Bulletin de la S. M. F.

Fontené

Extension à l'espace du théorème des polygones de Poncelet par des polyèdres réticulés

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 9-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__9_0>

EXTENSION A L'ESPACE DU THÉORÈME DES POLYGONES DE PONCELET PAR DES POLYÈDRES RÉTICULÉS;

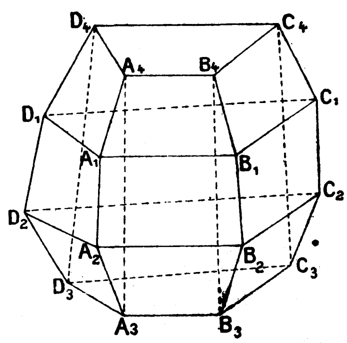
PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. J'ai appelé *polyèdres réticulés* des polyèdres de genre *un*, dont les faces sont des quadrilatères et dont les angles solides sont des angles tétraèdres (*Bulletin*, 1904 à 1906). La nature d'un polyèdre réticulé dépend de trois nombres caractéristiques p, q, r; je supposerai ici $r = 1$; la figure est faite pour le cas $p = 4$, $q = 4$, mais je raisonnerai en prenant p et q quelconques.

Avec $r = 1$, le nombre des sommets ou des faces est pq; le nombre des paramètres dont dépend le polyèdre est, régulière-

Fig. 1.



ment, $2pq$. Si le polyèdre doit être circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S', ce qui forme $2pq$ conditions (sauf réductions possibles), il semble qu'il soit en général déterminé. *Je montrerai que la recherche d'un tel polyèdre est un problème doublement indéterminé lorsque les deux quadriques satisfont à une condition invariante,* dépendant naturellement des valeurs attribuées aux nombres caractéristiques p et q.

J'avais pensé tout d'abord que la question devait être d'un ordre plus élevé que celle des polygones de Poncelet : il se trouve qu'il n'en est rien. Il convient toutefois d'observer que l'on suppose ici $r = 1$; j'ai examiné précédemment le cas $r = 2$, $p = 2$, $q = 2$, pour lequel le résultat est bien différent du résultat général relatif au cas $r = 1$: on trouvera au paragraphe IV l'indication de ce résultat. J'ajoute que la question reste entière pour les polyèdres trigonaux à angles solides hexaèdres, ou leurs corrélatifs, dont j'ai signalé l'existence dans mon premier Mémoire.

2. Les arêtes d'un polyèdre réticulé se distribuent en deux systèmes. Celles du système A_1B_1 forment des contours ponctuels $A_1B_1C_1D_1$, ..., $A_2B_2C_2D_2$, ..., et des contours tangentiels $(A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \ldots)$, $(B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, \ldots)$, ..., ainsi appelés parce que ce sont les plans de deux côtés consécutifs qui sont des éléments du polyèdre; *pour les polyèdres que nous aurons à considérer*, les polygones $A_1B_1C_1\ldots$, $A_2B_2C_2\ldots$, ... sont des polygones plans, dont les plans p_1, p_2, ... passent par une même droite XY; en conséquence, les droites A_1B_1, A_2B_2, ... sont les arêtes d'un angle polyèdre dont le sommet, situé sur XY, sera désigné par $\overline{A}$, et l'on désignera de même par $\overline{B}$ le point de concours sur XY des droites B_1C_1, B_2C_2, ..., et ainsi de suite. Les arêtes du système A_1A_2 formeront de même des polygones plans $A_1A_2A_3\ldots$, $B_1B_2B_3\ldots$, ..., dont les plans a, b, ... passent par une même droite ZT, et, par une conséquence nécessaire, les droites A_1A_2, B_1B_2, ... iront concourir en un point $\overline{P_1}$ de la droite ZT, les droites A_2A_3, B_2B_3, ... iront concourir en un point $\overline{P_2}$ de cette même droite, et ainsi de suite. Ainsi, la droite XY est liée au premier système d'arêtes (plans p_1, p_2, ..., et points $\overline{A}$, $\overline{B}$, ...), tandis que la droite ZT est liée au second système d'arêtes (plans a, b, ..., et points $\overline{P_1}$, $\overline{P_2}$, ...).

3. Je m'appuierai sur le théorème suivant :

Considérons une quadrique S', *et deux droites* XY et ZT *conjuguées par rapport à cette quadrique* [1]; *soient* X'_0 et Y'_0,

[1] On peut supposer que la quadrique S' est un ellipsoïde dont la droite ZT est un diamètre, ou même un axe; la droite XY est alors la droite à l'infini du plan diamétral correspondant.

Z'_0 et T'_0 les points où cette quadrique est rencontrée par les deux droites en question.

Soit une quadrique U doublement tangente à la quadrique S', aux points Z'_0 et T'_0; soit de même une quadrique V doublement tangente à la quadrique S', aux points X'_0 et Y'_0.

Si A_1 est un point quelconque de la quadrique S' (fig. 2), menons de ce point une tangente $A_1 B_1$ à la section u_1 de la quadrique U par le plan XYA_1 ou p_1, et une tangente $A_1 A_2$ à la section v_a de la quadrique V par le plan ZTA_1 ou a; L'ENVELOPPE DU PLAN DÉTERMINÉ PAR CES DEUX TANGENTES EST UNE QUADRIQUE S.

Cette quadrique S est doublement tangente à la quadrique U, aux deux points X_0 et Y_0 de cette quadrique situés sur XY; elle est de même doublement tangente à la quadrique V, aux deux points Z_0 et T_0 de cette quadrique situés sur ZT.

Les cordes de contact des quadriques sont données par le Tableau suivant :

	S'	S
U	$Z'_0 T'_0$	$X_0 Y_0$
V	$X'_0 Y'_0$	$Z_0 T_0$

La quadrique S' contient le contour $X'_0 Z'_0 Y'_0 T'_0$,
» U » $X_0 Z'_0 Y_0 T'_0$,
» V » $X'_0 Z_0 Y'_0 T_0$,
» S » $X_0 Z_0 Y_0 T_0$;

le système de ces quadriques dépend de 19 paramètres. Elles admettent toutes quatre comme droites conjuguées les deux droites XY et ZT, et ont un tétraèdre conjugué commun dont les sommets sur XY, par exemple, sont les deux points qui sont conjugués par rapport à chacun des deux couples X_0, Y_0 et X'_0, Y'_0.

La démonstration peut se faire avec un tétraèdre de référence dont XY et ZT sont simplement deux arêtes opposées; les équations des quadriques sont alors

$$(S') \qquad (a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2) + (c'Z^2 + 2k'ZT + d'T^2) = 0,$$

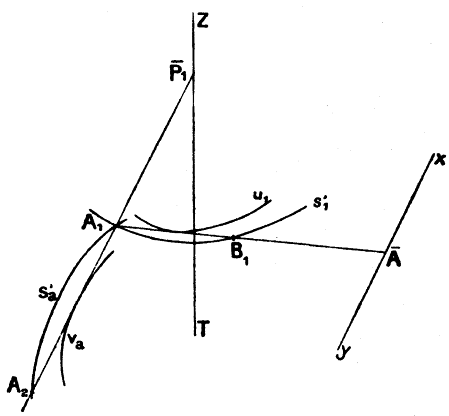
$$(U) \qquad (a\,X^2 + 2h\,XY + b\,Y^2) + (c'Z^2 + 2k'ZT + d'T^2) = 0,$$

$$(V) \qquad (a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2) + (c\,Z^2 + 2k\,ZT + dT^2) = 0,$$

$$(S) \qquad (a\,X^2 + 2h\,XY + b\,Y^2) + (c\,Z^2 + 2k\,ZT + dT^2) = 0.$$

On peut choisir comme tétraèdre de référence le tétraèdre conjugué commun aux quatre quadriques, de manière à avoir $h' = 0$,

Fig. 2.



$k' = 0$, $h = 0$, $k = 0$ [1]. Voici le calcul, en rapportant la figure au tétraèdre de référence $X_0 Y_0 Z_0 T_0$, ce qui donne $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, et réduit à une forme très simple l'équation de l'enveloppe cherchée S. Soit

$$UX + VY + WZ + RT = 0.$$

---

[1] Si l'on se place dans les conditions de la note précédente, on a les équations

$$(S') \qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c'^2} - 1\right) = 0,$$

$$(U) \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c'^2} - 1\right) = 0,$$

$$(V) \qquad \left(\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^3} - 1\right) = 0,$$

$$(S) \qquad \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + \left(\frac{z^2}{c^2} - 1\right) = 0.$$

l'équation du plan qui contient les tangentes A_1B_1, A_1A_2. L'équation du plan XYA_1B_1 étant $Z = \beta T$, on a pour la droite A_1B_1

$$Z = \beta T, \qquad UX + VY + (W\beta + R)T = 0,$$

et, pour les points d'intersection de cette droite avec la quadrique U,

$$2h(W\beta + R)^2 XY + (c'\beta^2 + 2k'\beta + d')(UX + VY)^2 = 0,$$

ou, en désignant par X_1, Y_1, Z_1, T_1 les coordonnées du point A_1,

$$2h(WZ_1 + RT_1)^2 XY + (c'Z_1^2 + 2k'Z_1T_1 + d'T_1^2)(UX + VY)^2 = 0;$$

en écrivant que cette équation en $\frac{Y}{X}$ a une racine double, on a

$$[(c'Z_1^2 + \ldots)UV + h(WZ_1 + RT_1)^2]^2 - (c'Z_1^2 + \ldots)^2 U^2V^2 = 0,$$

ce qui donne

$$2(c'Z_1^2 + \ldots)UV + h(WZ_1 + RT_1)^2 = 0.$$

La tangente A_1A_2 donne de même

$$2(a'X_1^2 + \ldots)WR + k(UX_1 + VY_1)^2 = 0.$$

En tenant compte de ce que le point A_1 est sur la quadrique S', et dans le plan (U, V, W, R), on a donc pour l'équation tangentielle de l'enveloppe de ce plan

$$\frac{UV}{h} + \frac{WR}{k} = 0;$$

on en déduit l'équation ponctuelle

$$hXY + kZT = 0.$$

(Si l'on veut énoncer le théorème en partant de la quadrique S pour arriver à la quadrique S', au lieu de prendre un point A_1 de cette dernière quadrique, on doit prendre un plan tangent à la quadrique S. Si ce plan rencontre XY au point $\overline{A}$ et ZT au point $\overline{P_1}$, il coupe le cône de sommet $\overline{A}$ circonscrit à la quadrique U suivant deux génératrices dont l'une est la droite $\overline{AA_1}$, et le cône de sommet $\overline{P_1}$ circonscrit à la quadrique V suivant deux génératrices dont l'une est la droite $\overline{P_1}A_1$; le lieu du point A_1, commun à ces deux droites, est la quadrique S'.)

4. Des considérations géométriques permettent de prévoir que l'enveloppe du plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 est une quadrique dont l'équation est de la forme

$$(aX^2 + 2hXY + bY^2) + \theta(cZ^2 + \ldots + \ldots) = 0;$$

mais cela ne donne pas la valeur $\theta = 1$. Les deux quadriques V et S' sont bitangentes aux points X'_0 et Y'_0, et les plans tangents en ces points se coupent suivant ZT; le point $\overline{P_1}$ étant sur ZT, le cône de sommet $\overline{P_1}$, circonscrit à la quadrique V, est bitangent à la quadrique S', aux points X'_0 et Y'_0, et la coupe par suite suivant deux coniques s'_1 et s'_2, dont les plans p_1 et p_2 passent par XY; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_1, le plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 reste tangent au cône de sommet $\overline{P_1}$ qui a pour base la conique u_1 suivant laquelle le plan p_1 coupe la quadrique U. Le cône de sommet $\overline{A}$, circonscrit à la quadrique U, coupe de même la quadrique S' suivant deux coniques s'_a et s'_b, dans les plans a et b passent par ZT; dès lors, quand le point A_1 se déplace sur la conique s'_a, le plan des deux tangentes A_1B_1 et A_1A_2 reste tangent au cône de sommet $\overline{A}$ qui a pour base la conique v_a suivant laquelle le plan a coupe la quadrique V. Ainsi l'enveloppe cherchée est, de deux manières différentes, enveloppe de cônes du second degré; les cônes du premier système ont leurs sommets sur ZT et sont tangents aux deux plans ZTX_0, ZTY_0, aux points X_0 et Y_0; les cônes du second système ont leurs sommets sur XY et sont tangents aux deux plans XYZ_0, XYT_0, aux points Z_0 et T_0. Il faut montrer qu'une enveloppe possédant ces propriétés est une quadrique.

Pour plus de clarté considérons la question corrélative. Une surface est engendrée de deux manières différentes par des coniques; pour l'un des systèmes, les plans des coniques passent par XY, et ces coniques passent aux points X et Y, où elles sont tangentes aux plans ZTX et ZTY; pour l'autre système, les plans des coniques passent par ZT, etc. La surface, rapportée au tétraèdre de référence XYZT, peut être représentée par l'un ou l'autre des deux groupes d'équations

$$\begin{cases} Z = \lambda T, \\ Z^2 = XY\varphi(\lambda), \end{cases} \qquad \begin{cases} X = \mu Y, \\ X^2 = ZT\psi(\mu); \end{cases}$$

on a donc, pour un point de la surface,

$$\lambda^2 T^2 = \mu Y^2 \varphi(\lambda),$$
$$\mu^2 Y^2 = \lambda T^2 \psi(\mu),$$

d'où, en multipliant,

$$\lambda\mu = \varphi(\lambda)\psi(\mu), \qquad \text{ou} \qquad \frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)};$$

comme cela doit avoir lieu quels que soient λ et μ, on a nécessairement

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\lambda} = \frac{\mu}{\psi(\mu)} = \text{const.} = k;$$

l'équation de la surface est alors

$$ZT = kXY. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

5. J'introduis maintenant les quadrilatères tels que $A_1B_1B_2A_2$. Les tangentes A_1B_1 et A_1A_2 menées des points A_1 de la quadrique S' aux deux quadriques U et V, dans les plans A_1XY et A_1ZT, percent encore la quadrique S' aux points B_1 et A_2: du fait que les droites XY et ZT sont conjuguées par rapport à la quadrique S', les droites $\overline{A}A_2$ et $\overline{P_1}B_1$ se coupent en un point B_2 situé sur la quadrique S' : on obtient ainsi, dans un plan tangent à S, le quadrilatère plan $A_1B_1B_2A_2$ inscrit à S', et dont les côtés opposés se coupent sur XY et sur ZT. La droite A_2B_2 est d'ailleurs une des deux tangentes que l'on peut mener du point A_2 à la quadrique U dans le plan A_2XY : ces deux tangentes déterminent en effet avec la droite A_2A_1 les deux plans tangents que l'on peut mener par cette droite à la quadrique S; la droite B_1B_2 est de même une des deux tangentes que l'on peut mener du point B_1 à la quadrique V dans le plan B_1ZT.

Relativement au fait que la droite A_2B_2, par exemple, est tangente à la quadrique U, le point B_2 étant supposé obtenu par la droite $\overline{P_1}B_1B_2$, je ferai la remarque suivante. Lorsque deux quadriques

S' et U sont doublement tangentes, la droite qui joint les points de contact étant ZT, la droite conjuguée étant XY, si l'on coupe chacune de ces deux quadriques par deux plans passant par XY, les deux cônes qui contiennent les deux sections de l'une ou l'autre quadrique ont les mêmes sommets, situés d'ailleurs sur la droite ZT ; il suffit pour le voir de considérer les choses dans un plan contenant ZT. Dès lors, comme le point $\overline{P_1}$ est le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques s'_1 et s'_2, ce point est aussi le sommet de l'un des deux cônes qui contiennent les deux coniques u_1 et u_2 : le plan $A_1B_1A_2B_2$ est tangent à ce dernier cône, puisque la droite A_1B_1 est tangente à la conique u_1, et par suite la droite A_2B_2 est également tangente à la conique u_2.

6. Il reste à appliquer le théorème des polygones de Poncelet. Considérons les sections u et s' des quadriques U et S' par un plan p passant par XY ; l'équation de ce plan étant $Z = \beta T$, les deux coniques en question sont sur les deux cônes

$$(u) \qquad aX^2 + 2hXY + bY^2 + (c'\beta^2 + 2k'\beta + d')T^2 = 0,$$

$$(s') \qquad a'X^2 + 2h'XY + b'Y^2 + (c'\beta^2 + \dots\dots\dots)T^2 = 0.$$

Les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

de sorte que ces racines sont indépendantes de β. Dès lors, sous une condition unique imposée aux deux quadriques U et S', il existera des polygones de p côtés circonscrits à la conique u et inscrits à la conique s', *quel que soit le plan p*. Ce fait résulte encore de la remarque faite à la fin du n° 5 : si *un* plan p passant par XY donne deux coniques u et s' satisfaisant à la condition en question, il en sera de même pour tout autre plan p passant par XY, puisque le sommet d'un cône contenant les deux coniques s' est aussi le sommet d'un cône contenant les deux coniques u. De même, sous une condition unique imposée aux deux quadriques V et S', il existera des polygones de q côtés circonscrits à la conique v et inscrits à la conique s', les coniques v et s' étant les sections des quadriques V et S' par un plan a passant par ZT.

Les quadriques U et V étant liées à la quadrique S′ de la manière indiquée, soit A_1 un point quelconque de la quadrique S′. Considérons, dans le plan XYA_1, le polygone de p côtés $A_1B_1C_1\ldots$ inscrit à la quadrique S′, circonscrit à la quadrique U, et, dans le plan ZTA_1, le polygone de q côtés $A_1A_2A_3\ldots$ inscrit à la quadrique S′, circonscrit à la quadrique V. On a immédiatement le quadrilatère $A_1B_1B_2A_2$, on en déduit les quadrilatères $B_1C_1C_2B_2$, $C_1D_1D_2C_2$, ..., les quadrilatères $A_2B_2B_3A_3$, $A_3B_3B_4A_4$, ..., et, de proche en proche, on obtient un polyèdre réticulé aux caractéristiques p et q, inscrit à la quadrique S′ et circonscrit à la quadrique S. Le point A_1 variant sur la quadrique S′, on obtient une double infinité de tels polyèdres.

Si, au lieu de partir de la quadrique S′ pour arriver à la quadrique S, on faisait le contraire, la considération des polygones $A_1B_1C_1\ldots$, $A_1A_2A_3\ldots$ serait remplacée par celle des angles polyèdres dont il a été question. Si l'on envisage, par exemple, les deux cônes de sommet $\overline{A}$ circonscrits aux quadriques U et S, il doit exister des angles polyèdres, ayant des arêtes en nombre q, inscrits au premier cône et circonscrits au second. Les relations entre les quatre quadriques, dans cet ordre d'idées, sont indiquées d'une manière très concise par le Tableau suivant :

	S′	S
U	p	q
V	q	p

7. Le système des deux quadriques S et S′ dépend de 17 paramètres $(19-2=17)$. Si l'on se donne, par exemple, la quadrique S′, le système des deux droites conjuguées XY et ZT dépend de 4 paramètres, et chacune des deux quadriques U et V dépend encore de deux paramètres (points X_0 et Y_0, Z_0 et T_0); la quadrique S dépend donc de 8 paramètres. Ainsi le système des deux quadriques S et S′ vérifie une condition et une seule.

Le fait énoncé se trouve ainsi établi : *Étant données deux* *quadriques* S *et* S′, *il existe, sous une condition invariante de fermeture, une double infinité de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* p, q, 1, *qui sont circonscrits à la quadrique* S *et inscrits à la quadrique* S′.

Ces polyèdres sont liés à deux droites fondamentales XY *et* ZT, *lesquelles sont deux arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun aux deux quadriques.*

Les arêtes du système A_1B_1 *sont tangentes à une quadrique* U, *celles du système* A_1A_2 *sont tangentes à une quadrique* V.

8. Relativement à la condition de fermeture, observons que les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S'$ sont les racines des deux équations

$$\begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0;$$

nous les appellerons λ_1, λ_2, λ_3, λ_4. D'autre part, on a vu au n° 6 que les racines du discriminant de la forme $\lambda u + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda a + a' & \lambda h + h' \\ \lambda h + h' & \lambda b + b' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques u et s' doivent admettre des polygones de p côtés circonscrits à u et inscrits à s'; de même, les racines du discriminant de la forme $\lambda v + s'$ sont les racines des deux équations

$$\lambda + 1 = 0, \qquad \begin{vmatrix} \lambda c + c' & \lambda k + k' \\ \lambda k + k' & \lambda d + d' \end{vmatrix} = 0,$$

et les deux coniques v et s' doivent admettre des polygones de q côtés circonscrits à v et inscrits à s'. Des deux relations ainsi obtenues entre λ_1, λ_2, -1 d'une part, et λ_3, λ_4, -1 d'autre part, on déduira la relation homogène qui doit exister entre les quantités λ_1, λ_2, λ_3 λ_4, pour que les deux quadriques S et S′ admettent des polyèdres aux caractéristiques p, q, 1, circonscrits à S et inscrits à S′.

9. Il serait certainement possible d'introduire dans l'étude de la question deux arguments elliptiques u et v, qui seraient les paramètres d'un point de la surface S', le paramètre v restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant XY, le paramètre u restant constant le long d'une section de la surface par un plan contenant ZT, les sommets d'un polyèdre de l'espèce indiquée correspondant aux valeurs suivantes des deux paramètres

$$\begin{array}{llll} (u, v), & (u+a, v), & (u+2a, v), & \ldots, \\ (u, v+b), & (u+a, v+b), & (u+2a, v+b), & \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots; \end{array}$$

a et b désignent respectivement la $p^{\text{ième}}$ et la $q^{\text{ième}}$ partie d'une période. On aurait des formules de la forme

$$X = Y f(u), \qquad X = T g(v), \qquad Y h(u) = T k(v),$$

ou

$$\frac{X}{f(u)k(v)} = \frac{Y}{k(v)} = \frac{Z}{g(v)h(u)} = \frac{T}{h(u)}.$$

II.

10. Examinons plus particulièrement le cas $p = 3$, $q = 3$; nous remplacerons ici la notation S' par la notation S''.

En Géométrie plane, un polygone de Poncelet dépend de 10 paramètres $(5+4+1=10)$; tout pentagone est un polygone de Poncelet; un hexagone n'est un polygone de Poncelet que s'il a une droite de Pascal et un point de Brianchon; etc. Dans l'espace, les polyèdres réticulés dont il vient d'être question dépendent de 19 paramètres $(9+8+2=19)$. Tout polyèdre réticulé correspondant aux valeurs simples $p=3$, $q=3$ est un polyèdre de l'espèce indiquée : il a en effet 9 sommets, 9 faces, et on peut lui circonscrire une quadrique S'', lui inscrire une quadrique S; un tel polyèdre dépend, comme je l'ai montré, de 19 paramètres (au lieu de 18, qui serait le nombre régulier); j'ai fait observer aussi que, dans un polyèdre de cette nature, les plans des triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$ passent par une même droite XY, etc.

11. Les conditions de fermeture relatives aux coniques u et s'',

s et s'' du n° 8 (je mets s'' au lieu de s') sont ici

$$1 \pm \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} = 0, \qquad 1 \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0;$$

la condition de fermeture relative aux deux quadriques S et S″ est donc

$$(1) \qquad \sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} \pm \sqrt{\lambda_4} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; c'est la condition que j'avais obtenue par un calcul très pénible dans mon Mémoire de 1904.

En Géométrie plane, pour des triangles ABC qui doivent être circonscrits à une conique S et inscrits à une conique S″, on a la condition

$$\sqrt{\lambda_1} \pm \sqrt{\lambda_2} \pm \sqrt{\lambda_3} = 0,$$

les λ étant les racines du discriminant de la forme $\lambda S + S''$; les triangles ABC sont alors conjugués par rapport à une conique S′ (intermédiaire entre S et S″), et, si l'on désigne par μ_1, μ_2, μ_3 les racines du discriminant de la forme $\mu S + S'$, on a

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0;$$

il n'y a donc aucune différence à établir entre les sommets **X**, **Y**, **Z** du triangle conjugué commun aux deux coniques. On sait qu'il n'en est pas de même lorsqu'il s'agit de quadrilatères, la condition de fermeture étant alors

$$-\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Il en est de même dans l'espace, et, d'après ce que l'on a vu au paragraphe I, on a ce théorème :

Lorsque deux quadriques S *et* S″ *satisfont à la condition* (1), *elles admettent* trois *séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* $p = 3$, $q = 3$, *circonscrits à* S *et inscrits à* S″, *ces trois séries de polyèdres étant liées aux trois couples d'arêtes opposées* (TX, YZ), (TY, ZX), (TZ, XY) *du tétraèdre conjugué commun.*

12. Les sommets d'un polyèdre de la nature indiquée étant

$$\begin{array}{c} A_1 B_1 C_1, \\ A_2 B_2 C_2, \\ A_3 B_3 C_3, \end{array}$$

nous dirons que ce polyèdre est conjugué par rapport à une quadrique S' si le plan polaire d'un sommet quelconque (A_1 par exemple), relativement à la quadrique de conjugaison, est le plan de la face opposée ($B_2 C_2 C_3 B_3$).

Les considérations suivantes éclaireront la nature de cette conjugaison. Soient 9 points, d'abord quelconques, auxquels nous donnerons simplement un double classement d'après les lignes et les colonnes du Tableau ci-dessus; soit en outre une quadrique S'. Si l'on demande que deux quelconques des 9 points, n'appartenant ni à une même ligne ni à une même colonne du Tableau, soient conjugués par rapport à la quadrique, le nombre des conditions imposées est égal à $\frac{9 \times 4}{2}$ ou 18; mais il y a là seulement 17 conditions distinctes, et le nombre des paramètres dont dépend la figure est $27 + 9 - 17$, ou 19. Les quatre points B_1, C_1, B_2, C_2, par exemple, sont dans le plan polaire du point A_1, et l'on a un polyèdre réticulé, aux caractéristiques (3, 3), conjugué par rapport à la quadrique S'. Comme un polyèdre de cette nature dépend par lui-même de 19 paramètres, si on le suppose donné *a priori*, il admet une quadrique conjuguée S'. *La conjugaison en question équivaut dès lors à 9 conditions distinctes.*

Que les 17 conditions relatives à un système de 9 points quelconques soient remplacées par un système de 9 conditions seulement lorsque ces points sont supposés être les sommets d'un polyèdre réticulé, c'est ce qu'il est facile de comprendre : du moment que les points B_1, C_1, B_2, C_2 sont dans un même plan, une condition de conjugaison disparaît, et il disparaît ainsi 8 conditions; l'existence des 9 plans ne forme en effet que 8 conditions distinctes (c'est ainsi que le polyèdre dépend de 19 paramètres au lieu de 18).

13. Cela étant, si l'on se donne deux quadriques S' et S'', la recherche d'un polyèdre de l'espèce indiquée qui soit conjugué à S' et inscrit à S'' est un problème en apparence indéterminé, puisque l'on dispose de 19 paramètres pour satisfaire à 18 conditions; en réalité, c'est un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant doublement indéterminé. Supposons en effet que les deux quadriques S' et S'' admettent un tel polyèdre, et soit S la quadrique qui est la polaire réciproque de S'' par rapport à S' : le polyèdre considéré est circonscrit à cette quadrique S. Les deux quadriques S et S'' admettent ainsi des polyèdres réticulés, aux caractéristiques (3, 3), circonscrits à S et inscrits à S''; les racines de l'équation en λ pour ces deux quadriques vérifient donc la condition (1). Or les racines de l'équation en λ pour S' et S'' sont les racines carrées des racines de l'équation en λ pour S et S'', prises avec des signes convenables; on le voit en rapportant les trois quadriques à leur tétraèdre conjugué commun; on a donc pour les quadriques S' et S'' une condition de la forme

$$\varepsilon_1 \mu_1 + \varepsilon_2 \mu_2 + \varepsilon_3 \mu_3 + \mu_4 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Comme deux arêtes du tétraèdre conjugué commun, XY et ZT par exemple, jouent un rôle particulier pour les polyèdres considérés (circonscrits à S et inscrits à S''), la condition est certainement de la forme

$$\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 - \mu_4 = 0. \tag{2}$$

14. *Réciproquement, si deux quadriques* S *et* S'' *satisfont à la condition* (1), *de sorte qu'il existe trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* 3, 3, *circonscrits à* S *et inscrits à* S'', *les polyèdres de chaque série sont conjugués par rapport à une quadrique* S' : *les trois quadriques dont il s'agit,* S'_1, S'_2, S'_3, *sont trois des huit quadriques par rapport auxquelles les quadriques* S *et* S'' *sont polaires, réciproques, à savoir celles qui vérifient une condition de la forme* (2).

Les équations des deux quadriques étant

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \tag{S}$$

$$a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 + d^2 t^2 = 0, \tag{S''}$$

on peut toujours supposer que la condition (1) est

$$(1') \qquad a+b+c+d=0;$$

les équations des quadriques S' sont alors

$$(S'_1) \qquad -ax^2+by^2+cz^2-dt^2=0,$$

$$(S'_2) \qquad ax^2-by^2+cz^2-dt^2=0,$$

$$(S'_3) \qquad ax^2+by^2-cz^2-dt^2=0,$$

et l'on a, par exemple, pour la dernière

$$(2') \qquad a+b-(-c)-(-d)=0;$$

j'ai vérifié ce résultat en supposant $a=b$.

Le polyèdre que j'ai considéré dans mon premier Mémoire est conjugué par rapport à la quadrique

$$(S') \quad d'(\delta-d)\left(\frac{a}{a'}x^2+\frac{b}{b'}y^2+\frac{c}{c'}z^2+\frac{d}{d'}t^2\right)+(ax+by+cz+dt)^2=0.$$

III.

15. Pour $p=4$, $q=4$, la condition de fermeture relative aux coniques u et s' du n° 8 est que l'une des racines de l'équation en λ soit égale à la somme des deux autres; on peut avoir

$$\lambda_1+\lambda_2=1, \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda_1-\lambda_2=\pm 1,$$

et, selon l'hypothèse adoptée, les diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$, circonscrit à u et inscrit à s', passent par tel ou tel des trois sommets du triangle autopolaire commun aux deux coniques : avec l'hypothèse $\lambda_1+\lambda_2=1$, ce sommet est le point où la droite ZT perce le plan des deux coniques, tandis que, avec l'hypothèse $\lambda_1-\lambda_2=\pm 1$, ce sommet est l'un des deux points de la droite XY qui sont conjugués communs pour les deux quadriques U et S'; il y a là deux choses bien distinctes. Relativement aux deux coniques v et s', on peut de même avoir

$$\lambda_3+\lambda_4=1, \qquad \text{ou bien} \qquad \lambda_3-\lambda_4=\pm 1;$$

avec la première hypothèse, les diagonales du quadrilatère

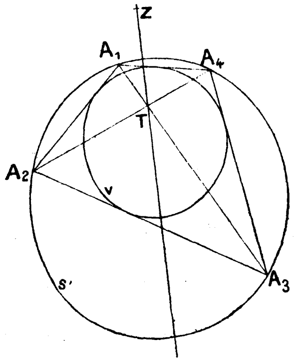
$A_1A_2A_3A_4$ passent au point où la droite XY perce le plan des deux coniques, tandis que, avec la seconde hypothèse, elles passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques V et S'.

D'après les considérations qui sont exposées dans mon Mémoire de 1905, on doit avoir, par exemple,

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_3 = 1;$$

les diagonales du quadrilatère $A_1B_1C_1D_1$ passent au point où la droite ZT rencontre le plan de ce quadrilatère, tandis que les diagonales du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ passent par l'un des deux points de la droite ZT qui sont conjugués communs pour les deux quadriques S et S'. Par exemple, si S et S' sont deux ellipsoïdes dont ZT est un axe, le premier étant intérieur au second, les quadrilatères $A_1B_1C_1D_1$ sont des quadrilatères convexes dont les dia-

Fig. 3.



gonales se coupent sur l'axe en question, et les quadrilatères $A_1A_2A_3A_4$ sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous : les diagonales se coupent au point T parce que, dans la relation $\lambda_4 = \lambda_3 + 1$, c'est λ_4 qui joue un rôle à part.

La condition à laquelle satisfont les deux quadriques S et S' est alors

$$(3) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0,$$

et elle peut prendre les trois formes

$$\lambda_4 - \lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3, \qquad \lambda_4 - \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_1, \qquad \lambda_4 - \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Lorsque cette condition est remplie, les deux quadriques S *et* S′ *admettent donc trois séries de polyèdres réticulés, aux caractéristiques* 4, 4, *circonscrits à* S *et inscrits à* S′. *Ces trois séries de polyèdres sont liées aux trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué commun* XYZT : *les arêtes* TX, TY, TZ *jouent successivement le rôle que jouait ci-dessus l'arête* TZ.

IV.

16. Ce paragraphe est complètement indépendant de ce qui précède.

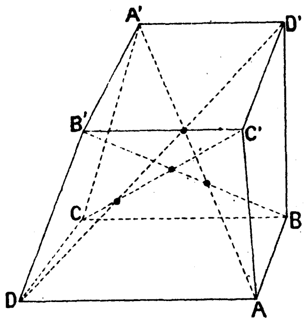
Le polyèdre réticulé qui correspond aux valeurs

$$p = 2, \qquad q = 2, \qquad r = 2$$

a 8 faces quadrangulaires, 8 angles solides tétraèdres; dans la figure suivante les faces sont ABD′C′, BCA′D′, ..., et ABB′A′, BCC′B′, ...

Ce polyèdre dépend exceptionnellement de paramètres en nombre $2pqr + 1$ ou 17. Comme les 8 sommets forment en outre un système de points de Lamé, en même temps que les 8 plans des

Fig. 4.



faces forment un système de plans de Lamé, le problème de construire un tel polyèdre, circonscrit à une quadrique S et inscrit à une quadrique S′, est un problème triplement indéterminé en apparence : j'ai montré que ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé ; la condition de fermeture est

$$(4) \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4.$$

Dans un Mémoire inséré au Volume du *Bulletin* pour 1906 (*Sur une configuration remarquable dans l'espace*), j'ai considéré une figure, comprenant 8 points et 8 plans, que j'ai appelée un *octuple gauche complet :* les 8 points et les 8 plans de cette figure sont, de trois manières différentes, les sommets et les plans des faces d'un polyèdre réticulé aux caractéristiques 2, 2, 2 (*loc. cit., fig.* 3). On peut dire, et c'est sous cette forme que j'ai démontré le théorème :

Le problème de construire un octuple gauche complet, circonscrit à une quadrique S *et inscrit à une quadrique* S', *est un problème triplement indéterminé en apparence : ce problème est en réalité un problème généralement impossible, et qui ne devient possible qu'en devenant quadruplement indéterminé.*

17. La condition (4) ne doit pas être considérée comme une dépendance des conditions planes

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

ou

$$\lambda_1 - \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_2 = 1,$$

ou

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 1, \qquad \lambda_4 - \lambda_1 = 1,$$

du n° 15. Toutefois, parmi les polyèdres en nombre quadruplement infini que l'on a à considérer ici, se trouvent des polyèdres en nombre doublement infini pour lesquels les deux quadrilatères ABCD et A'B'C'D', généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par XY, en même temps que les deux quadrilatères AA'CC' et BB'DD', généralement gauches, sont des quadrilatères plans dont les plans passent par ZT; pour ces polyèdres particuliers, les considérations du n° 15 sont valables : les diagonales AC et BD, A'C' et B'D' se coupent sur ZT, les diagonales AC et A'C', BD et B'D' se coupent sur XY, et l'on a deux relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \qquad \lambda_3 + \lambda_4 = 1,$$

qui donnent lieu à la relation (4). [On doit ici considérer le polyèdre de la figure 4 comme une dégénérescence du polyèdre réticulé aux caractéristiques (4, 4, 1), les quadrilatères $A''B''C''D''$ et $A'''B'''C'''D'''$ étant confondus avec les quadrilatères CDAB et $C'D'A'B'$.]