiellement de celle qui a été faite plus haut, n° 2. Elle la complète et fait prévoir les résultats du calcul dont je vais m'occuper.

5. Je considère une surface passant à l'origine des coordonnées et y touchant le plan des xy, conformément à une remarque du numéro précédent. Soit

$$z = S_2 + S_3 + S_4 + \dots \tag{5}$$

le développement de z suivant les puissances croissantes de x et y. Je désigne ici par S_k un polynôme homogène en x, y, de degré k. Ses coefficients sont, à des facteurs numériques près, les dérivées partielles d'ordre k.

Je représente de même par une lettre tout polynôme homogène en x, y, en indiquant son degré par l'indice inférieur, en sorte que :

$$T^{(k)} = t_0^{(k)} + t_1^{(k)} + t_2^{(k)} + \dots + t_k^{(k)} \tag{6}$$

est un polynôme quelconque en x, y, de degré k. D'après ces définitions, les symboles $t_{k+1}^{(k)}$, $t_{k+2}^{(k)}, \dots$ sont nuls.

L'équation d'une surface de degré m, d'après ces conventions, pourra s'écrire :

$$T^{(m)} + T^{(m-1)}z + T^{(m-2)}z^2 + \dots\dots + T^{(1)}z^{m-1} + T^{(0)}z^m = 0. \tag{7}$$

On obtiendra toutes les relations entre les dérivées partielles de z et les coefficients de (7) en écrivant que l'expression (6), mise à la place de z dans (7), fournit une identité.

Je forme les termes par degrés successifs croissants. J'ai ainsi :

$$t_0^{(m)} = 0, \quad t_1^{(m)} = 0, \tag{8}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_2^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_3^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_3 + t_1^{(m-1)}S_2 = 0, \\ t_4^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_4 + t_1^{(m-1)}S_3 + t_2^{(m-1)}S_2 + t_0^{(m-2)}S_2^2 = 0, \\ t_5^{(m)} + t_0^{(m-1)}S_5 + t_1^{(m-1)}S_4 + t_2^{(m-1)}S_3 + t_3^{(m-1)}S_2 + 2t_0^{(m-2)}S_2S_3 + t_1^{(m-2)}S_2^2 = \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \tag{9}$$

Pour appliquer ces équations, je suppose d'abord $m=2$. Alors $t_3^{(m)}$ est nul. Le seconde des équations (9) indique que S_3 *est divisible par* S_2. Donc :

Les surfaces du 2ème degré satisfont à deux équations aux dérivées partielles du 3ème ordre que l'on obtient en écrivant que le polynôme du 3ème degré en α

$$A = \alpha^3 \frac{d^3z}{dx^3} + 3\alpha^2 \frac{d^3z}{dx^2dy} + 3\alpha \frac{d^3z}{dxdy^2} + \frac{d^3z}{dy^3}$$

est divisible par le polynôme du 2ème degré

$$B = \alpha^2 \frac{d^2z}{dx^2} + 2\alpha \frac{d^2z}{dxdy} + \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Ce sont précisément les conditions, indiquées par M. Hermite, pour la possibilité du contact du 3ème ordre entre une surface et une surface du second degré.

Les équations (9) sont évidemment susceptibles elles-mêmes de la double interprétation signalée plus haut, n° 3. On y peut considérer les coefficients des polynômes S comme donnés. Les équations servent alors à déterminer la surface (7) de manière à ce qu'elle ait avec la surface (5) un contact d'ordre égal au degré de celle des équations (9) à laquelle on s'arrête.

Si donc on suppose que S_3 soit donné, divisible par S_2, les équations (8) et les deux premières des équations (9) déterminent, dans l'hypothèse $m = 2$, un faisceau de surfaces du 2ème degré, de la forme $\Sigma + \lambda z^2 = 0$, qui ont avec la surface proposée, en O, un contact du 3ème ordre.

6. Quelques mots encore au sujet du contact des surfaces du 2ème degré. L'équation d'une surface étant mise sous la forme du développement (5), les points d'intersection de cette surface et du plan des xy doivent vérifier la relation

$$(10) \qquad 0 = S_2 + S_3 + S_4 + \ldots.$$

S'il arrive que la courbe, lieu de ces points, se compose de plusieurs lignes distinctes, et que $Q = 0$ soit l'équation, sous forme entière, de l'une d'elles, le second membre de (10) est divisible par Q.

Ce fait se présente dans le cas d'une surface réglée. Pour la génératrice rectiligne qui passe en O, Q est linéaire et homogène. C'est un des deux facteurs de S_2. Le second membre de (10) étant divisible par ce facteur, il en est ainsi de S_3. Par suite, *on obtient*, comme on le sait d'ailleurs, *l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées en écrivant que le polynôme* A, du numéro précédent, *a un facteur commun avec le polynôme* B.

Que l'on se reporte au résultat du numéro précédent, et l'on voit que *les deux équations aux dérivées partielles des surfaces du 2ème degré expriment la double génération rectiligne de ces surfaces.* Comme conséquence, l'équation du 2ème degré à trois variables en est la solution générale.

Au point de vue de la théorie du contact, les points d'une surface, en lesquels les polynômes A et B ont un facteur commun, sont les points de contact des droites surosculatrices ; ils forment ce que j'ai désigné précédemment par la ligne P. D'ailleurs, nous venons de trouver que les points où A et B ont deux facteurs communs sont ceux où le contact du 3ème ordre avec une surface du 2ème degré est possible, et inversement. Nous retrouvons donc par le calcul que ces points sont doubles sur la ligne P, et aussi la proposition réciproque.

7. J'applique maintenant les équations du n° 5 au cas où $m=3$. Ici $t_4^{(m)}$, $t_5^{(m)}$, $t_3^{(m-1)}$ sont nuls. La 3ème des équations (9), si l'on y fait $t_0^{(2)}=1$, ce qui est permis, devient

$$(11) \qquad S_4+t_1^{(2)}S_3+(t_2^{(2)}+t_0^{(1)}S_2)S_2=0.$$

Je dis qu'on en peut déduire aisément les polynômes $t_1^{(2)}$ et $t_2^{(2)}+t_0^{(1)}S_2$.

A cet effet, je considère la fraction rationnelle $\frac{S_4}{S_3}$ en y supposant que le rapport $\frac{x}{y}$ soit remplacé, dans cette fraction, par une racine de $S_2=0$. A ce point de vue, la fonction rationnelle peut être réduite à un polynôme du 1er degré homogène en x, y, dont les coefficients s'expriment rationnellement par ceux de S_4, S_3, S_2. La définition de ce polynôme A_1 peut être rappelée abréviativement par la relation

$$(12) \qquad A_1 \equiv \frac{S_4}{S_3} \text{ (mod. } S_2).$$

Sans autre explication, on comprend de même quel est le polynôme A_2 du second degré, homogène en x, y, qui est défini par

$$(13) \qquad A_2 \equiv \frac{S_4}{S_2} \text{ (mod. } S_3).$$

Le polynôme $A_1S_3+A_2S_2$, qui est, comme S_4, du 4ème degré, lui est égal pour 5 valeurs distinctes de la variable $\frac{x}{y}$, à savoir les racines de S_2 et de S_3. C'est donc précisément S_4. On en conclura aisément que la solution de l'équation (11) est donnée par

$$(14) \qquad t_1^{(2)}=-A_1,\ t_2^{(2)}+t_0^{(1)}S_2=-A_2.$$

La 4ème des équations (9) devient maintenant

$$(15) \qquad S_5-A_1S_4-A_2S_3+(t_0^{(1)}S_3+t_1^{(1)}S_2)S_2=0.$$

Désignons par B_5 le polynôme

$$B_5=S_5-A_1S_4-A_2S_3,$$

dont les coefficients sont exprimables rationnellement par ceux de S_2, S_3, S_4 et S_5. L'équation (15) exprime 3 conditions :

1° B_5 *est divisible par* S_2; ce qui donne 2 équations.

2° Le *quotient* $\frac{B_5}{S_2}$ *est de la forme* $\alpha S_3+\beta S_2$, *α et β étant une constante et un polynôme du* 1er *degré, indéterminés*, ce qui donne une équation.

Il s'agit de former cette dernière équation.

Je dénote par un accent les dérivées prises par rapport à la variable $\frac{x}{y}$, les coefficients des polynômes étant, bien entendu, considérés comme constants.

Puisque B_5 est divisible par S_2, j'ai

$$\frac{B_5}{S_2} \equiv \frac{B'_5}{S'_2} \pmod{S_2}.$$

Soit donc

$$(16) \qquad \frac{B'_5}{S'_2} \equiv y^2(ax + by) \pmod{S_2},$$

$$(17) \qquad S_3 \doteq y^2(cx + \varepsilon y) \pmod{S_2}.$$

On verra sans peine que l'équation cherchée est

$$(18) \qquad a\varepsilon - bc = 0,$$

a, b, c, ε étant, comme l'indiquent les relations (16) et (17), exprimables rationnellement en fonction des dérivées partielles du 2ème au 5ème ordre.

Ainsi : *En joignant à l'équation* (18) *celles qu'on obtient en exprimant que* B_5 *est divisible par* S_3, *on a les trois équations aux dérivées partielles du 5ème ordre des surfaces du 3ème degré.*

A un autre point de vue, *ces trois équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du 3ème degré puisse s'élever au 5ème ordre. Quand elles sont satisfaites en un point, il existe en ce point un faisceau de telles surfaces du 3ème degré.*

Pour cette dernière partie, on voit, en effet, que les équations considérées, jointes aux deux premières équations (9) et à (8), déterminent tous les coefficients de l'équation du 3ème degré, sauf celui du terme en z^3. Les surfaces cherchées sont donc de la forme $\Sigma + \lambda z^3 = 0$.

8. Considérons maintenant les équations (9) dans le cas général. Nous les distinguons en deux groupes : en premier lieu, la série des premières jusqu'à celle qui commence par le terme $t_m^{(m)}$, inclusivement. Les équations de ce groupe serviront à déterminer

$$T^{(m)} = t_0^{(m)} + t_1^{(m)} + t_2^{(m)} + \dots + t_m^{(m)},$$

quand les autres polynômes t auront été déterminés par les équations suivantes, qui forment le second groupe.

C'est seulement ce second groupe, qui ne contient pas les polynômes $t^{(m)}$, qui servira à trouver les équations aux dérivées partielles cherchées. C'est ainsi que le calcul a été fait dans les deux cas précédents.

Ainsi, par cette voie, tous les coefficients de $T^{(m)}$, au nombre de $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$, sont immédiatement éliminés. Les équations qui subsistent, et dont les degrés, par rapport à $\frac{x}{y}$, vont en croissant, commencent au degré $(m+1)$. Chacune d'elles fournit des équations distinctes, indépendantes de x et y, en nombre égal à son degré en $\frac{x}{y}$. Ces équations sont d'ailleurs linéaires et homogènes par rapport aux coefficients des polynômes t, qu'il s'agit d'éliminer. Dès que leur nombre permettra l'élimination complète, cette élimination fournira les équations aux dérivées partielles que l'on cherche.

Pour le 4ème et le 5ème degré, conformément à des remarques déjà faites, l'élimination est possible avant que la constante $T^{(0)}$ se soit introduite. Ainsi, pour le 4ème degré, on aura à considérer des équations des degrés 5, 6, 7 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à $6+7+8=21$ équations linéaires et homogènes, entre lesquelles on doit éliminer les coefficients de $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$. En formant ces équations, ce qui est facile, mais un peu compliqué, on verra qu'aucun de ces coefficients, au nombre de 19, n'y manque. On aura donc, par l'élimination, 3 équations dû 7ème ordre. On peut donc dire que :

Les surfaces du 4ème degré satisfont à 3 équations aux dérivées partielles du 7ème ordre.

A un autre point de vue, *ces équations expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'en un point d'une surface, le contact avec une surface du 4ème degré puisse s'élever au 7ème ordre. En un tel point, il existe un faisceau de telles surfaces du 4ème degré.*

Pour le 5ème degré, on aura à considérer des équations des degrés 6, 7, 8, 9 en $\frac{x}{y}$. Elles donneront lieu à 34 équations linéaires et homogènes entre les coefficients de $T^{(4)}$, $T^{(3)}$, $T^{(2)}$, $T^{(1)}$, au nombre de 34, et dont aucun n'y manque. Donc :

Les surfaces du 5ème degré satisfont à une équation aux dérivées partielles du 9ème ordre.

Cette équation caractérise, sur une surface quelconque, le lieu des points en lesquels le contact avec une surface du 5ème degré peut s'élever au 9ème ordre. En chaque point de ce lieu, il existe un faisceau de surfaces du 5ème degré ayant avec la surface considérée des contacts de cet ordre.

Il est clair que l'équation du 9ème ordre dont il s'agit a pour solution générale une surface qui, en chacun de ses points, a un contact du 9ème ordre avec un faisceau de surfaces du 5ème degré.

Au delà du $5^{ème}$ degré, les mêmes raisonnements prouvent sans peine que la théorie générale, rappelée au n° 1, a toujours lieu. Il paraît bien difficile de parvenir à trouver la loi des équations définitives. S'il est cependant permis de l'espérer, c'est peut-être en suivant la marche que je viens d'indiquer, et dont l'effet est de faire disparaître immédiatement un assez grand nombre des quantités que l'on doit éliminer.