BULLETIN DE LA S. M. F.

AURIC

Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle ambiguë du second degré

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 121-125
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__121_1>

SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE D'UNE IRRATIONNELLE AMBIGUË DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. AURIC.

Considérons une irrationnelle ω racine de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

d'où

$$\omega = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Le développement en fraction continue de ω est périodique et nous pouvons écrire

$$\omega \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

La racine conjuguée $\omega' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ donne naissance au développement renversé et l'on a

$$\omega' \equiv (\lambda_n, \lambda_{n-1}, \ldots, \lambda_2, \lambda_1).$$

Si l'irrationnelle ω appartient à une classe ambiguë, ces deux développements sont identiques et cela ne peut se produire que si la suite indéfinie

$$(1) \qquad \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots$$

est symétrique soit par rapport à un terme λ, soit par rapport à l'intervalle compris entre deux termes consécutifs.

Nous savons que, dans le premier cas, ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + \mu a x + c = 0,$$

d'où $\omega = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$, et nous dirons que ω est une *pseudo-fraction*.

Dans le second cas ω est racine d'une équation de la forme

$$ax^2 + bx + a = 0,$$

d'où $\omega\omega' = 1$, et nous dirons que ω est une *pseudo-unité* (1).

Trois cas seulement peuvent se présenter :

A. La suite (1) est symétrique par rapport à deux intervalles : en d'autres termes il existe deux pseudo-unités distinctes équivalentes au sens de Dedekind.

B. La suite (1) est symétrique par rapport à un intervalle et par rapport à un terme, ce qui se présentera évidemment si la période renferme un nombre impair de termes.

C. La suite (1) est symétrique par rapport à deux termes, c'est-à-dire qu'il existe deux pseudo-fractions équivalentes.

Nous allons examiner successivement chacun de ces cas et nous verrons que, si l'on appelle t, u la plus petite solution de l'équation de Fermat

$$t^2 - \Delta u^2 = 4,$$

la nature de la suite (1) dépend exclusivement de la décomposition en facteurs des deux nombres $t + 2$ et $t - 2$.

---

(1) Voir *Journal de M. Jordan*, 1902, p. 416. La distinction entre pseudo-fractions et pseudo-unités a pour but de faire ressortir des résultats différents au point de vue des identités arithmétiques. Mais elle n'est pas essentielle : en effet, toute période $(\ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i, \lambda_i, \lambda_{i-1}, \ldots)$, symétrique par rapport à l'intervalle (λ_i, λ_i), se ramène à la période $(\ldots, \lambda_{i-1}, \pm 1 + \lambda_i, \pm 1, \pm 1 + \lambda_i, \lambda_{i-1}, \ldots)$, qui est symétrique par rapport au terme ± 1.

A. Appelons ω, ω_1 les deux pseudo-unités, on aura

$$\omega\omega' = \omega_1\omega_1' = 1, \qquad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D},$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

Cette relation subsiste évidemment si l'on remplace chaque irrationnelle par son inverse, ce qui donne

$$\frac{1}{\omega_1} = \frac{A - B\omega}{C - D\omega},$$

d'où en substituant on obtient les deux relations :

$$\omega = \frac{(A^2 - C^2)\omega - (AB - CD)}{(AB - CD)\omega - (B^2 - D^2)}, \qquad \omega_1 = \frac{(A^2 - B^2)\omega_1 - (AC - BD)}{(AC - BD)\omega_1 - (C^2 - D^2)}$$

qui donnent sous une forme explicite les équations dont ω et ω_1 sont racines.

La quantité placée sous le radical est égale à

$$(B^2 + C^2 - A^2 - D^2)^2 - 4,$$

ce qui permet d'écrire

$$B^2 + C^2 - A^2 - D^2 = t$$

et, comme $BC - AD = 1$, il vient

$$t + 2 = (B + C)^2 - (A + D)^2 = (B + C + A + D)(B + C - A - D),$$
$$t - 2 = (B - C)^2 - (A - D)^2 = (B - C + A - D)(B - C - A + D).$$

Si $t + 2 = mn$ et $t - 2 = pq$ sont des décompositions acceptables on aura évidemment

$$B = \frac{m + n + p + q}{4}, \qquad A = \frac{m - n + p - q}{4},$$
$$C = \frac{m + n - p - q}{4}, \qquad D = \frac{m - n - p + q}{4}.$$

B. Admettons en second lieu que l'on ait

$$\omega\omega' = 1, \qquad \omega_1 + \omega_1' = \lambda, \qquad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On trouvera comme seconde relation

$$\lambda - \omega_1 = \frac{A - B\omega}{C - D\omega}$$

et en éliminant il viendra

$$\omega = \frac{D(2B - D\lambda)\omega - (BC + AD - CD\lambda)}{(BC + AD - CD\lambda)\omega - C(2A - C\lambda)},$$

$$\omega_1 = \lambda - \frac{(AC - BD)\omega_1 - (A^2 - B^2)}{(C^2 - D^2)\omega_1 - (AC - BD)}.$$

La quantité placée sous le radical sera égale à

$$[\lambda(C^2 - D^2) - 2(AC - BD)]^2 - 4,$$

d'où l'on peut poser

$$\lambda(C^2 - D^2) - 2AC + 2BD = t$$

et par suite, en tenant compte de $BC - AD = 1$,

$$t + 2 = (C + D)[\lambda(C - D) - 2A + 2B],$$
$$t - 2 = (C - D)[\lambda(C + D) - 2A - 2B].$$

Si les décompositions $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$ sont acceptables, on aura

$$C = \frac{m+p}{2}, \qquad A = \frac{\lambda m - n - q}{4}, \qquad D = \frac{m-p}{2}, \qquad B = \frac{\lambda p + n - q}{4}.$$

Remarquons que l'on peut mettre le produit $t\lambda$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda = B^2 + (C\lambda - A)^2 - A^2 - (D\lambda - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda - A) - A(D\lambda - B) = \lambda.$$

C. Admettons, enfin, que l'on ait

$$\omega + \omega' = \lambda, \qquad \omega_1 + \omega'_1 - \lambda_1, \qquad \omega_1 = \frac{A\omega - B}{C\omega - D}$$

avec

$$BC - AD = 1.$$

On aura comme seconde relation

$$\lambda_1 - \omega_1 = \frac{A(\lambda - \omega) - B}{C(\lambda - \omega) - D},$$

et, par suite, en éliminant,

$$\omega = \lambda - \frac{(CD\lambda_1 - BC - AD)\omega - D(D\lambda_1 - 2B)}{C(C\lambda_1 - 2A)\omega - (CD\lambda_1 - BC - AD)},$$

$$\omega_1 = \lambda_1 - \frac{(AC\lambda - BC - AD)\omega_1 - A(A\lambda - 2B)}{C(C\lambda - 2D)\omega_1 - (AC\lambda - BC - AD)}.$$

La quantité placée sous le radical est

$$(C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2DC\lambda_1 + 2BC + 2AD)^2 - 4,$$

ce qui permet de poser

$$C^2\lambda\lambda_1 - 2AC\lambda - 2CD\lambda_1 + 2BC + 2AD = t$$

et, par suite, puisque $BC - AD = 1$,

$$t + 2 = C(C\lambda\lambda_1 - 2A\lambda - 2D\lambda_1 + 4B),$$

$$t - 2 = (C\lambda_1 - 2A)(C\lambda - 2D),$$

et, si l'on pose encore $t + 2 = mn$, $t - 2 = pq$, il viendra

$$C = m, \quad A = \frac{m\lambda_1 - p}{2}, \quad D = \frac{m\lambda - q}{2}, \quad B = \frac{m\lambda\lambda_1 - p\lambda - q\lambda_1 + n}{4}.$$

Enfin, nous remarquerons que l'on peut mettre le produit $t\lambda\lambda_1$ sous la forme d'une somme algébrique de quatre carrés

$$t\lambda\lambda_1 = B^2 + (C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B)^2 - (A\lambda - B)^2 - (D\lambda_1 - B)^2$$

avec

$$B(C\lambda\lambda_1 - A\lambda - D\lambda_1 + B) - (A\lambda - B)(D\lambda_1 - B) = \lambda\lambda_1.$$

Il sera possible de déduire de nombreuses identités arithmétiques des formules que nous venons d'établir.