BULLETIN DE LA S. M. F.

COMBEBIAC

Sur les représentations numériques des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 34 (1906), p. 227-229
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1906__34__227_1>

SUR LES REPRÉSENTATIONS NUMÉRIQUES DES ENSEMBLES;

Par M. Combebiac.

Lorsqu'un ensemble M ayant, comme l'espace ponctuel, la puissance du continu, est rapporté à un système de n coordonnées, celui-ci détermine n infinités ou faisceaux d'ensembles qui jouissent des propriétés suivantes : chaque ensemble a la puissance du continu; chacun des faisceaux (dont les éléments sont constitués par ces ensembles) a également la puissance du continu; un élément quelconque de M appartient à un et à un seul ensemble de chaque faisceau; n ensembles pris respectivement dans les n faisceaux ont toujours un et un seul élément commun. Réciproquement, si l'on a déterminé, dans l'ensemble M, n faisceaux d'ensembles satisfaisant à ces conditions, il suffit évidemment, pour rapporter M à un système de n coordonnées, de réaliser une application de chacun des faisceaux sur le continu numérique, ce qui est toujours possible, et d'une infinité de manières, puisque chaque faisceau a la puissance du continu.

Pour se faire une idée du degré d'indétermination que comporte la définition d'un pareil système, on peut le concevoir comme engendré par le procédé exposé ci-dessous.

On peut répartir les éléments de M dans des ensembles M_i ayant tous la puissance du continu et constituant eux-mêmes les éléments d'un ensemble (ou faisceau) $\{M_i\}$, ayant également la puissance du continu; c'est ce qui est réalisé, pour l'espace, par une infinité simple de surfaces convenablement choisies. Les ensembles M_i ayant tous la même puissance, on peut répartir les éléments de M dans des ensembles M_j formés, chacun, en prenant un et un seul élément de chaque ensemble M_i. On obtient ainsi deux faisceaux $\{M_i\}$ et $\{M_j\}$ tels que tout élément de M appartient toujours à un et à un seul ensemble de chacun des faisceaux et que deux ensembles pris dans des faisceaux différents ont toujours un et un seul élément commun. Si l'on détermine, pour chacun des faisceaux, une représentation numérique simple, l'ensemble M se trouve rapporté à un système de deux coordonnées. Il est à observer que le faisceau ordonné $\{M_i\}$ [ou $\{M_j\}$] détermine, sur chacun des ensembles M_j (ou M_i), un ordre simple du type caractérisé par le continu numérique.

On peut poursuivre l'opération en appliquant à un ensemble M_{i_1} du faisceau $\{M_i\}$ le même traitement qu'à l'ensemble M; on répartit ainsi les éléments de M_{i_1}, d'une part, dans des ensembles $M_{i_1 k}$ et, d'autre part, dans des ensembles $M_{i_1 k'}$, qui jouissent, par rapport à M_{i_1}, des mêmes propriétés que les ensembles M_i et M_j par rapport à M. En réunissant les éléments de tous les ensembles M_j qui ont des éléments communs avec un même ensemble $M_{i_1 k}$, on forme un ensemble M_k, et le faisceau $\{M_k\}$ des ensembles déterminés par ce procédé jouit des mêmes propriétés que le faisceau $\{M_i\}$ et le faisceau $\{M_j\}$. On définirait de même, au moyen des ensembles $M_{i_1 k'}$, un faisceau $\{M_{k'}\}$ jouissant de ces mêmes propriétés. On reconnaît enfin que trois ensembles appartenant respectivement aux trois faisceaux $\{M_i\}$, $\{M_k\}$ et $\{M_{k'}\}$ ont toujours un et un seul élément commun. Si l'on définit pour ces trois faisceaux, qui ont la puissance du continu, des représentations numériques simples, l'ensemble M se trouve rapporté à un système de trois coordonnées. Chacun des ensembles M_j est l'intersection de deux ensembles appartenant respectivement aux faisceaux $\{M_k\}$

et $\{M_{k'}\}$ et est ordonné par les ensembles du faisceau $\{M_i\}$.

Le procédé exposé ci-dessus peut évidemment être répété indéfiniment.

La notion du nombre de dimensions n'est pas spéciale aux types d'ordre continus; elle peut, notamment, être étendue aux types d'ordre *partout disjoints,* c'est-à-dire à ceux dans lesquels la notion de continuité est remplacée par celle de *contiguïté.* C'est ainsi que tout ensemble dénombrable peut être disposé suivant des tableaux à double entrée, triple entrée, etc. Le procédé à employer est le même que pour les ensembles ayant la puissance du continu. On peut en faire l'application à l'ensemble des nombres entiers positifs.

On doit d'abord répartir ces nombres dans des ensembles dénombrables constituant eux-mêmes les éléments d'un ensemble dénombrable; ce résultat peut être obtenu, par exemple, en écrivant un nombre quelconque N sous la forme

$$N = (2j - 1)\,2^{i-1},$$

où $2j - 1$ est le produit des facteurs premiers impairs qui entrent dans la formation de N, et en réunissant tous les nombres N pour lesquels la valeur de i est la même; on peut aussi obtenir une répartition semblable en réunissant les éléments pour lesquels le nombre j est le même. Si l'on range respectivement les ensembles M_i et M_j ainsi obtenus suivant l'ordre de grandeur de leurs indices, les nombres naturels se trouvent disposés dans un tableau à double entrée, et, par suite, l'ensemble de ces nombres est rapporté à un système de deux coordonnées i et j à valeurs entières. On peut poursuivre l'application du procédé en décomposant chacun des ensembles M_i comme il a été fait pour M; il suffit pour cela d'écrire le nombre impair $2j - 1$, qui détermine les éléments de chacun de ces ensembles, sous la forme

$$2j - 1 = P(k)\,2^{k'-1},$$

où $P(k)$ désigne le $k^{\text{ième}}$ (par ordre de grandeur) des nombres non divisibles par 2 ou par 3. Les nombres i, k et k' constituent alors, pour l'ensemble des nombres naturels, un système de trois coordonnées.