

BULLETIN DE LA S. M. F.

H BROCARD

Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 38-40

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__38_1

© Bulletin de la S. M. F., 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Propriété nouvelle du quadrilatère et du triangle; par M. H. BROCARD.

(Séance du 8 avril 1874)

1. Les côtés d'un quadrilatère étant pris pour diagonales de carrés, les sommets extérieurs et intérieurs de ces carrés forment deux nouveaux qua-

drilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Soient $abcd$ le quadrilatère donné, A, B, C, D les sommets extérieurs des carrés, A', B', C', D' les sommets intérieurs de ces mêmes carrés.

Nous aurons démontré la proposition si nous faisons voir que les diagonales AC, BD d'une part, $A'C', B'D'$ d'autre part, sont égales et se coupent à angle droit.

2. Prenons pour origine le sommet d , pour axe des x le côté da : désignons les côtés respectivement par $2a, 2b, 2c$ et $2d$, et par α, β les angles cda, dab , et l'angle de cb avec da par γ .

Soient x_1, y_1 les coordonnées de A , x'_1, y'_1 celles de A' , etc.

Nous aurons, comme il est facile de s'en assurer, les deux systèmes d'équations :

$$\begin{array}{ll} x_1 = a, & y_1 = -a, \\ x_2 = 2a - b \cos \beta + b \sin \beta, & y_2 = b \sin \beta + b \cos \beta, \\ x_3 = 2a - 2b \cos \beta - c \cos \gamma + c \sin \gamma, & y_3 = 2b \sin \beta + c \sin \gamma + c \cos \gamma, \\ x_4 = d \cos \alpha - d \sin \alpha, & y_4 = d \sin \alpha + d \cos \alpha, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ll} x'_1 = a, & y'_1 = a, \\ x'_2 = 2a - b \cos \beta - b \sin \beta, & y'_2 = b \sin \beta - b \cos \beta, \\ x'_3 = 2a - 2b \cos \beta - c \cos \gamma - c \sin \gamma, & y'_3 = 2b \sin \beta + c \sin \gamma - c \cos \gamma, \\ x'_4 = d \cos \alpha + d \sin \alpha, & y'_4 = d \sin \alpha - d \cos \alpha, \end{array}$$

sous les conditions communes

$$\begin{aligned} a &= d \cos \alpha + c \cos \gamma + b \cos \beta, \\ d \sin \alpha &= c \sin \gamma + b \sin \beta, \end{aligned}$$

par suite desquelles les expressions de $(x_1 - x_2)$, etc. deviennent

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= y_2 - y_4 = b \cos \beta - d \cos \alpha - c \sin \gamma, \\ x_2 - x_4 &= y_3 - y_1 = a + c \cos \gamma + b \sin \beta + d \sin \alpha, \end{aligned}$$

d'une part, ce qui prouve que $AC = BD$; et

$$\begin{aligned} x'_3 - x'_1 &= y'_2 - y'_4 = d \cos \alpha - c \sin \gamma - b \cos \beta, \\ x'_2 - x'_4 &= y'_1 - y'_3 = a + c \cos \gamma - b \sin \beta - d \sin \alpha, \end{aligned}$$

d'autre part, ce qui prouve que $A'C' = B'D'$.

3. Des équations précédentes, on conclut encore identiquement que

$$\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} \frac{y_4 - y_2}{x_4 - x_2} = -1,$$

et que

$$\frac{y'_3 - y'_1}{x'_3 - x'_1} \frac{y'_2 - y'_4}{x'_2 - x'_4} = -1,$$

ce qui montre que les diagonales (AC, BD) , $(A'C', B'D')$ des deux nouveaux quadrilatères se coupent à angle droit. Il en sera donc de même des médianes de ces deux quadrilatères. Les extrémités de ces médianes sont donc les sommets de deux nouveaux carrés. On s'assurerait enfin très-facilement que le centre commun de ces deux carrés est le *centre des moyennes distances* des sommets du quadrilatère donné.

4. De ce qui précède, on déduit une *propriété nouvelle du triangle*. En effet, si l'on suppose le quadrilatère circonscriptible, la proposition énoncée s'y appliquera également. Le triangle, étant toujours circonscriptible, représente un quadrilatère de ce genre, dans lequel un des sommets est le point de contact d'un des côtés du triangle avec la circonférence inscrite. La propriété précédente subsiste donc avec cette modification et donne lieu à l'énoncé suivant :

Les sommets d'un triangle et l'un des points de contact du cercle inscrit étant pris pour extrémités des côtés d'un quadrilatère, les sommets des carrés construits sur ces lignes comme diagonales sont les sommets de deux nouveaux quadrilatères dont les médianes sont égales et se coupent à angle droit en un même point qui est leur milieu commun.

Dans ce dernier cas, la distance de ce point au côté qui renferme trois sommets du quadrilatère est le quart de la hauteur correspondant à ce côté.
