BULLETIN DE LA S. M. F.

L. REMY

Sur une famille dénombrable de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 53-69
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__53_1>

SUR UNE FAMILLE DÉNOMBRABLE DE SURFACES HYPERELLIPTIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

Par M. L. Remy.

L'objet de cette Note est de définir et de caractériser une famille de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles. Cette famille comprend une infinité *dénombrable* de surfaces, dépendant chacune de trois modules, et elle se trouve liée à certaines équations arithmétiques du type de Pell.

On pourrait définir par le même procédé des familles de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à un nombre moindre de points doubles, également liées à des équations arithmétiques. Mais il suffira d'étudier le cas des surfaces à quinze points doubles qui présente le moins de complexité, pour mettre en évidence le caractère *arithmétique* du problème de la recherche des surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

I.

1. Pour définir cette famille, considérons les fonctions thêta de deux variables u, v, répondant au tableau de périodes (¹)

$$(T_\Delta) \qquad \begin{vmatrix} \frac{1}{\Delta} & 0 & G & H \\ 0 & 1 & H & G' \end{vmatrix}$$

d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires, et admettant le point $u=0$, $v=0$ pour zéro d'ordre $4p$.

En égalant les coordonnées homogènes d'un point $x_1, \ldots, x_4$ à quatre de ces fonctions $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$, supposées linéairement distinctes, on obtient une surface algébrique telle qu'entre les points de cette surface et les couples de points d'une courbe de genre *deux,* il existe une correspondance $(1, \Delta)$.

La surface possède quinze points doubles correspondant aux demi-périodes autres que $u=0$, $v=0$. Son degré est égal à la moitié (²) du nombre des zéros communs à deux des fonctions considérées Θ, non compris le point $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}(2\Delta \times 2n \times 2n - 4p \times 4p)$. Pour que la surface soit du quatrième ordre, il faut donc que les entiers Δ, n, p vérifient la relation

$$(E) \qquad \Delta n^2 - 2p^2 = 1.$$

Dans ce cas il existe effectivement quatre fonctions Θ linéairement distinctes.

(¹) Ces fonctions ont été étudiées systématiquement par M. Traynard. Leur théorie était d'ailleurs implicitement contenue dans les travaux de M. Humbert, ainsi que nous l'avons montré (*Comptes rendus,* 26 mars 1906).

(²) En effet, aux valeurs (u, v) et $(-u, -v)$ correspond un même point de la surface.

2. Inversement, étant donné un système d'entiers Δ, n, p, satisfaisant à la condition (E), peut-on lui faire correspondre une surface hyperelliptique du quatrième ordre à quinze points doubles Σ? Il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre l'exemple suivant : soit le système

$$\Delta = 1, \qquad n = 17, \qquad p = 12.$$

On peut mettre les quatre fonctions Θ_i correspondantes sous la forme

$$x_i = \theta_i(u, v)\,[F(u, v)]^8 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

en désignant par $\theta_1, \ldots, \theta_4$ les quatre fonctions thêta d'ordre *deux*, de caractéristique nulle, paires et par $F(u, v)$ la fonction thêta d'ordre *quatre*, de caractéristique nulle, paire et admettant le point $u = 0$, $v = 0$ comme zéro d'ordre *six*. Après suppression du facteur commun $[F(u, v)]^8$, on retrouve la représentation classique de la surface de Kümmer.

Ainsi, lorsque les quatre fonctions Θ_i possèdent un facteur commun, la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$ n'est pas nécessairement une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; et, au cas où il en serait ainsi, la surface correspondrait en réalité, non pas au système d'entiers Δ, n, p, mais à un système Δ, n', p' ($n' < n$ et $p' < p$).

3. Il importe donc de reconnaître *a priori* si les fonctions Θ_i possèdent un facteur commun. A cet effet considérons une fonction $\theta(u, v)$ quelconque répondant au tableau (T_Δ), d'ordre ν, inférieur à $2n$, s'annulant à l'ordre ρ au point $u = 0$, $v = 0$, et formons l'expression

$$D(\nu, \rho) = \Delta n \nu - p\rho,$$

qui, en général, représente la moitié du degré de la courbe $\theta(u, v) = 0$ sur la surface définie par les équations $x_i = \Theta_i(u, v)$.

Dans certains cas cette formule peut donner pour D une valeur négative ou nulle. En premier lieu, si D est négatif, les fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta_i(u, v)$ possèdent plus de $4n\nu\Delta$ et, par suite, une infinité de zéros communs. Donc les quatre fonctions $\Theta_i(u, v)$ sont divisibles par $\theta(u, v)$.

Supposons en second lieu que $D = 0$ et posons

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \lambda_1 x_4, \\ X_2 &= x_2 + \lambda_2 x_4, \\ X_3 &= x_3 + \lambda_3 x_4, \\ X_4 &= x_4; \end{aligned}$$

on peut déterminer les constantes λ de manière que les fonctions X_1, X_2, X_3 possèdent $(4n\nu\Delta + 1)$ zéros communs avec la fonction $\theta(u, v)$ et par suite renferment $\theta(u, v)$ en facteur. Dès lors l'équation $\theta(u, v) = 0$ représente sur la surface non pas une courbe mais un point singulier $X_1 = X_2 = X_3 = 0$, et la surface a plus de quinze points doubles.

En résumé, pour qu'il corresponde aux entiers Δ, n, p une surface du quatrième ordre à quinze points doubles, il est *nécessaire* qu'il n'existe aucune fonction $\theta(u, v)$ pour laquelle l'expression $D(\nu, \rho)$ soit nulle ou négative.

4. Cette condition est *suffisante :* pour le prouver, il suffit d'établir que, si les fonctions $\Theta_i(u, v)$ ont un facteur commun $F(u, v)$, en sorte que

$$x_i = \Phi_i(u, v)\, F(u, v),$$

l'expression $D(\nu, \rho)$ correspondant à la fonction $F(u, v)$ est nécessairement nulle ou négative.

Les fonctions F et Φ_i sont de même parité, de même caractéristique, et leurs ordres sont de même parité. Pour fixer les idées, nous les supposerons d'ordre pair, de caractéristique nulle, et paires; la démonstration serait analogue dans les autres cas.

Désignons par 2ν l'ordre de F, par 2ρ l'ordre de multiplicité du zéro $u = 0$, $v = 0$, et enfin par $2\nu'$, $2\rho'$ les quantités analogues pour les fonctions Φ_i. En vertu des relations

$$\begin{aligned} n &= \nu + \nu', \\ 2p &= \rho + \rho', \end{aligned}$$

l'équation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

peut se mettre sous la forme

$$[(2\Delta\nu'^2+2-\rho'^2)-4]+(2\Delta\nu\nu'-\rho\rho')+(2\Delta n\nu-2p\rho)=0.$$

Le premier terme est positif ou nul, car l'expression

$$(2\Delta\nu'^2+2-\rho'^2)$$

représente le nombre des fonctions thêta d'ordre $2\nu'$, de caractéristique nulle, paires, s'annulant à l'ordre $2\rho'$ pour $u=0$, $v=0$, et il y en a au moins quatre linéairement distinctes, à savoir $\Phi_1, \ldots, \Phi_4$. Le second terme ne peut être négatif, car dans ce cas les fonctions F et Φ_i ($i=1, 2, 3, 4$) auraient plus de $2\Delta\times 2\nu\times 2\nu'$ zéros communs et par suite posséderaient un facteur commun. Dès lors le troisième terme est négatif ou nul : or c'est précisément $D(2\nu, 2\rho)$.

5. La condition précédente peut s'exprimer par un système de deux inégalités entre les entiers indéterminés ν et ρ. En effet, considérons d'abord les fonctions thêta d'ordre pair 2ν, de caractéristique nulle, et paires : elles sont au nombre de $(2\Delta\nu^2+2)$ linéairement distinctes, et pour que l'on puisse en former une dont le développement de Mac Laurin au point $u=0$, $v=0$ commence par des termes d'ordre 2ρ, il faut que

$$2\Delta\nu^2+2-\rho^2\geqq 1.$$

L'existence d'une surface Σ correspondant aux entiers Δ, n, p est donc subordonnée à l'impossibilité de la résolution en nombres entiers ν, ρ du système d'inégalités

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \rho^2-2\Delta\nu^2\leqq 1, \\ \Delta n\nu\leqq p\rho. \end{cases}$$

On obtient des systèmes analogues en considérant des fonctions thêta paires ou impaires et de caractéristique quelconque. La discussion n'offre pas de difficultés et montre que chacun de ces systèmes entraîne nécessairement le système (I).

Le problème se trouve donc ramené à la discussion de ce *seul système* d'inégalités.

6. Or la seconde inégalité du système (I) peut s'écrire

$$(\Delta n^2)(\Delta \nu^2) \leqq p^2 \rho^2,$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (E),

$$(1 + 2p^2)(\Delta \nu^2) \leqq p^2 \rho^2$$

ou encore

$$\rho^2 - 2\Delta \nu^2 \geqq \frac{\Delta \nu^2}{p^2},$$

ce qui exige, puisque ρ et ν sont *entiers*,

$$\rho^2 - 2\Delta \nu^2 \geqq 1.$$

La comparaison de cette inégalité avec la première du système (I) prouve que l'on doit avoir nécessairement l'*égalité*

$$\text{(E}'\text{)} \qquad \rho^2 - 2\Delta \nu^2 = 1.$$

Ainsi les entiers ρ, ν vérifient l'équation de Pell (E′); et le système (I) sera impossible à résoudre si l'on a, pour toute solution ρ_k, ν_k de cette équation,

$$\Delta n \nu_k > p \rho_k.$$

Or, d'après l'équation (E′), le rapport $\frac{\nu_k}{\rho_k}$ croît avec le rang k de la solution ν_k, ρ_k; l'inégalité précédente sera donc vérifiée pour toute valeur de k si elle l'est pour $k = 1$.

Voici donc quelle est la conclusion de l'analyse précédente :

Pour qu'il corresponde une surface Σ *aux entiers* Δ, n, p, *supposés liés par la relation* (E), *il faut et il suffit que la plus petite solution* ρ_1, ν_1 *de l'équation de Pell* (E′) *vérifie l'inégalité*

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \Delta n \nu_1 > p \rho_1.$$

II.

7. Les équations (E) et (E′) se trouvent liées très simplement l'une à l'autre : les deux formes

$$\Delta X^2 - 2Y^2$$

et

$$x^2 - 2\Delta y^2$$

ont même discriminant; de plus, sous l'hypothèse que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ peut représenter le nombre 1 (ce qui est le cas dans le problème actuel), ces deux formes sont équivalentes. Si l'on désigne en effet par n_1, p_1 une solution quelconque de l'équation

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1,$$

la substitution modulaire

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x = \Delta n_1 X + 2p_1 Y, \\ y = p_1 X + n_1 Y \end{cases}$$

fait passer d'une forme à l'autre.

Nous supposerons désormais que dans ces formules n_1, p_1 désignent, non plus une solution quelconque, mais celle formée par les plus petits entiers *non négatifs*. Il est aisé de démontrer que, sous cette hypothèse, on obtient *toutes les solutions positives* x, y de l'équation (E′) en remplaçant dans les formules (S) X, Y par toutes les solutions positives de l'équation (E) : il suffit, pour le prouver, de vérifier que les formules (S) ne peuvent donner pour x et y deux valeurs positives si X et Y ne sont pas tous deux positifs.

8. Il convient d'examiner à part le cas où p_1 serait nul, ce qui exige que

$$\Delta = 1;$$

dans ce cas les surfaces Σ correspondantes seraient représentables sur la surface de Kummer. Mais, en fait, il n'en existe pas, car à la solution

$$n_1 = 1, \qquad p_1 = 0$$

correspond la représentation classique de la surface de Kummer et aucune autre solution n, p de l'équation (E) ne satisfait à l'inégalité (I′).

Ce cas étant écarté, on peut démontrer qu'à la plus petite solution n_1, p_1 de l'équation (E) correspond certainement une surface Σ. En effet, la plus petite solution $x = \rho_1$, $y = \nu_1$ de l'équation

(E′) s'exprime en fonction de n_1 et p_1 par les formules (S), d'où

$$\rho_1 = 4p_1^2 + 1,$$
$$\nu_1 = 2p_1 n_1.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'inégalité (I′) elle devient

$$p_1 \gtreqless 0,$$

condition qui ne pourrait être satisfaite que dans le cas précédemment exclu où $p_1 = 0$.

Au contraire, si l'on considère la deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E), solution qui se calcule de suite par la résolution de l'équation de Pell (E′) et par les relations (S), on reconnaît qu'elle ne vérifie pas l'inégalité (I′). Il en est de même *a fortiori* pour toutes les autres solutions de l'équation (E), puisque le rapport $\frac{p}{n}$ croît avec le rang de la solution n, p.

Il ne correspond donc de surface Σ qu'à la plus petite solution n_1, p_1.

Nous parvenons ainsi au résultat suivant :

Il existe une famille dénombrable *de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre Σ_Δ définies de la manière suivante : soit Δ un entier quelconque (sauf $\Delta = 1$) tel que la forme $\Delta X^2 - 2Y^2$ puisse représenter le nombre* 1, *et soit n, p la plus petite solution de l'équation*

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1;$$

les coordonnées homogènes d'un point de la surface Σ_Δ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta répondant au tableau de périodes (T_Δ), *d'ordre $2n$, de caractéristique nulle, paires et admettant le point $u = 0$, $v = 0$ pour zéro d'ordre $4p$.*

Nous établirons un peu plus loin que ces surfaces sont effectivement toutes distinctes, ce qui n'est pas évident *a priori;* car à des représentations paramétriques distinctes pourrait correspondre une même surface.

III.

9. La surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles dépend projectivement de *quatre* paramètres, alors qu'une surface hyperelliptique ne dépend que de *trois* modules : chacune des surfaces Σ_Δ doit donc être caractérisée par *une* condition.

A cet effet considérons l'unicursale singulière C_0 qui correspond sur la surface Σ_Δ à la demi-période $u = 0$, $v = 0$ annulant les quatre fonctions coordonnées $x_1, \ldots, x_4$. Cette courbe est de degré $4p$, puisque les développements de Mac Laurin des fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 autour du point $u = 0$, $v = 0$ sont supposés commencer par des termes de degrés $4p$; elle ne passe d'ailleurs par aucun des points doubles de la surface.

L'existence de cette unicursale entraîne une condition

$$f_p(a, b, c, d) = 0$$

entre les quatre paramètres a, b, c, d dont dépend la surface générale du quatrième ordre à quinze points doubles.

10. Pour former cette condition, nous ramènerons la question à un problème de Géométrie plane en projetant la surface à partir d'un de ses points doubles O : le contour apparent en projection se compose de quatre droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et d'une conique C, telles qu'il existe une conique Γ bitangente à C et tangente aux quatre droites Δ (1). Inversement, à une telle figure plane correspond une surface du quatrième ordre à quinze points doubles

Si la surface possède une unicursale C_0 de degré $4p$ ne passant par aucun point double, il existe, en projection, une unicursale C'_0 de même degré, inscrite au contour apparent ; de là résulte une condition, car cette unicursale est assujettie à $12p$ conditions de contact, alors qu'elle ne dépend que de $12p - 1$ paramètres.

Cette méthode permet donc, par un nombre fini d'opérations algébriques, de former une équation algébrique $F_p(a, b, c, d) = 0$ à laquelle satisfait toute surface du quatrième ordre à quinze

(1) Cette conique Γ correspond au cône des tangentes à la surface au centre de projection O.

points doubles qui possède une unicursale d'ordre $4p$ ne passant par aucun point double. Il en résulte que le polynome $F_p(a, b, c, d)$ est divisible par $f_p(a, b, c, d)$.

Mais l'équation $F_p = 0$ peut renfermer des facteurs étrangers : ainsi cette circonstance se présente dans le cas où le cône qui projette l'unicursale C'_0 à partir du point double O coupe la surface suivant deux courbes unicursales qui passent toutes deux par le centre de projection O. En fait, la présence de ces facteurs étrangers dans l'équation $F_p = 0$ rendrait très difficile la formation effective de l'équation $f_p = 0$.

Nous nous bornerons à donner une application de cette méthode au cas où $p = 1$.

IV.

11. Dans le cas où $p = 1$ la relation fondamentale

$$\Delta n^2 - 2p^2 = 1$$

exige

$$\Delta = 3 \qquad \text{et} \qquad n = 1.$$

La surface correspondante Σ_3 est caractérisée par l'existence d'une quartique de deuxième espèce C_0 ne passant par aucun point double.

Elle possède d'ailleurs une deuxième quartique analogue C_1 qui est son intersection résiduelle par la quadrique menée par la quartique C_0.

D'après la méthode du paragraphe III, pour former l'équation F_1, on doit déterminer dans le plan quatre droites $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et une conique C jouissant des deux propriétés suivantes : d'une part, il existe une conique Γ inscrite au quadrilatère $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ et bitangente à C; d'autre part, il existe une quartique unicursale C'_0 bitangente à chacune des quatre droites et quadritangente à C.

A priori, ce problème se décompose et par suite l'équation

$$F_1(a, b, c, d) = 0$$

est réductible. En effet une quartique unicursale C'_0 possède quatre familles de coniques quadritangentes : l'une de ces familles ne comprend aucun couple de bitangentes, alors que chacune des trois autres familles en comprend deux (à savoir les couples Δ_1, Δ_2 et Δ_3, Δ_4 ; Δ_1, Δ_3 et Δ_2, Δ_4 ; Δ_1, Δ_4 et Δ_2, Δ_3). De là quatre problèmes distincts, suivant que la conique C est supposée appartenir à l'une ou l'autre des familles de coniques quadritangentes à C'_0.

Il serait facile de reconnaître que les trois dernières familles sont étrangères au problème actuel. Mais il est préférable pour former l'équation $f_1 = 0$ de partir d'une autre propriété de la surface Σ_3 qui conduit à une équation irréductible.

12. A cet effet considérons les fonctions thêta impaires, du premier ordre, répondant à une caractéristique impaire et au tableau de périodes (T_3). Elles définissent sur la surface une famille linéaire de biquadratiques passant par cinq points doubles. Étant donné un autre point double O de la surface, il existe une biquadratique de la famille passant par O, et elle y présente un point double. Elle est donc projetée de ce point suivant un cône du second ordre γ. On reconnaît aisément que ce cône contient les arêtes du trièdre formé par trois des plans tangents singuliers passant par O, ainsi que les deux points doubles de la surface situés en dehors de ces plans ; de plus il est tangent à la surface.

De là résulte la propriété suivante en projection :

Les droites Δ et la conique C formant le contour apparent sont telles qu'il existe une conique γ circonscrite au triangle $\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$, passant par les points d'intersection de Δ_4 avec C et tangentes à C en un autre point [1].

13. Cette condition peut se traduire analytiquement de la manière suivante : prenons les droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 pour triangle de référence $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ et soit

$$\Gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx = 0$$

l'équation de la conique Γ qui correspond au cône des tangentes au centre de projection.

La droite Δ_4 qui doit être tangente à cette conique a pour équation

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0,$$

[1] Cette méthode appartient pour le fond à M. Humbert (*Comptes rendus*, 2e semestre 1899).

avec la condition

$$(1)\qquad \alpha+\beta+\gamma=0.$$

Enfin la conique C de contour apparent a une équation de la forme

$$C(x,y,z)=\Gamma(x,y,z)+(ax+by+cz)^2=0.$$

Il est aisé de former l'équation de la conique γ, qui est la suivante :

$$C(x,y,z)-\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)[\alpha(a^2+1)x+\beta(b^2+1)y+\gamma(c^2+1)z]=0,$$

et il suffit dès lors d'exprimer que cette conique est tangente à C, ou encore que la droite

$$\alpha(a^2+1)x+\beta(b^2+1)y+\gamma(c^2+1)=0$$

est tangente à C.

Après suppression du facteur étranger [1]

$$(ab+bc+ca-1),$$

on obtient l'équation suivante,

$$(\mathcal{E})\qquad A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+2A'\beta\gamma+2B'\gamma\alpha+2C'\alpha\beta=0,$$

en posant

$$A=(a^2+1)(ab+ac-bc+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A'=(b^2+1)(c^2+1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

les coefficients B, C se déduisant de A par permutation circulaire et de même B′, C′ de A′.

Si l'on pose $\beta=1$ et $\gamma=-(\alpha+1)$, de manière à satisfaire à la relation (1), l'équation ($\mathcal{E}$) est du second degré par rapport à α. Elle est irréductible, car son discriminant n'est pas carré parfait (ce dont on s'assure en faisant par exemple $b=0$, $c=0$). En définitive, on peut considérer a, b, c, α comme les paramètres définissant une surface du quatrième ordre à quinze points doubles et l'équation ($\mathcal{E}$) n'est autre que l'équation désignée plus haut par $f_1=0$.

[1] Si ce facteur était nul, la conique C se décomposerait en deux droites.

14. Énonçons en terminant quelques propriétés géométriques relatives à la surface particulière Σ_3 :

Soit une surface du quatrième ordre à quinze points doubles; on considère trois plans tangents singuliers P_1, P_2, P_3 *menés par un point double* O *et le cône du second ordre* γ, *de sommet* O, *circonscrit au trièdre* $P_1P_2P_3$ *et passant par les deux points doubles de la surface situés en dehors des plans* P_1, P_2, P_3 (*on peut définir soixante cônes analogues*).

Si la surface est tangente à l'un des cônes γ :

1° *Elle est hyperelliptique* (¹);

2° *Elle est tangente aux cinquante-neuf autres cônes* γ;

3° *Elle est tangente à chacune des dix quadriques passant par les neuf points situés en dehors d'un plan tangent singulier et la coupe suivant deux quartiques de deuxième espèce;*

4° *Il existe une quadrique tangente en dix points à la surface, ne passant par aucun point double et la coupant suivant deux quartiques de deuxième espèce.*

V.

15. Pour aborder le cas général, il est nécessaire d'étudier sur la surface Σ_Δ correspondant aux entiers Δ, n_1, p_1 la famille des *courbes unicursales* C *sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface*.

En dehors de l'unicursale singulière C_0, toute courbe algébrique de la surface Σ_Δ s'obtient en égalant à zéro une fonction $\theta(u, v)$ répondant au tableau de périodes (T_Δ), paire ou impaire (²). Si la courbe ne passe par aucun point double de la surface

(¹) Pour pouvoir énoncer ce théorème, il était nécessaire de vérifier que la condition ($\mathfrak{C}$) est *indécomposable*.

(²) Nous supposons ici que les périodes g, h, g' ne sont pas singulières, c'est-à-dire ne satisfont pas à une relation de la forme

$$Ag + Bh + Cg' + D(h^2 - gg') + E = 0,$$

à coefficients entiers.

face, cette fonction est nécessairement d'ordre 2ν, de caractéristique nulle et paire; elle peut d'ailleurs s'annuler pour la demi-période $u=0$, $v=0$, soit 2ρ l'ordre de multiplicité de ce zéro. Le genre de la courbe $\theta(u, v)=0$, supposée sans point multiple, est égal à

$$2\Delta\nu^2+1-\rho^2.$$

De là résulte que la surface possède une infinité d'unicursales C_k liées aux solutions de l'équation de Pell

$$\text{(E}')\qquad \rho^2-2\Delta\nu^2=1,$$

que nous avons déjà rencontrée.

Le degré de la courbe C_k qui correspond à la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation de Pell a pour expression

$$4(\Delta n_1\nu_k-p_1\rho_k).$$

Cette valeur s'exprime plus simplement en fonction de la $k^{\text{ième}}$ solution de l'équation fondamentale

$$\text{(E)}\qquad \Delta n^2-2p^2=1.$$

En effet les formules de la substitution S résolues par rapport à n_k et p_k donnent

$$n_k=n_1\rho_k-2p_1\nu_k,$$
$$p_k=-p_1\rho_k+\Delta n_1\nu_k.$$

Le degré de la courbe C_k est donc $4p_k$. Il croît avec l'indice; la courbe de degré minimum C_1 est de degré $4p_1$, de même que l'unicursale singulière C_0.

L'entier $4p_1$ a donc une signification géométrique simple : il représente le degré minimum des unicursales C *de la surface.*

De là résulte que deux surfaces Σ_Δ, $\Sigma_{\Delta'}$ correspondant à deux entiers p_1, p'_1 différents sont distinctes. Ce raisonnement tombe en défaut lorsque $p_1=p'_1$, en sorte que

$$2p_1^2+1=\Delta n_1^2=\Delta' n_1'^2,$$

car les unicursales C_k et C'_k appartenant à ces deux surfaces et de même indice sont de même degré. Dans ce cas, on s'assure que les surfaces sont distinctes par la considération d'une autre famille de courbes : par exemple la famille linéaire définie par les fonctions thêta d'ordre *deux*, de caractéristique nulle, et paires.

Nous énoncerons enfin le théorème suivant relatif aux unicursales C, et qui se déduit aisément de leur équation hyperelliptique :

Les courbes C_0 et C_1 *forment l'intersection complète de la surface* Σ *par une surface algébrique d'ordre* $2p_1$*; plus généralement on peut faire passer par la courbe* C_k *une surface algébrique ayant avec la surface* Σ *un contact d'ordre* $\left(\frac{n_k}{n_1} - 1\right)$ *le long de l'unicursale singulière* C_0, *et ne la coupant pas en dehors des courbes* C_0 *et* C_k.

VI.

16. Les considérations précédentes permettent d'établir un lien entre l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$ et l'équation algébrique

$$f_p(a, b, c, d) = 0,$$

qui exprime que la surface du quatrième ordre à quinze points doubles de paramètres a, b, c, d possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double de la surface).

Soit p un entier quelconque : décomposons le nombre $2p^2 + 1$ de toutes les manières possibles en un produit de deux facteurs dont l'un soit carré parfait,

$$2p^2 + 1 = \Delta n^2 = \Delta' n'^2 = \ldots,$$

et considérons les surfaces hyperelliptiques Σ_Δ, $\Sigma_{\Delta'}$, ...

Remarquons tout d'abord que, dans le cas où $2p^2 + 1$ est carré parfait, on ne doit pas considérer la décomposition $\Delta = 1$, $n = \sqrt{2p^2 + 1}$, à laquelle ne correspond pas de surface. Au contraire, on doit considérer la décomposition $\Delta = 2p^2 + 1$, $n = 1$, à laquelle correspond la surface Σ_{2p^2+1}.

Ceci posé, nous distinguerons les décompositions en deux classes, suivant que n et p forment ou non la *plus petite solution* de l'équation $\Delta n^2 - 2p^2 = 1$.

Dans ce dernier cas, soit k le rang de la solution n, p, et soit n_1, p_1 la plus petite solution. D'après les résultats du paragraphe V, la surface Σ_Δ qui correspond aux entiers Δ, n_1, p_1 possède une unicursale C de degré $4p$, à savoir celle d'indice k. L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ renfermera donc en facteur le premier membre de l'équation $f_{p_1} = 0$, qui caractérise la surface Σ_Δ.

Supposons que l'on ait formé toutes les équations $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, ..., jusqu'à $f_{p-1} = 0$. Parmi les polynomes $f_\pi (\pi < p)$, on peut prévoir *a priori* ceux que contiendra en facteur l'équation $f_p = 0$ et, par des opérations rationnelles, on débarrassera l'équation $f_p = 0$ de ces facteurs.

Il reste donc à étudier les décompositions Δn^2 de la première classe. A chacune d'elles correspond une surface Σ_Δ possédant deux unicursales C_0, C_1 d'ordre $4p$ et n'en possédant pas de degré moindre. L'équation $f_p(a, b, c, d) = 0$ proprement dite se décomposera donc en autant d'équations qu'il y a de décompositions Δn^2 de première classe.

17. Voici deux remarques qui permettront dans la plupart des cas de reconnaître de suite à quelle classe appartient une décomposition donnée $2p^2 + 1 = \Delta n^2$.

La deuxième solution n_2, p_2 de l'équation (E) se calcule aisément en fonction de n_1, p_1 par les formules S :

$$n_2 = n_1(8p_1^2 + 1),$$
$$p_2 = p_1(8p_1^2 + 3).$$

Dès lors p_2 ne peut être un nombre premier que si $p_1 = 1$, et d'ailleurs il en serait de même de tous les nombres p_k qui contiennent p_1 en facteur : donc, si p est un nombre premier différent de *onze*, toutes les décompositions Δn^2 seront de la première classe.

D'autre part n_2 peut se mettre sous la forme

$$n_2 = n_1(4\Delta n_1^2 - 3);$$

or

$$n_1 \geqq 1;$$

donc, si k est différent de 1,

$$n_k \geqq 4\Delta - 3.$$

Dès lors, si $n < 4\Delta - 3$, on est assuré que n, p est la plus petite solution de l'équation (E), c'est-à-dire que la décomposition Δn^2 est de première classe.

18. Il résulte de l'étude que nous avons faite des unicursales C tracées sur la surface Σ_Δ qu'il n'existe pas d'autre surface de la famille étudiée qui possède une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) en dehors de celles que nous venons de considérer. Mais l'analyse précédente ne prouve pas que l'équation $f_p = 0$ ne renferme pas d'autres facteurs étrangers correspondant par exemple à des surfaces qui ne seraient pas hyperelliptiques.

Quoi qu'il en soit, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Il existe autant de types de surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre à quinze points doubles possédant une unicursale d'ordre $4p$ (sans points multiples et ne passant par aucun point double) que le nombre $2p^2 + 1$ admet de diviseurs carrés. Dans cet énoncé on doit comprendre le diviseur 1, mais non le diviseur $\sqrt{2p^2+1}$ au cas où $2p^2 + 1$ est un carré.

Sous une autre forme :

L'équation algébrique qui exprime qu'une surface du quatrième ordre à quinze points doubles possède une unicursale d'ordre $4p$ se décompose en autant de facteurs, au moins, que le nombre $2p^2 + 1$ possède de diviseurs carrés (y compris 1 et non compris $\sqrt{2p^2+1}$).