BULLETIN DE LA S. M. F.

L. AUTONNE

Sur les polynomes à coefficients et à variable hypercomplexes

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 205-212

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__205_0>

SUR LES POLYNOMES A COEFFICIENTS ET A VARIABLE HYPERCOMPLEXES;

Par M. Léon Autonne.

I.

Dans une Communication récente (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* 28 mai 1906), intitulée : *Sur les propriétés qui, pour les fonctions d'une variable hypercomplexe, correspondent à la monogénéité,* j'ai énoncé diverses propositions relatives aux variables et aux fonctions hypercomplexes. La théorie détaillée, avec les démonstrations, est donnée dans un Mémoire, de même titre que la Communication, qui doit paraître dans le *Journal de Mathématiques,* de M. Jordan.

Je me sers notamment de la terminologie et des notations de M. Frobenius, telles que l'éminent algébriste les donne dans sa *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin,* pour avril 1903).

La théorie générale conduit, en ce qui concerne les polynomes à coefficients et à variables hypercomplexes, à diverses propositions, que je développe ci-après.

Rappelons d'abord les théorèmes sur lesquels on s'appuiera. Pour les démonstrations, on renverra aux publications précitées.

II.

1°. Prenons un groupe *simple* (ε) d'ordre $n = r^2$. Une quantité hypercomplexe x de (ε) est

$$(1) \qquad x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha \qquad \{\alpha = 1, 2, \ldots, n\}$$

où les n *coordonnées* x_α de x sont des nombres scalaires (c'est-à-dire réels ou complexes, ordinaires). Les n symboles ε_α ont une multiplication (associative, mais non commutative) définie par la formule $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, n\}$

$$(2) \qquad \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma},$$

où les $a_{\alpha\beta\gamma}$ sont n^3 constantes scalaires. Si, pour $x = \Sigma\varepsilon x$, $y = \Sigma\varepsilon y$, $z = \Sigma\varepsilon z$, on a, dans le groupe (ε), $x = yz$, il viendra, eu égard à (2),

$$\sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha = \left(\sum_\beta \varepsilon_\beta y_\beta\right)\left(\sum_\gamma \varepsilon_\gamma z_\gamma\right) = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma y_\beta z_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma}\, y_\beta z_\gamma$$

d'où la formule fondamentale

$$(3) \qquad x_\alpha = \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} y_\beta z_\gamma.$$

2°. Au lieu des x_α et ε_α on peut introduire des coordonnées $x_{\lambda\mu}$ et des symboles $\varepsilon_{\lambda\mu}$ à double indice ($\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r$; $r^2 = n$), tels que les formules (2) deviennent

$$(4) \qquad \varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\rho\nu} = 0, \quad \text{pour} \quad \mu \neq \rho, \qquad \varepsilon_{\lambda\mu}\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\lambda\nu}$$

Le groupe (ε) est isomorphe sans hémiédrie aux groupes des matrices r-aires

$$(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{r1} & \ldots & x_{rr} \end{pmatrix};$$

si $x = yz$, on a $(x) = (y)(z)$, et, réciproquement,

$$(5) \qquad x_{\lambda\mu} = \sum_\rho y_{\lambda\rho} z_{\rho\mu}, \qquad \{ \lambda, \mu, \rho = 1, 2, \ldots, r \}.$$

Les coordonnées à double indice $x_{\lambda\mu}$ seront dites *spéciales;* elles sont d'ailleurs liées aux x_α par des relations

$$\sum_\alpha b_{\alpha\lambda\mu} x_\alpha = x_{\lambda\mu}, \qquad b_{\alpha\lambda\mu} = \text{const. scalaire,}$$
$$\{ \alpha = 1, 2, \ldots, n; \qquad \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, r \}.$$

3°. Avec les n variables scalaires x_α formons la *variable hypercomplexe*

$$(6) \qquad x = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha x_\alpha, \qquad \{ \alpha = 1, 2, \ldots, n \}.$$

L'expression

$$(7) \qquad \mathrm{X} = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha \mathrm{X}_\alpha(x_1, \ldots, x_n)$$

sera dite *fonction* de la variable hypercomplexe x.

Avec M. Frobenius, je désignerai par

$f(x)$, une fonction scalaire des n variables scalaires x_α,
$f((x))$, une fonction de la variable hypercomplexe x.

En coordonnées spéciales (2°), il viendra $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2, \ldots, r;$ $n = r^2\}$

$$(8) \qquad x = \sum_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma} x_{\beta\gamma}, \qquad X = \sum_{\alpha\delta} \varepsilon_{\alpha\delta} X_{\alpha\delta}(x).$$

4°. Posons $x_{\beta\gamma} = z_{\gamma\beta}$; prenons les $n^2 = r^4$ dérivées partielles

$$\frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}};$$

rangeons-les suivant les lignes d'indices $\alpha\delta$ et les colonnes d'indices $\gamma\beta$. On aura la matrice jacobienne des X par rapport aux z. Nommons-la H.

Disposons les $\alpha\delta$ et les $\gamma\beta$ suivant la suite

$$11, \quad 12, \quad \ldots, \quad 1r; \quad 21, \quad 22, \quad \ldots, \quad 2r; \quad r1, \quad r2, \quad \ldots, \quad rr.$$

Les r valeurs des α décomposent H en r bandes horizontales, de r lignes chacune. Les r valeurs de γ définissent de même r bandes verticales de r colonnes chacune. H est ainsi décomposée en r^2 matrices partielles $\theta_{\alpha\gamma}$, suivant le schema

$$H = \begin{pmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \ldots & \theta_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \theta_{r1} & \theta_{r2} & \ldots & \theta_{rr} \end{pmatrix} = \{\theta_{\alpha\gamma}\};$$

la dérivée partielle $\dfrac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}}$ est, dans la matrice $\theta_{\alpha\gamma}$, l'élément de ligne δ et de colonne β.

5°. J'introduis maintenant la matrice n-aire $W = \{\theta'_{\alpha\gamma}\}$, laquelle diffère de H par la *transposition* de chaque matrice partielle $\theta_{\alpha\gamma}$, c'est-à-dire par l'*échange* des deux indices β et δ. Si l'on pose

$$w_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial X_{\alpha\delta}}{\partial z_{\gamma\beta}},$$

les $n^2 = r^4$ éléments $w_{\alpha\beta\gamma\delta}$ de la matrice W sont disposés suivant les lignes $\alpha\beta$ et les colonnes $\gamma\delta$.

H et W se définissent ainsi réciproquement d'une façon complète.

Quand on ne prend plus de coordonnées spéciales, H et W se définissent encore mutuellement sans ambiguïté. $w_{\lambda\mu}$ étant dans W l'élément de ligne λ et de colonne μ, $\{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, n\}$, on a $\{\rho, \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n\}$.

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} &= \sum_{\lambda\mu} w_{\lambda\mu}[\alpha\beta]_{\lambda\mu}, \\ [\alpha\beta]_{\lambda\mu} &= \sum_{\rho} a_{\alpha\lambda\rho}\, a_{\rho\beta\mu}, \end{aligned} \right.$$

les a étant les constantes scalaires des formules (2).

On remarque aussi que

$$(10) \qquad \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu = \sum_{\alpha} \varepsilon_\alpha [\alpha\beta]_{\lambda\mu}.$$

6°. Je n'insisterai pas sur les propriétés, assez remarquables, de la matrice W. On les trouvera dans mes publications précitées. Je passe de suite au problème, objet de la présente Note.

III.

7°. Je désigne (3°) par :

$P_m(x)$, un polynome de degré m, à coefficients scalaires et aux n variables scalaires $x_1, \ldots, x_n$;

$p_m(x)$, un polynome $P_m(x)$ *homogène*.

L'expression

$$\mathfrak{M}_m((x)) = \mathrm{a}_0\, x\, \mathrm{a}_1\, x \ldots \mathrm{a}_{m-1}\, x\, \mathrm{a}_m,$$

aux $m + 1$ *coefficients* hypercomplexes $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_m$, est dite un *monome en x* de degré m.

Une somme de monomes, de degrés $m' \leqq m$, sera un polynome $\mathfrak{P}_m((x))$. Si tous les monomes ont le même degré m, $\mathfrak{P}_m((x))$ deviendra *homogène* et s'écrira

$$\mathfrak{p}_m((x))$$

On a évidemment, pour coordonnées de la quantité hypercomplexe $\mathfrak{p}_m((x))$, des expressions $p_m(x)$ ci-dessus. La quantité $\mathfrak{P}_m(x)$ aura pour coordonnées des expressions $P_m(x)$.

8°. Voici maintenant la question que je vais résoudre dans la présente Note :

Réciproquement à ce qui précède, une expression hypercomplexe X, *dont les coordonnées sont des* $P_m(x)$, *est-elle toujours un polynome* $\mathfrak{P}_m((x))$?

On démontrera que la réponse est : *oui, et d'une infinité de façons.*

9°. Soit donc

$$X = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha m X_\alpha(x), \tag{11}$$

où les $X_\alpha(x)$ sont des $P_m(x)$ (7°). Comme un polynome quelconque est toujours une somme de polynomes homogènes, il suffira, pour la démonstration du théorème, de supposer que les $X_\alpha(x)$ sont des $p_m(x)$ (7°). On a à chercher si X peut être effectivement un $\mathfrak{p}_m((x))$ (7°).

10° Le théorème d'Euler donne $\{\alpha, \beta, \lambda, \mu, \rho, \tau = 1, 2, \ldots, n\}$, eu égard aux formules (9) et (10),

$$X = \sum_{\alpha\beta} \varepsilon_\alpha x_\beta \frac{\partial X_\alpha}{\partial x_\beta} = \sum_{\alpha\beta\lambda\mu} \varepsilon_\alpha x_\beta w_{\lambda\mu}[\alpha\beta]_{\lambda\mu} = \sum_{\beta\lambda\mu} \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu x_\beta w_{\lambda\mu}. \tag{12}$$

Décomposons la matrice n-aire $W \equiv [w_{\lambda\mu}]$ en un produit de deux matrices n-aires, $W = UV'$,

$$U = [u_{\lambda\tau}], \quad V = [v_{\mu\tau}], \quad V' = [v_{\tau\mu}], \quad W = UV' = \left[\sum_\tau u_{\lambda\tau} v_{\mu\tau}\right]. \tag{13}$$

La formule (12) donne

$$\left\{\begin{aligned} X &= \sum_{\beta\lambda\mu\tau} \varepsilon_\lambda \varepsilon_\beta \varepsilon_\mu x_\beta u_{\lambda\tau} v_{\mu\tau} \\ &= \sum_\tau \left(\sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{\lambda\tau}\right)\left(\sum_\beta \varepsilon_\beta x_\beta\right)\left(\sum_\mu \varepsilon_\mu v_{\mu\tau}\right) = \sum_\tau u_\tau x v_\tau, \end{aligned}\right. \tag{14}$$

en désignant par u_τ et v_τ les quantités hypercomplexes.

$$u_\tau = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda u_{\lambda\tau}, \qquad v_\tau = \sum_\mu \varepsilon_\lambda v_{\mu\tau}. \tag{15}$$

11°. Prenons pour V une matrice quelconque, mais à déterminant $|V| \neq 0$ et à éléments $v_{\mu\tau}$ scalaires et constants; alors

$$U = WV'^{-1}. \tag{16}$$

Les coefficients $w_{\lambda\mu}$ de W sont des polynomes $p_{m-1}(x)$; la formule (16) montre qu'il en est de même pour les $u_{\lambda\tau}$. Chacune des n quantités hypercomplexes u_τ est donc de même nature que X, mais le degré m a diminué d'une unité. On pourra donc écrire

$$u_\tau = \sum_{\tau_1} u_{\tau_1} x v_{\tau_1} \qquad \{ \tau_1 = 1, 2, \ldots, n \}.$$

On donnera encore aux coordonnées de v_{τ_1} des valeurs constantes; les coordonnées de u_{τ_1} seront alors des polynomes homogènes $p_{m-2}(x)$ et ainsi de suite.

Tout compte fait, on pourra écrire finalement

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \sum\limits_{\tau_1 \ldots \tau_m} \mathfrak{a}_{\tau_1 \tau_2 \ldots \tau_m} \prod\limits_i (x v_{\tau_i}) \\ \{ i = 1, 2, \ldots, m; \qquad \tau_i = 1, 2, \ldots, n \}, \end{array} \right. \tag{17}$$

où les n quantités hypercomplexes v_{τ_i} ont pour coordonnées n^2 constantes scalaires arbitraires, à déterminant $\neq 0$.

$$\mathfrak{a}_{\tau_1 \ldots \tau_m} = \text{const. hypercomplexe.}$$

12°. La formule (17) montre que X est la somme de n^m monomes

$$\mathfrak{M}_m((x)) \quad (7'')$$

c'est-à-dire que X est un polynome

$$\mathfrak{P}_m((x)),$$

où les quantités v_{τ_i} peuvent être choisies d'une infinité de façons. C'est ce qui est annoncé au 8°.

13°. La formule (17) peut être simplifiée. Nommons E la matrice n-aire unité. On peut faire, au calcul du 11°,

$$V = V' = E, \qquad v_{\mu\tau} = 0, \qquad v_{\tau\tau} = 1;$$

d'où

$$v_\tau = \varepsilon_\tau, \qquad X = \sum_\tau u_\tau x \varepsilon_\tau$$

et ainsi de suite.

Alors (17) devient

$$(18)\quad \begin{cases} X = \mathfrak{P}_m((x)) = \sum\limits_{\tau_1 \ldots \tau_i \ldots \tau_m} a_{\tau_1 \ldots \tau_i \ldots \tau_m}\, x\varepsilon_{\tau_1}\, x\varepsilon_{\tau_2} \ldots x\varepsilon_{\tau_i} \ldots x\varepsilon_{\tau_m} \\ \{\tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_m = 1, 2, \ldots, n\}. \end{cases}$$

14°. Les coordonnées de l'hypercomplexe X sont des polynomes $p_m(x)$ à coefficients scalaires b et à variables scalaires $x_1, \ldots, x_n$. Il est facile d'établir des relations mutuelles entre les constantes scalaires b et les constantes hypercomplexes a des formules (17) et (18). Le calcul est plus court quand on emploie les coordonnées spéciales (2°) $x_{\xi\eta}$, $\{\xi, \eta = 1, 2, \ldots, r;\ n = r^2\}$ et les symboles à double indice $\varepsilon_{\xi\eta} = \binom{\xi}{\eta}$, de façon que

$$x = \sum_{\xi\eta} \binom{\xi}{\eta} x_{\xi\eta} \text{ [et analogue de la formule (4)];}$$

$$\binom{\lambda}{\mu}\binom{\rho}{\nu} = 0, \qquad \binom{\lambda}{\mu}\binom{\mu}{\nu} = \binom{\lambda}{\nu}.$$

15°. Dans la formule (18) faisons

$$\varepsilon_{\tau_i} = \varepsilon_{\lambda_i \mu_i} = \binom{\lambda_i}{\mu_i}; \qquad x = \sum_{\xi_1\eta_1} x_{\xi_1\eta_1}\binom{\xi_1}{\eta_1} = \ldots = \sum_{\xi_i\eta_i} x_{\xi_i\eta_i}\binom{\xi_i}{\eta_i} = \ldots.$$

Désignons le coefficient $a_{\tau_1 \ldots \tau_m}$ par

$$a\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_i \ldots \lambda_m \\ \mu_1 \ldots \mu_i \ldots \mu_m \end{pmatrix};$$

mettons en évidence les coordonnées scalaires de l'hypercomplexe a, en écrivant

$$(19)\quad \begin{cases} a\begin{pmatrix} \lambda_1 \ldots \lambda_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{pmatrix} = \sum\limits_{\alpha\beta} \binom{\alpha}{\beta}\, a\left(\begin{matrix} \lambda_1 \ldots \lambda_m \\ \mu_1 \ldots \mu_m \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right), \\ \{\alpha, \beta, \lambda_i, \mu_i, \xi_i, \eta_i = 1, 2, \ldots, r; \quad n = r^2\}. \end{cases}$$

La formule (18) devient

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_m((x)) = \sum x_{\xi_1\eta_1} \ldots x_{\xi_m\eta_m}\, a\left(\begin{matrix} \lambda_1 \ldots \\ \mu_1 \ldots \end{matrix}\middle| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}\right) \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} = \binom{\alpha}{\beta}\binom{\xi_1}{\eta_1}\binom{\lambda_1}{\mu_1} \ldots \binom{\xi_i}{\eta_i}\binom{\lambda_i}{\mu_i} \ldots \binom{\xi_m}{\eta_m}\binom{\lambda_m}{\mu_m}. \end{cases}$$

Pour que $\mathfrak{D} \neq 0$, il faut que

$$\beta = \xi_1, \quad \eta_1 = \lambda_1, \quad \ldots, \quad \eta_i = \lambda_i, \quad \ldots, \quad \eta_m = \lambda_m,$$
$$\mu_1 = \xi_2, \quad \ldots, \quad \mu_{m-1} = \xi_m,$$

c'est-à-dire

$$\beta = \xi_1, \quad \mu_1 = \xi_2, \quad \ldots, \quad \mu_{m-1} = \xi_m, \quad \eta_i = \lambda_i.$$

$\mathfrak{D}$ se réduit à $\binom{\alpha}{\eta_m}$. La formule (20) devient

$$(21) \qquad \mathfrak{P}_m((x)) = \sum \binom{\alpha}{\eta_m} x_{\xi_1\eta_1} \ldots x_{\xi_m\eta_m}\, \mathrm{a}\left(\begin{matrix} \eta_1 \ldots \eta_{m-1}\, \eta_m \\ \xi_2 \ldots \xi_m \quad \mu_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ \xi_1 \end{matrix}\right).$$

Comme on a d'autre part

$$\mathrm{X} = \mathfrak{P}_m((x)) = \sum_{\alpha\eta_m} \binom{\alpha}{\eta_m} \mathrm{X}_{\alpha\eta_m}(x;\, b),$$

voici ce que donne l'identification des deux expressions, de $\mathfrak{P}_m((x))$: *le coefficient b, dans $\mathrm{X}_{\alpha\eta_m}$, du produit*

$$\Xi = x_{\xi_1\eta_1} \ldots x_{\xi_m\eta_m}$$

est la somme des constantes scalaires

$$\mathrm{a}\left(\begin{matrix} \eta_1 \ldots \eta_{m-1}\, \eta_m \\ \xi_2 \ldots \xi_m \quad \mu_m \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ \xi_1 \end{matrix}\right),$$

étendues à toutes les combinaisons des indices ξ et η qui donnent le même produit Ξ.

Il est évident qu'on peut annuler identiquement le polynome $\mathfrak{P}_m((x))$ sans avoir besoin d'égaler à zéro chacun des coefficients hypercomplexes a.

16°. Toutes les présentes recherches se résument dans une proposition finale unique :

Théorème. — *Pour qu'une quantité* X *hypercomplexe soit, par rapport à la variable hypercomplexe x, un polynome de degré m, à coefficients hypercomplexes,*

il faut et il suffit que :

les coordonnées de X *soient, par rapport aux coordonnées de x, des polynomes de degré m, à coefficients scalaires.*