BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

Sur diverses propriétés des nombres transcendants de Liouville

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 27-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__27_1>

SUR DIVERSES PROPRIÉTÉS DES NOMBRES TRANSCENDANTS DE LIOUVILLE;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. — INTRODUCTION.

Dans cette Note, je m'occupe d'ensembles formés de nombres de Liouville *correspondants,* avec ou sans adjonction de nombres rationnels. J'indique des catégories étendues C de nombres de Liouville pour lesquelles sont vraies ces propriétés :

1° Est impossible l'identité $0 = \sum_0^\nu a_m e^{b_m}$, où les a_m, $\neq 0$, et les b_m, distincts, sont des nombres de Liouville d'une même catégorie ou ensemble C ou des nombres rationnels. Exemple : $\sin b_m$ est transcendant.

2° Les c_m étant des nombres rationnels > 1, et les d_m des nombres de Liouville réels > 1 de C, tout polynome à coefficients entiers positifs formé avec d_m, $c_m^{d_m}$, $d_m^{d_n}$, $d_m^{c_n}$ est un nombre transcendant.

Ces propriétés entraînent comme cas particuliers ou corollaires divers théorèmes, dont certains ont été indiqués par moi antérieurement (¹).

(¹) *Bull. Soc. math.*, 1906, p. 226, et *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

II. — Ensembles de nombres de Liouville correspondants.

Soient I, I′, I″, ... des irrationnelles réelles ou imaginaires [1], limites des suites de fractions rationnelles

$$(1)\quad \begin{cases} I_1 = P_1 Q_1^{-1}, & \ldots, & I_n = P_n Q_n^{-1}, & \ldots, & \text{pour } I, \\ I'_1 = P'_1 Q_1'^{-1}, & \ldots, & I'_n = P'_n Q_n'^{-1}, & \ldots, & \text{pour } I', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \end{cases}$$

avec $Q_{n+1} \geqq Q_n$, $Q'_{n+1} \geqq Q'_n$, ..., $\lim Q_n = \lim Q'_n = \ldots = \infty$ pour $n = \infty$, tous les dénominateurs Q_n, Q'_n, ... étant supposés réels. Je pose

$$(2)\qquad \varepsilon_n = | I - I_n | = Q_n^{-\varphi_n}, \qquad \varepsilon'_n = | I' - I'_n | = Q_n'^{-\varphi'_n}, \qquad \ldots.$$

J'admets encore que l'on puisse trouver une infinité de valeurs n_1 de n telles que l'on ait

$$(3)\quad \begin{cases} \varphi_{n_1} > \alpha, & Q'_{n_1} = Q_{n_1}^{\sigma'_{n_1}}, & Q''_{n_1} = Q_{n_1}^{\sigma''_{n_1}}, & \ldots, \\ & \varphi'_{n_1} = \tau'_{n_1}\varphi_{n_1}, & \varphi''_{n_1} = \tau''_{n_1}\varphi_{n_1}, & \ldots, \end{cases}$$

où α est aussi grand que l'on veut, σ'_{n_1}, σ''_{n_1}, ... sont positifs et ont une limite inférieure et une limite supérieures communes pour $\lim n_1 = \infty$, τ'_{n_1}, τ''_{n_1}, ... sont positifs et ont une limite inférieure commune pour $\lim n_1 = \infty$, mais non forcément une limite supérieure. On sait qu'alors I, I′, I″, ... sont des nombres transcendants de Liouville. Je dirai que ces nombres, satisfaisant aux conditions (1), (2) et (3), sont *des nombres de Liouville correspondants*. Une fois qu'on a formé au moins deux nombres de Liouville correspondants I et I′, ce qui précise suffisamment les valeurs n_1 de n, on peut évidemment considérer un ensemble S de nombres de Liouville correspondants; on voit que S dépend de I, I′ et des valeurs n_1. I et — I sont alors correspondants.

I et I′ étant choisis, pour déterminer un pareil ensemble S, il n'est pas nécessaire de considérer toutes les valeurs n_1 de n

[1] Ceci veut dire que I, par exemple, n'est pas de la forme $a + bi$, où a et b sont, à la fois, rationnels.

pour lesquelles (2) et (3) ont lieu : il suffit d'en considérer une infinité. Suivant la façon dont on choisira ces valeurs, on pourra, à l'occasion, avoir des ensembles S différents. De même on pourra avoir d'autres ensembles S avec I et un nombre transcendant de Liouville J analogue à I', mais différent de I'.

D'après les définitions précédentes, on voit que I et I' se correspondent, I et J se correspondent, mais I' et J peuvent ne pas se correspondre. Finalement, pour préciser complètement la notion de correspondance, il faut se donner I, I' et les n_1, ce qui détermine l'ensemble S. Aussi devra-t-on dire, quand on pourra craindre une ambiguïté, que I, I', I'', ... sont *correspondants dans l'ensemble* S.

On pourra encore considérer des correspondances plus particulières en introduisant de nouvelles conditions à satisfaire par I, I', ..., spécifier par exemple, comme je l'ai indiqué ailleurs ([1]), que φ_{n_1} est plus grand qu'une certaine fonction de n_1, croissant indéfiniment avec n_1, mais plus ou moins vite.

On pourra aussi spécifier que I, I', I'', ... sont réels, et que

$$I - I_{n_1}, \quad I' - I'_{n_1}, \quad \ldots$$

sont tous de même signe pour chaque valeur n_1 de n, sans que l'on ait forcément $I - I_{n_1}$ et $I - I_{n'_1}$ de même signe quand $n'_1 \neq n_1$. Avec cette restriction, I et $-$I ne se correspondent plus. Soit S' l'ensemble des nombres de Liouville correspondants en ce second sens, pour des valeurs données de I, I' et des n_1. Ces valeurs définissent un ensemble S qui contient S'.

Je considérerai encore, en supposant I et I' positifs, les nombres de S' qui sont positifs : ils forment un ensemble S''. Enfin, on pourra considérer les nombres de S'' pour lesquels les τ'_{n_1}, τ''_{n_1}, ... sont aussi limités supérieurement pour $\lim n_1 = \infty$: ils forment un ensemble S'''.

Soient enfin S_1, S'_1, S''_1, S'''_1 les ensembles formés en adjoignant respectivement à S, S', S'', S''' les nombres rationnels ou rationnels positifs. Je vais établir les propriétés suivantes :

([1]) *Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1906, p. 34.

THÉORÈME I. — *L'ensemble des nombres de* S_1 *forme un groupe par rapport aux quatre opérations fondamentales de l'arithmétique (addition, soustraction, multiplication, division). Toute fonction rationnelle à coefficients rationnels réels ou imaginaires des nombres de* S_1 *appartient à* S_1.

THÉORÈME II. — *L'ensemble des nombres de* S''_1 *(ou de* S'''_1*) forme un groupe par rapport à l'addition et la multiplication. Tout polynome à coefficients positifs formé avec les nombres de* S''_1 *(ou de* S'''_1*) appartient à* S''_1 *(ou à* S'''_1*)* (¹).

J'établis le théorème I. Soient

$$x = I = x_n + h_n, \qquad y = y_n + k_n, \qquad \ldots,$$

où $x_n = I_n$, ..., des nombres de S_1, n étant un des nombres n_1, $f(x, y, \ldots)$ la fraction rationnelle considérée dans l'énoncé; on a

$$J = f(x, y, \ldots) = f(x_n, y_n, \ldots) + h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \ldots + h_n^2 f''_{x_n^2} + \ldots,$$

d'après la formule de Taylor.

$$f(x_n, y_n, \ldots), \quad f'_{x_n}, \quad f'_{y_n}, \quad \ldots, \quad f''_{x_n^2}, \quad \ldots,$$

quand on y substitue à x_n, y_n, ... leurs valeurs $P_n Q_n^{-1}$, $P'_n Q'^{-1}_n$, ..., et qu'on chasse les dénominateurs, sont des nombres rationnels $p_n q_n^{-1}$; p_n, q_n sont des polynomes à coefficients entiers formés avec $P_n = I_n Q_n$, $P'_n = I'_n Q'_n$, ..., Q_n, Q'_n, ..., c'est-à-dire que, d'après (2) et (3), le module de $p_n q_n^{-1}$ est compris entre Q_n^{ω} et $Q_n^{-\omega}$, où ω est fixe et positif, quel que soit n, pour la fonction f et les nombres x, y, ... considérés, puisque σ'_n, σ''_n, ... sont limités supérieurement et inférieurement. Si $J_n = f(x_n, y_n, \ldots)$, le module de la différence $J - J_n$ est alors de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, où ω_n est positif et limité inférieurement, c'est-à-dire que le nombre $f(x, y, \ldots)$ appartient à S_1. Bien entendu, à l'occasion, ce nombre pourra être nul.

Quant au théorème II, si l'on prend pour $J = f(x, y, \ldots)$ un polynome à coefficients positifs, x, y, ... étant positifs, la

---

(¹) Il résulte en particulier de là que l'on définit au moins un ensemble S_1 et S''_1 à l'aide du nombre I seul, satisfaisant à (1), (2) et (3). Pour définir complètement cet ensemble, il restera à choisir la suite des valeurs n_1.

démonstration est presque identique. $J_n = f(x_n, y_n, \ldots)$, f'_{x_n}, f'_{y_n}, ... sont positifs et $\neq 0$, h_n, k_n, ... sont de même signe, d'après les propriétés de S'', et

$$J - J_n = (h_n f'_{x_n} + k_n f'_{y_n} + \ldots)(1 + \zeta_n),$$

où $\lim \zeta_n = 0$ pour $n = \infty$. $J - J_n$ étant de même signe que h_n, et son module de la forme $Q_n^{-\omega_n \varphi_n}$, J appartient à S''_1.

Une propriété correspondante a évidemment lieu quand x, y, ... appartiennent à S'''_1. C. Q. F. D

III.

On vient de voir que toute fraction rationnelle à coefficients rationnels formée avec les nombres de S_1 appartient à S_1. Ceci indique la portée de la propriété suivante, que je vais établir :

Théorème III. — *Soient* $J^{(0)}, J^{(1)}, \ldots, J^{(\nu)}, I^{(0)}, I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$ *des nombres de* S_1 *dont les* $\nu + 1$ *premiers sont* $\neq 0$ *et les* $\nu + 1$ *derniers distincts : il n'existe aucune identité de la forme*

$$\sum_0^\nu J^{(k)} e^{I^{(k)}} = 0, \tag{4}$$

lorsque φ_n *croît suffisamment vite avec* n, *pour les valeurs* n_1 *de* n *qui servent à définir* S_1. *Pour préciser*, (4) *est impossible quand*

$$\varphi_n \geqq Q_n^{\beta_n}, \tag{17}$$

pour une infinité des valeurs n_1 *de* n *assez grandes* ($\lim \beta_{n_1} = \infty$).

En particulier, (4) *est impossible lorsque les* $I^{(k)}, J^{(k)}$ *sont des nombres de Liouville correspondants de la forme* $M + M_1 i$, M *et* M_1 *étant des fractions rationnelles à coefficients entiers réels formées avec un nombre de Liouville réel dont le développement en fraction continue satisfait aux conditions du corollaire* I *du théorème* I *de notre Note du Bull. Soc. math.*, t. XXXIV, 1906, p. 219 [1].

---

(1) Il est intéressant de rapprocher ce théorème d'une propriété connue ana-

J'admets qu'il y ait une identité de la forme (4). En en divisant les deux membres par $J^{(0)}e^{I^{(0)}}$, on obtient

$$1+\sum_{1}^{\nu} J^{(k)}J^{(0)-1}e^{I^{(k)}-I^{(0)}} = 0.$$

D'après le théorème I, les $J^{(k)}J^{(0)-1}$ sont des nombres de $S_1 \neq 0$; les $I^{(k)} - I^{(0)}$ sont des nombres de S_1 distincts et $\neq 0$. Finalement on est ramené à une identité analogue à (4), mais où le premier terme est l'unité et les exposants sont $\neq 0$. Il suffit donc d'examiner ce dernier cas.

Soit l'identité

$$(5) \qquad 1+\sum_{1}^{\nu} J^{(k)}e^{I^{(k)}} = 0.$$

La démonstration de son impossibilité n'est qu'une modification convenable de la démonstration classique de la transcendance de e (Jordan, *Cours d'Analyse lithographié de l'École Polytechnique*). On part de l'identité

$$e^{z_1}\int_0^{z_1} \varpi e^{-z}\,dz = -F(z_1)+e^{z_1}F(0),$$

où z_1 est réel ou imaginaire, $\varpi = \varpi(z)$ est un polynome et $F(z) = \varpi + \varpi' + \varpi'' + \ldots$. On prend ici pour ϖ le polynome

$$\varpi(z) = \varpi(z, I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}) = \frac{z^{p-1}(z-I^{(1)})^p \ldots (z-I^{(\nu)})^p}{|\underline{p-1}},$$

avec $|\underline{p-1} = 1.2\ldots(p-1)$, p étant un nombre premier très grand dont la valeur sera fixée tout à l'heure.

On remarque de suite que les dérivées m^{iemes} de ϖ par rapport aux $I^{(k)}$ sont formées d'un seul ou d'une partie des termes (1) de $\varpi^{(m)}(z)$ affectés du signe + ou —.

---

logue due à M. Lindemann, et relative non plus aux nombres de Liouville, mais aux nombres algébriques, et d'une Communication de M. Rémoundos (*Comptes rendus*, 16 janvier 1905, p. 135).

(1) Chaque terme étant de la forme $z^{\beta_0}(z-I^{(1)})^{\beta_1}\ldots(z-I^{(\nu)})^{\beta_\nu}$.

On a, quel que soit ϖ, l'identité

$$e^{\mathfrak{I}}\int_0^{\mathfrak{I}} \varpi e^{-z}\,dz = -\mathrm{F}(\mathfrak{I}) + e^{\mathfrak{I}}\,\mathrm{F}(0);$$

s'il existe une relation (5), on en conclut alors

$$(6)\qquad \sum_1^{\nu} \mathrm{J}^{(k)} e^{\mathrm{I}^{(k)}} \int_0^{\mathrm{I}^{(k)}} \varpi e^{-z}\,dz = -\sum_1^{\nu} \mathrm{J}^{(k)}\mathrm{F}(\mathrm{I}^{(k)}) - \mathrm{F}(0).$$

1° Soient Π_1 le premier membre, λ une quantité égale à trois fois le plus grand des modules des quantités $\mathrm{J}^{(1)}, \ldots, \mathrm{J}^{(\nu)}, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}$, ν et 2 : on peut supposer l'intégrale $\int_0^{\mathfrak{I}}$ prise, dans le plan complexe des z, le long de la droite joignant l'origine au point $\mathfrak{I}$: on a, sous le signe $\int$,

$$|e^{-z}| \leqq e^{\lambda}, \qquad |\varpi| \leqq (\underline{|p-1})^{-1}\lambda^{\nu p+p-1}.$$

Dès lors,

$$(7)\qquad |\Pi_1| \leqq (\underline{|p-1})^{-1}\lambda^{\nu p+p+2}\,e^{2\lambda} < \lambda^{2p(\nu+1)}\left(\frac{p}{e}\right)^{-p} < (\lambda^{2\nu+2}\,e p^{-1})^{p},$$

dès que p est assez grand.

2° Je m'occupe maintenant du deuxième membre de (6). J'écrirai

$$\mathrm{F}(z) = \mathrm{F}(z, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}), \qquad \mathrm{F}_n(z) = \mathrm{F}(z, \mathrm{I}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)}),$$
$$\varpi_n(z) = \varpi(z, \mathrm{I}_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)}),$$

où n est un des nombres n_1, $\mathrm{I}_n^{(k)} = \mathrm{P}_n^{(k)}\mathrm{Q}_n^{(k)-1}$ une des fractions de la suite (1) dont $\mathrm{I}^{(k)}$ est limite, quand $\mathrm{I}^{(k)}$ est un nombre de Liouville.

Soit $\mathfrak{I}$ une des quantités $0, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}$, avec $l_n = 0$ quand $\mathfrak{I} = 0$ ou $\mathfrak{I}$ rationnel, $l_n^{(k)} = 0$ quand $\mathrm{I}^{(k)}$ est rationnel, et

$$\mathfrak{I} = \mathrm{I}_n + l_n, \qquad \mathrm{I}^{(k)} = \mathrm{I}_n^{(k)} + l_n^{(k)},$$

(n étant assez grand). On a

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{F}(\mathfrak{I}, \mathrm{I}^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}^{(\nu)}) = \mathrm{F}(\mathfrak{I}) = \mathrm{F}(\mathrm{I}_n + l_n, \mathrm{I}_n^{(1)} + l_n^{(1)}, \ldots, \mathrm{I}_n^{(\nu)} + l_n^{(\nu)}) \\ &\quad = \mathrm{F}_n(\mathrm{I}_n) + l_n\mathrm{F}'_{n\mathrm{I}_n} + l_n^{(1)}\mathrm{F}'_{n\mathrm{I}_n^{(1)}} + \ldots + \frac{1}{1.2}\left(l_n^2\mathrm{F}''_{n\mathrm{I}_n^2} + \ldots\right) + \ldots,\end{aligned}\right.$$

avec

$$F_n(I_n) = F(I_n, I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(\nu)}) = \varpi_n(I_n) + \varpi'_n(I_n) + \ldots.$$

D'après ce qu'on a vu, F'_{nI_n}, $F'_{nI_n^{(1)}}$, …, $F''_{nI_n^2}$, … sont formés chacun de tout ou partie des termes, multipliés par ± 1, de $F_n(I_n)$. On aura donc une limite supérieure du module de toutes ces quantités en cherchant une limite supérieure L_n de la somme des modules des termes de $F_n(I_n)$. Soient $\rho_n(z)$, $\rho_n^{(1)}(z)$, … les limites supérieures analogues pour $\varpi_n(z)$, $\varpi'_n(z)$, …; on a, pour $z = \mathfrak{J}$ ou $z = I_n$, si l'on veut,

$$\left\{\begin{array}{l} \underline{|p-1}\,|\varpi_n(z)| = |z^{p-1}(z - I_n^{(1)})^p \ldots (z - I_n^{(\nu)})^p| \leqq \underline{|p-1}\,\rho_n(z) \leqq \lambda^{\nu p+p-1}, \\ \underline{|p-1}\,|\varpi'_n(z)| \leqq p\,\Sigma|f_1(z)| \leqq \underline{|p-1}\,\rho_n^{(1)}(z) \leqq p(\nu+1)\lambda^{\nu p+p-1}, \\ \underline{|p-1}\,|\varpi''_n(z)| \leqq p^2\,\Sigma|f_2(z)| \leqq \underline{|p-1}\,\rho_n^{(2)}(z) \leqq p^2(\nu+1)^2\lambda^{\nu p+p-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{array}\right.$$

où les f_1, f_2, … sont des produits $z^{\beta_0}(z - I_n^{(1)})^{\beta_1} \ldots (z - I_n^{(\nu)})^{\beta_\nu}$, en nombre respectivement $\leqq \nu + 1$, $(\nu+1)^2$, …, avec $\beta_k \leqq p$.

Alors

$$\underline{|p-1}\,|F_n(I_n)|$$
$$\leqq \underline{|p-1}\,L_n \leqq \lambda^{\nu p+p-1}[1 + p(\nu+1) + p^2(\nu+1)^2 + \ldots + p^\mu(\nu+1)^\mu + \ldots],$$

où $\mu \leqq \nu p + p - 1$, et

$$\underline{|p-1}\,L_n \leqq \lambda^{\nu p+p-1}(p\nu + p)^{p\nu+p} < [p(\nu+1)\lambda]^{p\nu+p} = \varphi \quad (^1).$$

Cette inégalité a lieu que l'on prenne $\mathfrak{J}$ égal à 0, $I^{(1)}$, …, ou $I^{(\nu)}$.

Ceci posé, d'après (8),

$$F(\mathfrak{J}) = F_n(I_n) + \theta_n,$$

où

$$|\theta_n| < |l'_n|\,[(\nu+1) + (\nu+1)^2 + \ldots + (\nu+1)^{\nu p+p-1}]\varphi < |l'_n|\,(\nu+1)^{\nu p+p}\varphi,$$

puisque $F(z)$ est de degré $\nu p + p - 1$, l'_n étant celle des quantités l_n, $l_n^{(1)}$, …, $l_n^{(\nu)}$ dont le module est le plus grand. On conclut de là

$$J^{(k)}F(I^{(k)}) = (J_n^{(k)} + j_n^{(k)})[F_n(I_n^{(k)}) + \theta_n^{(k)}] = J_n^{(k)}F_n(I_n^{(k)}) + \zeta_n^{(k)},$$

---

(1) D'après le même raisonnement, φ est aussi limite supérieure de $\underline{|p-1}\,F(\mathfrak{J})$.

$J_n^{(k)}$ étant une des fractions de la suite (1) dont $J^{(k)}$ est la limite et $J^{(k)} = (J_n^{(k)} + j_n^{(k)})$ ($j_n^{(k)} = 0$ quand $J^{(k)}$ est rationnel);

$$|\zeta_n^{(k)}| \leqq |j_n^{(k)}|\varphi + 2\lambda|\theta_n^{(k)}| < |l_n''|(\nu+1)^{2\nu p+2p-1}\varphi,$$

l_n'' étant celle des quantités l_n', $j_n^{(1)}, \ldots, j_n^{(\nu)}$ dont le module est le plus grand. Le second membre de (6) changé de signe s'écrit alors

$$\sum_1^{\nu} J^{(k)} F(I^{(k)}) + F(0) = \sum_1^{\nu} J_n^{(k)} F_n(I_n^{(k)}) + F_n(0) + \chi_n = f_n + \chi_n,$$

où

(9) $$|\chi_n| < |l_n''|(\nu+1)^{2\nu p+2p}\varphi.$$

(6) donne donc

(10) $$f_n = -\chi_n - \Pi_1 = -\psi_n,$$

où, d'après (7) et (9), quand p est assez grand,

(11) $$|\psi_n| < (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p + |l_n''| p^{6p\nu+6p}.$$

En précisant cette limite supérieure de $|\psi_n|$, et déterminant une limite inférieure de $|f_n|$ pour la valeur de n considérée et une valeur correspondante convenable de p, je vais établir l'impossibilité de (10) dans les conditions indiquées au théorème III.

J'étudie f_n : en s'inspirant de la démonstration classique précitée de la transcendance de e, on voit que

$$F_n(0) = \varpi_n(0) + \varpi_n'(0) + \ldots,$$

où les $p-1$ premières quantités $\varpi_n(0)$, $\varpi_n'(0)$, ... sont nulles; $\varpi_n^{(p-1)}(0)$ est de la forme

$$(-1)^{\nu p}(I_n^{(1)} \ldots I_n^{(\nu)})^p;$$

$\varpi_n^{(p)}(0)$, $\varpi_n^{(p+1)}(0)$, ... sont de la forme

(12) $$p\,\Phi(I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(\nu)}),$$

où Φ est un polynome en $I_n^{(1)}, \ldots, I_n^{(\nu)}$ à coefficients entiers de degré $\leqq p\nu$.

On voit encore que

$$\varpi_n(z) = \frac{b_1(z - I_n^{(k)})^p + b_2(z - I_n^{(k)})^{p+1} + \ldots}{\lfloor p - 1}$$

a, pour $z = I_n^{(k)}$, ses $p - 1$ premières dérivées nulles et toutes les autres de la même forme (12). Finalement, soit

$$I_n^{(k)} = P_n^{(k)} Q_n^{(k)-1}, \qquad J_n^{(k)} = p_n^{(k)} q_n^{(k)-1},$$

où $Q_n^{(k)}$, $q_n^{(k)}$ sont réels et satisfont (¹) aux conditions (1), (2) et (3); on a

$$f_n = \frac{(-1)^{p\nu}(P_n^{(1)} \ldots P_n^{(\nu)})^p (Q_n^{(1)} \ldots Q_n^{(\nu)})^{p\nu - p} q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)} + p\Psi}{q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)} (Q_n^{(1)} \ldots Q_n^{(\nu)})^{p\nu}},$$

où Ψ est un entier, réel ou imaginaire.

Soit q_n le plus grand des nombres $q_n^{(1)}, \ldots, q_n^{(\nu)}, Q_n^{(1)}, \ldots, Q_n^{(\nu)}$. D'après (3), le dénominateur de f_n est de la forme $q_n^{p\sigma_n}$, où σ_n est limité supérieurement et inférieurement. Quant au numérateur, si $\Psi = 0$, il est $\neq 0$, et son module est $\geqq 1$; si $\Psi \neq 0$, le numérateur a son module $\geqq 1$ ou est nul : dans ce dernier cas, le carré du module de chacun des deux termes du numérateur aurait même valeur; or, le carré du module du premier terme est

$$N = |P_n^{(1)} \ldots P_n^{(\nu)}|^{2p} (Q_n^{(1)} \ldots Q_n^{(\nu)})^{2p\nu - 2p} (q_n^{(1)} \ldots q_n^{(\nu)})^2,$$

puisque les $Q_n^{(k)}$ et les $q_n^{(k)}$ sont réels. D'après (3), chaque facteur du second membre de N étant $\leqq q_n^\sigma$, où σ est fini, tout facteur premier du nombre N est $\leqq q_n^\sigma$. Si donc on prend le nombre premier arbitraire $p = q_n^{\alpha_n}$, où α_n est $> \sigma$, on voit que les carrés des modules des deux termes du numérateur de f_n ne peuvent être égaux; donc alors, en tout cas, le numérateur de f_n est un entier $\neq 0$, dont le module est $\geqq 1$.

Finalement, on aura, pour la valeur de p en question,

$$|f_n| \geqq q_n^{-p\tau} \qquad (\tau \text{ fixe convenable} > 0),$$

et, d'après (10) et (11),

$$(13) \qquad q_n^{-p\tau} < (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p + |l_n''| p^{6p\nu + 6p}.$$

(¹) Quand $I^{(k)} = I_n^{(k)}$ ou $J^{(k)} = J_n^{(k)}$ sont rationnels (n assez grand), on peut toujours les mettre sous une forme satisfaisant à ces conditions, avec $\tau_n' = \infty$.

D'une part,

$$(14) \qquad (\lambda^{2\nu+2} e p^{-1})^p < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4} q_n^{-p\tau},$$

car

$$q_n^{2\tau} < p e^{-1} \lambda^{-2\nu-2},$$

si α_n est assez grand; d'autre part, d'après (3),

$$|l''_n| \leqq q_n^{-\tau_1 \varphi_n} \qquad (\tau_1 \text{ fixe}),$$

et

$$(15) \qquad |l''_n| p^{6p\nu+6p} \leqq q_n^{-\tau_1\varphi_n + 6p\alpha_n(\nu+1)} < q_n^{-2p\tau} < \frac{1}{4} q_n^{-p\tau},$$

pourvu que

$$2p\tau < \tau_1 \varphi_n - 6p\, \alpha_n(\nu + 1),$$

ou

$$\tau_1 \varphi_n q_n^{-\alpha_n} > 2\tau + 6\alpha_n(\nu + 1).$$

Il suffira que

$$(16) \qquad \varphi_n \geqq q_n^{2\alpha_n},$$

autrement dit que l'on ait pour toute valeur de n_1 assez grande (ou même pour une infinité des valeurs n_1)

$$(17) \qquad \varphi_{n_1} > q_{n_1}^{\alpha},$$

si grand que soit le nombre positif α [1].

La condition (17) étant supposée satisfaite par l'ensemble S_1, (14) et (15) ont lieu, et (13) est impossible, par suite aussi (6), (5) et (4). La première partie du théorème III se trouve ainsi établie.

Je me reporte maintenant aux considérations qui suivent le théorème I de ma dernière Note du *Bulletin de la Société mathématique*, 1906, p. 216, intitulée : *Sur les nombres transcendants dont le développement en fraction continue est quasi-périodique et sur les nombres de Liouville.* Soit le nombre réel de Liouville

$$(18) \qquad \mathfrak{z} = c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots,$$

---

[1] L'existence du nombre premier $p > q_n^{\sigma}$ est alors une conséquence immédiate du postulat de Bertrand établi par Tchebychef : il y a toujours un nombre premier entre l'entier y et l'entier $2y$.

d'ordre $\geqq(3, \varepsilon)$ dans la première classification (ε positif arbitraire), γ_s le plus grand des entiers positifs $c_0, c_1, \ldots, c_s$: la condition (17) sera satisfaite par la $s^{\text{ième}}$ réduite de $\mathfrak{Z}$ si l'on a la condition analogue à l'inégalité (5 *bis*) de cette Note

$$\log c_{s+1} > \gamma_s^{\alpha' s} \qquad (\alpha' \text{ comme } \alpha) :$$

l'ordre étant quelconque, mais $\geqq(3, \varepsilon)$, il y a toujours des fractions continues satisfaisant à cette inégalité pour une infinité de valeurs de s. L'ensemble S_1 correspondant à $\mathfrak{Z}$ pour ces valeurs de s satisfait au théorème III.

Enfin, quand le nombre réel de Liouville (18) satisfait aux conditions du corollaire I du théorème I de la même Note, on voit encore que (17) aura lieu si, pour une infinité de valeurs de s,

$$\log\log c_s > \alpha' s \log \gamma_{s-1},$$

ou, *a fortiori*, si

$$e_{k_s-3}(s) > \alpha' s\, e_{k_s-4}(s) \qquad (k_s > 4) :$$

il suffit, si $x = e_{k_s-4}(s) > \alpha' s$, $e^x > x^2$, pour x assez grand, ce qui a lieu. Les fractions rationnelles à coefficients entiers réels M, M_1 formées avec le nombre $\mathfrak{Z}$ et les nombres de l'ensemble S_1 correspondant satisfont à (17); ces nombres comprenant ceux de la forme $M + M_1 i$, la deuxième partie du théorème III se trouve établie. C. Q. F. D.

Ce théorème comporte une série de corollaires presque immédiats qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

Je désigne toujours par $\mathfrak{Z}$ un nombre $\neq 0$ de la forme [1] $M + M_1 i$, où M et M_1 sont des nombres de Liouville réels de S_1 satisfaisant à (17) ou des nombres rationnels.

Corollaire I. — $e^{\mathfrak{Z}}$, $\cos \mathfrak{Z}$, $\sin \mathfrak{Z}$, $\tan \mathfrak{Z}$ *sont des nombres transcendants.*

Si $x = a + bi$, où a et b sont rationnels et réels, x appartient

---

[1] C'est la forme générale des nombres de S_1 [*Introduction à la théorie des nombres transcendants*, p. 45, note (1)].

à S_1, quel que soit le nombre de Liouville $\mathfrak{Z}$ satisfaisant à (17). Donc :

Corollaire II. — *e^x, où $x \neq 0$ est rationnel, réel ou imaginaire quelconque, n'est racine d'aucune équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes, à coefficients rationnels, formés avec un même nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *il en est de même de* $\cos x$, $\sin x$, $\tang x$.

En particulier, $x \neq 0$ étant rationnel et réel, quelconque, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\tang x$, *qui sont transcendants* [1], *ne peuvent être des nombres de Liouville satisfaisant à* (17). *Par suite, on peut assigner une limite supérieure de leur ordre, c'est-à-dire de la croissance des quotients incomplets de leur développement en fraction continue arithmétique.*

Ces fractions continues ne peuvent en effet satisfaire aux conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. Math.*, 1906, p. 219 : si

$$c_0 + 1 : c_1 + 1 : c_2 + \ldots + 1 : c_n + \ldots \qquad (c_n \text{ entier})$$

est une de ces fractions, et si k_n est le plus petit entier positif ou négatif tel que $c_n \leqq e_{k_n}(n)$, on a, par suite, dès que n est assez grand, $k_n < n^{1+\varepsilon}$, si petit que soit le nombre positif fixe ε.

Corollaire III. — *Le logarithme népérien d'un nombre de* S_1 *n'est pas un nombre de* S_1 ; *le logarithme népérien d'un nombre algébrique n'est pas un nombre de* S_1. *Le développement en fraction continue du logarithme népérien d'un nombre algébrique réel* > 1 *a son ordre limité* [2] *comme au corollaire II.*

En effet, si $\mathfrak{Z}$ et J sont deux nombres de S_1, on n'a pas $\mathfrak{Z} = e^J$, $\log \mathfrak{Z} = J$. D'autre part, soit y un nombre algébrique : on n'a pas $y = e^{\mathfrak{Z}}$, $\log y = \mathfrak{Z}$.

---

[1] La démonstration du théorème III suffit pour montrer que $\sin x$, $\cos x$, $\tang x$ sont transcendants pour x rationnel $\neq 0$ et réel, sans qu'il soit nécessaire de recourir au théorème général connu de M. Lindemann.

[2] Ceci s'applique en particulier à Log nép. $(1 + \sqrt{2})$ (constante de M. Laisant). Je remarque, en cours d'impression, qu'il en est de même du développement en fraction continue de π, puisque $e^{\pi i} = -1$.

Remarque. — On pourrait essayer de généraliser le théorème III et ses corollaires en considérant l'ensemble Σ formé des nombres de S_1 et des nombres algébriques par rapport à S_1, c'est-à-dire des nombres racines d'équations algébriques dont les coefficients sont des nombres de S_1. On aurait ainsi, semble-t-il, l'extension la plus générale du théorème précité de M. Lindemann.

Pour une pareille tentative, il conviendra de se reporter aux travaux de M. Lindemann (*Math. Ann.*, t. XX, 1882, p. 213) et de Weierstrass (*Sitzungsberichte der Berl. Akad.*, 1885, p. 1067), en cherchant à suivre une marche analogue.

IV.

Je vais maintenant établir la propriété suivante :

THÉORÈME IV. — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ des nombres rationnels > 1, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ des nombres de Liouville > 1 appartenant à un ensemble S'' satisfaisant à (17). Tout polynome ψ à coefficients entiers positifs formé avec les nombres $I^{(j)}$, $a_k^{I^{(j)}}$, $I^{(j)I^{(k)}}$, $I^{(j)a_k}$ est un nombre transcendant.*

La même conclusion subsiste quand $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ sont des nombres rationnels positifs quelconques $\neq 1$, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ des nombres de Liouville positifs quelconques fonctions rationnelles à coefficients entiers réels, d'un même nombre de Liouville positif $\mathfrak{J}$ satisfaisant à (17), pourvu que la fonction $\Psi(x)$ obtenue en remplaçant $\mathfrak{J}$ par x dans le polynome ψ dépende de x.

Soit une quantité ψ limite pour n infini d'une suite de quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots$, où ψ_n est une fonction de quantités rationnelles

$$\xi_n = P_n Q_n^{-1}, \qquad \xi'_n = P'_n Q'^{-1}_n, \qquad \ldots,$$

ayant elles-mêmes pour limites quand n croît indéfiniment $\xi, \xi', \ldots$, en sorte que

$$\psi = \psi(\xi, \xi', \ldots), \qquad \psi_n = \psi(\xi_n, \xi'_n, \ldots).$$

Les $\xi, \xi', \ldots$ seront des nombres transcendants de Liouville ou des nombres rationnels en nombre fini : l'un au moins sera un nombre de Liouville.

Je suppose que, pour une infinité de valeurs de n, $|\psi - \psi_n|$ possède une limite supérieure $l_n \neq 0$ et fonction de n, quand les ξ, ξ', ... prennent une série de valeurs appartenant à un certain ensemble de nombres (par exemple S, S', S'', S''', S_1, ...) : l_n tend vers o avec $\frac{1}{n}$.

J'admets alors que la quantité ψ puisse être racine d'une équation algébrique donnée *irréductible* arbitraire $f(x) = 0$ à coefficients entiers : $\psi_n = x_n$ est une valeur approchée de la racine. On aura, pour n assez grand,

$$f(\psi_n) = f(\psi + \psi_n - \psi) = (\psi_n - \psi)\mathrm{M} \neq 0,$$

où $|\mathrm{M}| \geqq \frac{1}{2}|f'(\psi)|$ est fini, et

$$|f(\psi_n)| \leqq l_n \mathrm{M}. \tag{19}$$

D'autre part, si l'on peut, par un procédé quelconque, avoir une limite inférieure $\lambda_n \neq 0$ et fonction de n de la quantité $|f(\psi_n)|$ dès que n est assez grand, on devra avoir

$$\lambda_n \leqq l_n \mathrm{M}.$$

Si cette condition n'a pas lieu pour toute valeur de n assez grande, ψ est un nombre transcendant.

J'envisage un cas plus particulier, celui où ψ_n est un nombre algébrique racine d'une équation à coefficients entiers

$$\mathrm{F}_n(x) = \mathrm{B}_0 x^{d_n} + \mathrm{B}_1 x^{d_n - 1} + \ldots + \mathrm{B}_{d_n} = 0, \tag{20}$$

de racines

$$\eta_1 = \psi_n, \qquad \eta_2, \qquad \ldots, \qquad \eta_{d_n}.$$

La fonction

$$\Phi_n = \mathrm{B}_0^{d_n} f(\eta_1) \ldots f(\eta_{d_n}) \tag{21}$$

est un entier fonction de n. L'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir en commun avec F_n une racine sans diviser F_n : si l'on peut établir qu'il n'en est pas ainsi, $\Phi_n \neq 0$ et $|\Phi_n| \geqq 1$. On déterminera une limite supérieure des $|\eta_i|$, et l'on en déduira une limite supérieure μ_n des $|f(\eta_i)|$, en sorte que

$$|f(\psi_n)| = |f(\eta_1)| = |\Phi_n|\,|\mathrm{B}_0^{d_n} f(\eta_2)\ldots f(\eta_n)|^{-1} \geqq \mathrm{B}_0^{-d_n} \mu_n^{-d_n+1} = \mathrm{L}_n; \tag{22}$$

on pourra prendre $\lambda_n = L_n$, et il faudra

$$L_n \leqq l_n M.$$

En choisissant, si cela est possible, les $\xi - \xi_n$ de façon que

$$l_n B_0^{d_n} \mu_n^{d_n - 1} \tag{23}$$

tende vers o pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment, on obtient des quantités ψ qui sont des nombres transcendants.

Ces principes généraux posés, je vais en faire une application : soient $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$ un nombre fini de nombres rationnels réels positifs > 0, $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots, I^{(\nu)}$ un nombre fini de nombres de Liouville réels positifs appartenant à un ensemble S''. Je prends pour $\xi, \xi', \ldots$ des quantités quelconques de la forme

$$I^{(j)}, \quad a_i^{I^{(j)}}, \quad I^{(i)^{I^{(j)}}}, \quad I^{(j)^{a_i}}. \tag{23 bis}$$

Il y a un cas où l'on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$, puisque les nombres $\mathfrak{J}$ de S'' sont tels que les $\mathfrak{J} - I_n$ sont tous de même signe, c'est celui où, remplaçant $I^{(j)}$ par $x^{(j)}$, quel que soit j, dans ψ, ψ devient, au voisinage du système de valeurs $x^{(1)} = I^{(1)}$, $x^{(2)} = I^{(2)}$, ... une fonction Ψ *simultanément* croissante ou décroissante de toutes les variables $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$. Exemples :

1° ψ est une fonction rationnelle à coefficients entiers réels des quantités (23 *bis*), et les $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$ sont des fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre $\mathfrak{J}$ de Liouville réel : remplaçant $\mathfrak{J}$ par x, il suffira que Ψ dépende effectivement de x pour que $\psi - \psi_n$ soit $\neq 0$ quand $x = \mathfrak{J}$, dès que n est assez grand (¹). Ainsi, quand $\psi = a^{\mathfrak{J}} + a^{-\mathfrak{J}}$, $\psi - \psi_n \neq 0$;

2° $\psi = \sum A \xi^{\omega} \xi'^{\omega'} \ldots$ est un polynome en $\xi, \xi', \ldots$ à coefficients entiers positifs, et les a_i et les $I^{(j)}$ sont tous > 1; dans ce *deuxième cas,* que je vais seul considérer, en observant que les mêmes raisonnements s'appliquent en partie dans le *premier,* quand on fait varier les $x^{(j)}$ de quantités suffisamment petites $\Delta x^{(j)}$ toutes de même signe, $\Delta x^{(j)}$, $\Delta a_i^{x^{(j)}}$, $\Delta x^{(j)^{x^{(k)}}}$, $\Delta x^{(j)^{a_i}}$ sont tous

(¹) La fonction $\Psi(x)$ est, en effet, monodrome aux environs de $x = \mathfrak{J}$.

du signe des $\Delta x^{(j)}$, et aussi $\Delta\Psi$. Dès que n est assez grand, on est sûr que $\psi - \psi_n \neq 0$.

Ceci posé, dans ce même cas,

$$\psi_n = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots,$$

et $|\psi - \psi_n|$ a une limite supérieure de la forme $\lambda\zeta_n$, où λ est une constante et ζ_n une limite supérieure des quantités $|I^{(j)} - I_n^{(j)}|$. D'après les relations (2), (3) et (19), on pourra poser

$$(23\ ter) \qquad |\psi - \psi_n| \leqq \lambda\zeta_n \leqq Q_n^{-\tau\varphi_n} = l_n, \qquad |f(\psi_n)| \leqq l_n M,$$

où $\tau > 0$ est une constante limitée inférieurement.

D'autre part, $\mathfrak{J}$ et J étant deux quelconques des nombres $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}$, les $\xi_n, \xi'_n, \ldots$ sont chacun d'une des formes

$$I_n, \quad \left(\frac{p}{q}\right)^{I_n}, \quad I_n^{J_n}, \quad I_n^{\frac{p}{q}} \qquad (p,\ q \text{ entiers} > 0),$$

avec

$$I_n = P_n Q_n^{-1} > 1, \qquad J_n = P'_n Q_n'^{-1} > 1, \qquad pq^{-1} > 1;$$

$\xi_n, \xi'_n, \ldots$ sont racines d'équations algébriques d'une des formes

$$(24) \qquad \begin{cases} Q_n x - P_n = 0, & q^{P_n} x^{Q_n} - p^{P_n} = 0, \\ Q_n^{P'_n} x^{Q'_n} - P_n^{P'_n} = 0, & Q_n^p x^q - P_n^p = 0. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans ψ_n, de toutes les manières possibles, chacune des quantités $\xi_n, \xi'_n, \ldots$ par les diverses racines de celles des équations (24) dont elle est racine, on obtient d_n quantités conjuguées $\eta_1 = \psi_n, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$ qui sont racines d'une même équation algébrique $F_n = 0$ à coefficients entiers de la forme (20).

J'admets que ψ soit racine de $f(x) = 0$, c'est-à-dire soit algébrique.

Je dis d'abord que $f(\eta_i) \neq 0$. En effet, si $f(\eta_i) = 0$, $f(x)$, qui est irréductible, divisera $F_n(x)$; toutes les racines de $f(x)$, et en particulier ψ, seront parmi les quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$. Les racines des équations (24) sont d'ailleurs d'une des formes

$$x = I_n, \qquad x = (pq^{-1})^{I_n} e^{2k\pi i Q_n^{-1}}, \qquad x = I_n^{J_n} e^{2k'\pi i Q_n'^{-1}},$$
$$x = I_n^{pq^{-1}} e^{2k''\pi i q^{-1}},$$

où k est un des entiers $0, 1, 2, \ldots, Q_n - 1$, k' un des entiers $0, 1, 2, \ldots, Q'_n - 1$, k'' un des entiers $0, 1, 2, \ldots, q - 1$. On aura, par exemple, une égalité de la forme

$$\psi = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots e^{2\pi i(\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n'^{-1} + \ldots)} = \psi_n'.$$

D'abord, quand les $\xi - \xi_n$ sont tous positifs, c'est-à-dire puisque $a_i > 1$, $I^{(j)} > 1$, quand les $\mathfrak{I} - I_n$ dans S'' sont tous positifs, le module du second membre est $< \psi$, et l'égalité est impossible; alors $f(\eta_i)$ est $\neq 0$. Quand les $\mathfrak{I} - I_n$ sont tous négatifs, ψ_n' étant réel, ainsi que ψ_n,

$$\psi_n - \psi = \psi_n - \psi_n' = \sum A \xi_n^{\omega} \xi_n'^{\omega'} \ldots [1 - \cos 2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \omega' k' Q_n'^{-1} + \ldots)] > 0.$$

$1 - \cos 2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \ldots)$ tend vers 0 quand n croît indéfiniment, puisque $\psi_n - \psi$ tend alors vers 0, c'est-à-dire que, N_n étant entier,

$$2\pi(\omega k Q_n^{-1} + \ldots) = \frac{2\pi N_n}{Q_n Q_n' \ldots} = 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n'),$$

avec λ entier, $\lim \varepsilon_n' = 0$ pour $n = \infty$.

Or $Q_n Q_n' \ldots$ est de la forme $Q_n^{\sigma_n}$ (σ_n limité supérieurement et inférieurement), d'après (3); $1 - \cos 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n')$ est nul ou au moins de l'ordre de grandeur de $\varepsilon_n'^2$, c'est-à-dire $\geqq Q_n^{-\sigma}$, où σ est un nombre fixe convenable > 0; il en serait de même de $|\psi_n - \psi_n'| \neq 0$, car les ε_n' ne sont pas tous nuls; mais $\psi_n - \psi$ est $\neq 0$ et au plus de l'ordre de grandeur de $Q_n^{-\tau\rho_n}$, d'après ce qu'on a vu [équation (23 *ter*)]; on est donc conduit à une impossibilité quand n est assez grand.

Finalement, $f(\eta_i)$ est $\neq 0$ quand les $\mathfrak{I} - I_n$ dans S'' sont tous à la fois positifs ou négatifs [1].

---

[1] On remarquera que, si l'on suit des procédés de raisonnement analogues dans le premier cas mentionné plus haut, en supposant $\psi = \sum A \xi^{\omega} \xi'^{\omega'} \ldots$, où A, ξ, ξ', ... sont positifs et les $I^{(j)}$ fonctions rationnelles, à coefficients rationnels réels, d'un même nombre $\mathfrak{I}$ de Liouville réel (a_i et $I^{(j)} > 0$), on est sûr que $|\psi - \psi_n| \neq 0$ pour une infinité de valeurs de n, si Ψ dépend de x; on a encore (23 *ter*), (24) avec $pq^{-1} > 0$, $|\psi_n - \psi| > 0$,

$$1 - \cos 2\pi(\lambda \pm \varepsilon_n') = \lambda_1 \varepsilon_n'^2 \qquad (\lambda_1 \text{ fini} \geqq 0),$$

les ε_n' n'étant pas tous nuls, puisque $|\psi - \psi_n| \neq 0$. On est également conduit à un résultat absurde, c'est-à-dire que $f(\eta_i)$ est aussi $\neq 0$. Il est inutile de s'occuper du signe des quantités $I^{(j)} - I_n^{(j)}$.

Dans le cas considéré ici, les raisonnements qui suivent s'appliquent à peu près identiquement.

Je suppose donc $f(\eta_i) \neq 0$. On a, dans (21), $|\Phi_n| \geqq 1$. Une limite supérieure des η_i est précisément ψ_n; si δ est une limite supérieure du degré et des valeurs absolues des coefficients de $f(x)$,

(25) $$|f(\eta_i)| \leqq (\delta+1)^2 \psi_n^\delta = \mu_n < A',$$

où A' est un nombre fixe. Il reste à obtenir une limite supérieure de B_0 et de d_n.

Le nombre des quantités ξ, ξ', ... distinctes dans ψ est limité; quand on substitue dans ψ_n à ξ_n, ξ'_n, ... les diverses racines des équations (24), le nombre d_n des quantités $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{d_n}$ obtenues est au plus égal à un nombre de la forme $Q_n^{\theta_n}$, où θ_n est limité supérieurement, d'après (2) et (3). Donc

(26) $$d_n \leqq Q_n^\theta, \quad (\theta \text{ positif indépendant de } n).$$

Je fais dans les équations (24) le changement de variables respectif

$$x = y Q_n^{-1}, \qquad x = y q^{-\mu'}, \qquad x = y Q_n^{-\mu'}, \qquad x = y Q_n^{-\mu'};$$

il vient les équations

(27) $$\begin{cases} y - P_n = 0, & y^{Q_n} - p^{P_n} q^{\mu' Q_n - P_n} = 0, \\ y^{Q'_n} - P_n^{P'_n} Q_n^{\mu' Q'_n - P'_n}, & y^q - P_n^p Q_n^{\mu' q - p} = 0. \end{cases}$$

Si μ' est un entier supérieur au double de la plus grande des quantités $I^{(1)}, \ldots, I^{(\nu)}, a_1, \ldots, a_\mu$, quand n est assez grand, les racines des équations (27) sont des entiers algébriques. Posant

$$\xi_n = \rho_n Q_n^{-1}, \qquad \xi_n = \rho_n q^{-\mu'}, \qquad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu'} \quad \text{ou} \quad \xi_n = \rho_n Q_n^{-\mu'},$$

suivant celle des équations (27) dont ξ est racine, et des relations analogues pour ξ'_n, ..., on peut déterminer un nombre $\nu_n \leqq \nu'$, dès que n dépasse une certaine limite, et tel que

$$C_n = Q_n^{\nu_n}, \qquad \chi_n = \psi_n C_n = \sum A_n \rho_n^\omega \rho_n'^{\omega'} \ldots,$$

où les A_n sont entiers, et χ_n un entier algébrique; χ_n et ses conjuguées sont racines d'une équation algébrique en z de degré d_n, où le coefficient de la plus haute puissance de z est l'unité

$$z^{d_n} + D_1 z^{d_n - 1} + \ldots + D_{d_n} = 0;$$

ψ_n et ses conjuguées sont alors racines de l'équation à coefficients entiers

$$C_n^{d_n} x^{d_n} + D_1 C_n^{d_n - 1} x^{d_n - 1} + \ldots + D_{d_n} = 0,$$

équation qui, ayant mêmes racines que l'équation (20), est telle que, d'après (26), l'on peut prendre

$$(28) \qquad B_0 \leqq C_n^{d_n} \leqq Q_n^{\nu' d_n} \leqq Q_n^{\nu' Q_n^\theta}.$$

Il ne reste plus qu'à rapprocher les conditions (23), (23 *ter*), (25), (26) et (28); il en résulte que ψ sera transcendant si

$$Q_n^{-\tau\varphi_n + \nu' Q_n^{2\theta}} A'^{Q_n^\theta}$$

tend vers 0 pour une infinité de valeurs de n croissant indéfiniment. La condition suffisante ainsi obtenue est encore la condition (17). Il s'ensuit qu'elle a lieu pour tous les nombres réels > 1 d'un ensemble S'' satisfaisant à (17), en particulier d'un ensemble S'' défini par un nombre $\mathfrak{z} > 1$ de Liouville remplissant les conditions du corollaire I du théorème I de notre Note précitée du *Bull. Soc. math.*

En tenant compte de ce qui a été dit pour le *premier cas,* on obtient le théorème IV. C. Q. F. D.

Ce théorème comporte encore un certain nombre de corollaires presque immédiats et qui valent la peine, semble-t-il, d'être énoncés isolément.

Corollaire I. — *$\mathfrak{z}$ étant un nombre réel de Liouville, positif ou négatif, satisfaisant à* (17), *$a^{\mathfrak{z}}$, où a est rationnel* > 0 *et* $\neq 1$, *est transcendant.*

Corollaire II. — *$\mathfrak{z}$ étant un nombre réel de Liouville,* > 0 *et satisfaisant à* (17), *$\mathfrak{z}^{\mathfrak{z}}$ est transcendant.*

Corollaire III. — *Le logarithme d'un nombre rationnel ou algébrique réel* > 1, *dans le système de base a rationnelle* > 0 et $\neq 1$, *ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *par suite son développement en fraction continue* [1] *arithmétique a son ordre limité comme au corollaire* II *du théorème* III.

---

[1] Ce logarithme peut être rationnel : le logarithme de $\sqrt{2}$ est $\frac{1}{2}$ avec la base 2; mais $\log\sqrt{2}$ est irrationnel avec la base 3. De même, la racine positive de $x^x = m$ peut être rationnelle car $2^2 = 4$; mais la racine de $x^x = 2$ est irrationnelle.

Corollaire IV. — *La racine positive de l'équation $x^x = m$, où m est algébrique > 1, ne peut être un nombre de Liouville satisfaisant à* (17); *par suite, son développement en fraction continue a son ordre limité comme ci-dessus.*

Enfin, je mentionnerai encore ce corollaire à titre d'exemple :

Corollaire V. — *Tout étant posé comme au corollaire* I, *$a^{\mathfrak{z}} + a^{-\mathfrak{z}}$ est transcendant.*

Car si, par exemple, $\mathfrak{z} > 0$, $a^{-\mathfrak{z}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\mathfrak{z}}$.

Je me contenterai d'indiquer la possibilité d'extensions du théorème IV par les procédés précédents pour d'autres formes de ψ (1).

---

(1) Additions à la bibliographie indiquée par moi à la page 273 de mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants*, article *Nombres transcendants*.

A. Hurwitz, *Acta mathematica*, t. XIV, 1890, p. 211; *Math. Ann.*, t. XXII, p. 211; t. XXXII, p. 583; t. XXXIII, p. 249; t. XLIV, p. 417; *Göttinger Nachr.*, 1893, p. 220; *Naturforsch. Gesellschaft*, 1896, p. 34. Le premier de ces Mémoires renferme des résultats très élégants sur la réductibilité des fonctions entières à coefficients rationnels, le dernier sur la théorie des fractions continues.

Staeckel, *Acta Math.*, t. XXV.

Faber, *Math. Ann.*, t. LVIII.

Je dois en grande partie ces renseignements complémentaires à une obligeante communication de MM. Hurwitz et Landau.