BULLETIN DE LA S. M. F.

T. LALESCO

Sur le groupe des équations trinômes

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 75-76
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__75_0>

SUR LE GROUPE DES ÉQUATIONS TRINOMES;

Par M. T. Lalesco.

1. Toute équation trinome peut être réduite à la forme

$$x^n - kax + a = 0, \tag{1}$$

où a désigne un paramètre arbitraire et k la constante $n:(n-1)^{\frac{n-1}{n}}$.

Je me propose de démontrer que le groupe de Galois de cette équation, si son degré est premier, *est le groupe symétrique.*

En effet, les seules racines en a de son discriminant sont 0 et 1; si donc on envisage les racines de (1) comme fonctions de a, autour de l'origine elles formeront un seul cycle et autour du point $a = 1$ il y en a seulement deux qui se permutent, puisque la dérivée seconde de (1) ne s'annule plus pour $x \neq 0$.

Le groupe de monodromie de (1) est donc d'abord transitif à cause du cycle de n racines; il contient d'ailleurs une transposition provenant de la permutation de deux racines autour du point $a = 1$. D'après un théorème bien connu, ce groupe est donc ou imprimitif ou bien identique au groupe symétrique; comme n est premier, la seconde hypothèse est la seule admissible.

Dès lors, le groupe de Galois de l'équation (1), admettant le groupe de monodromie comme sous-groupe invariant, se confondra lui aussi avec le groupe symétrique.

2. D'après un théorème de M. D. Hilbert, il existe *dans ce cas* une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a pour lesquelles le groupe de l'équation (1) sera toujours le groupe symétrique. Par conséquent *une équation trinome, en général, sera sans affect.*

Voici d'ailleurs une démonstration très simple de l'important théorème de M. Hilbert, que nous venons de rappeler.

Soit u un élément primitif du corps de l'équation (1) et soient $u_1, u_2, \ldots, u_N$ ses valeurs conjuguées; par définition, deux quelconques de ces expressions ne peuvent pas être *identiquement* égales [1]. Par conséquent, il existera une infinité de valeurs rationnelles du paramètre a telles que les valeurs numériques correspondantes des éléments u_i soient toutes différentes entre elles, ce qui suffit pour démontrer la proposition.

---

[1] Elles ne sont donc égales que pour un nombre fini de valeurs de a, racines d'un certain nombre d'équations algébriques en a.