BULLETIN DE LA S. M. F.

DE SPARRE

Note au sujet de certaines discontinuités apparentes dans les mouvements où intervient le frottement de glissement

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 141-158

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__141_0>

NOTE AU SUJET DE CERTAINES DISCONTINUITÉS APPARENTES DANS LES MOUVEMENTS OU INTERVIENT LE FROTTEMENT DE GLISSEMENT;

PAR M. DE SPARRE.

Dans une Note publiée, l'an passé, dans le *Bulletin de la Société mathématique,* j'ai fait voir que l'on arrive sans peine à lever l'ambiguïté apparente à laquelle peut conduire l'emploi des lois de Coulomb, en tenant compte de la continuité du mouvement.

Il existe toutefois certains problèmes où l'application de ces lois semble conduire, ainsi que je vais le faire voir, à un mouvement discontinu, ce qui paraît à première vue absurde. Toutefois, si l'on examine la question de plus près, on voit que la solution à laquelle on est conduit est au lieu de cela fort rationnelle, et que là encore les lois de Coulomb donnent une image, approchée sans doute, mais somme toute très satisfaisante des phénomènes. La discontinuité qu'elles introduisent n'existe évidemment pas, mais elle remplace une modification très rapide des conditions du mouvement, modification que l'on peut sans inconvénients remplacer par la discontinuité en question, si l'on se propose seulement de connaître ce qui se passait avant et après la modification dont il s'agit.

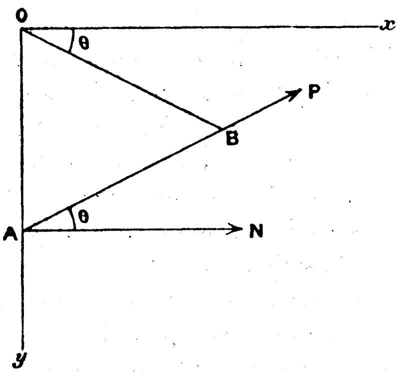
C'est d'ailleurs l'hypothèse de la rigidité absolue des liaisons, qui introduit dans le cas actuel la discontinuité dont nous venons de parler, comme elle avait conduit à introduire des percussions dans les problèmes examinés par nous dans la Note que je rappelle en commençant.

Si l'on tient compte de l'élasticité des liaisons, cette discontinuité disparaît et elle est remplacée par une modification des conditions du mouvement d'autant plus rapide que les liaisons sont plus raides, et qui, à la limite, devient instantanée lorsqu'on les suppose absolument rigides.

Nous verrons aussi que, pour certains problèmes, où intervient le frottement, on peut, pour des conditions initiales données, avoir, suivant les cas, une ou deux solutions également acceptables, le choix entre les deux solutions, lorsqu'elles existent, devant se faire en tenant compte de la façon dont les conditions initiales sont réalisées; mais, là encore, nous constaterons que ces résultats donnent une image approchée très satisfaisante des phénomènes.

I. Soient deux points matériels A et B de masse égale à 1, reliés par une tige rigide AB de masse négligeable. Le point A est de plus assujetti à décrire la verticale descendante Oy et le

Fig. 1.



point B est relié par un fil inextensible et sans masse de longueur r, égale à AB, au point fixe O, enfin le mouvement du système se fait dans le plan vertical xOy, et le point A frotte sur la droite OA, le coefficient de frottement étant f.

Puisque l'on a $OB = AB$, OB et AB font le même angle θ avec l'horizontale, le premier en dessous, le second en dessus.

Désignons par N la réaction de Oy sur le point A, posons $OA = \eta$ et désignons par P la pression exercée par AB sur le point A, nous aurons, pour le mouvement de A,

$$\eta'' = g - Pf\varepsilon\cos\theta + P\sin\theta,$$
$$N = P\cos\theta.$$

Puis, pour le mouvement de B,

$$r\theta'' = g\cos\theta - P\sin 2\theta.$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned}\eta_1 &= 2r\sin\theta,\\ \eta_1'' &= 2r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2).\end{aligned}$$

De plus $\varepsilon = \pm 1$ et le signe doit être choisi de façon que

(1) $\quad N\varepsilon\eta_1' > 0 \quad$ si $\quad \eta_1' \lessgtr 0 \quad$ ou $\quad N\varepsilon\eta_1'' > 0 \quad$ si $\quad \eta_1' = 0.$

On déduit des équations précédentes

$$(2)\qquad r\theta'' = \frac{4r\sin^2\theta\theta'^2 + g(3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta)}{4\sin\theta\cos^2\theta - f\varepsilon\cos\theta + \sin\theta)}\cos\theta,$$

$$(3)\qquad N = \frac{g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2}{4\sin\theta\cos^2\theta - f\varepsilon\cos\theta + \sin\theta}\cos\theta;$$

ce qui peut s'écrire

$$(2')\qquad r\theta'' = \frac{4r\sin^2\theta\theta'^2 + g(3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta)}{2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1) + (3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta)}\cos\theta,$$

$$(3')\qquad N = \frac{g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2}{2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1) + (3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta)}\cos\theta.$$

On aura de même

$$(4)\qquad \eta_1'' = 2\,\frac{g\cos^2\theta(3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta) + r\theta'^2\sin\theta(f\varepsilon\cos\theta - \sin\theta)}{2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1) + 3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta}.$$

Nous supposerons le système abandonné à lui-même sans vitesse initiale, il pourra d'abord se faire qu'il reste au repos; pour qu'il en soit ainsi il faut que l'on puisse avoir

$$\theta'' = \eta_1'' = \theta' = 0,$$

pour une valeur f_1 du coefficient de frottement, plus petite que f.

Il faut donc

$$f > 3\tang\theta,$$

et la valeur correspondante de f_1 sera

$$f_1 = 3\tang\theta,$$

ce qui donnera pour la réaction

$$N = \frac{1}{2}g\cot\theta,$$

et, par suite,

$$P = \frac{g}{2\sin\theta}.$$

Supposons maintenant

$$f < 3 \tang\theta,$$

et supposons toujours le système abandonné à lui-même sans vitesse initiale.

On devra avoir, à l'instant initial,

$$N\varepsilon\eta'' > 0.$$

Or, pour $\theta' = 0$, on a

$$N\varepsilon\eta'' = 2\,\frac{g^2 \cos^3\theta(3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta)\varepsilon(2\cos^2\theta - 1)}{(4\sin\theta\cos^2\theta - f\varepsilon\cos\theta + \sin\theta)^2}.$$

Mais, du moment que le mouvement se produit, on a

$$3\sin\theta > f\cos\theta,$$

la condition précédente revient donc (¹) à

$$\varepsilon(2\cos^2\theta - 1) = \varepsilon\cos 2\theta > 0.$$

Donc, si $\theta_0 < 45°$, on devra prendre $\varepsilon = +1$; si, au lieu de cela, $\theta_0 > 45°$, on devra prendre $\varepsilon = -1$.

Supposons maintenant que l'on ait d'abord

$$3\tang\theta_0 = f,$$

le système est encore en équilibre, et l'on a

$$N = \frac{1}{2} g \cot\theta_0,$$

$$\theta'' = 0.$$

Donnons à $\tang\theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3}f$; si $\theta_0 < 45°$, on devra conserver pour ε la valeur $+1$ qu'on avait dû adopter tant que le système était en équilibre, de sorte que θ'' et η'' commenceront par prendre des valeurs très petites et N aura une valeur très voisine de celle, $\frac{1}{2} g \cos\theta_0$, qu'il avait pour la position d'équilibre; en un mot, les valeurs de θ'', η'' et N pour le mouvement

---

(¹) Car nous supposons

$$\theta < 90°.$$

sont la suite de celles qu'elles avaient pour le repos et il n'y a, par suite, pas de discontinuité. Supposons au lieu de cela le système d'abord en équilibre pour

$$\tang\theta_0 = \frac{1}{3}f \qquad \text{avec} \qquad \theta_0 > 45^\circ,$$

et que l'on donne ensuite à $\tang\theta_0$ une valeur tant soit peu supérieure à $\frac{1}{3}f$, le système se mettra en mouvement et, comme $\theta_0 > 45^\circ$, on devra prendre pour ε la valeur -1, de sorte que θ'', au lieu de prendre une valeur très petite, en prendra une sensiblement égale à

$$\frac{3g\sin\theta_0\cos\theta_0}{2r\sin\theta_0(1+\cos^2\theta_0)},$$

θ'' passe donc brusquement de la valeur o à une valeur finie et N qui, au moment de l'équilibre, était égal à

$$\frac{1}{2}g\cot\theta_0,$$

passe brusquement de cette valeur à la valeur négative

$$-\frac{g(1-2\cos^2\theta_0)\cos\theta_0}{4\sin\theta_0(1+\cos^2\theta_0)}.$$

Il y a donc là une discontinuité, qui ne peut évidemment se présenter dans les phénomènes naturels; mais nous allons voir : 1° que cette discontinuité tient à la rigidité absolue, supposée aux liaisons et qu'elle disparaît lorsqu'on tient compte de leur élasticité; 2° que les résultats fournis par la loi de Coulomb donnent en définitive une image approchée très suffisante des phénomènes, en ce sens qu'au moment où l'équilibre est rompu, le point A échappe en un temps très court au contact du guide sur lequel il s'appuyait, pour venir frotter sur l'autre, si la liaison est bilatérale, ou pour se mouvoir librement, si elle est unilatérale.

Nous supposerons donc dans ce qui va suivre que la tige AB s'allonge ou se raccourcisse proportionnellement à l'effort qu'elle supporte et nous négligerons, au lieu de cela, l'allongement du fil OB ainsi que la déformation des guides.

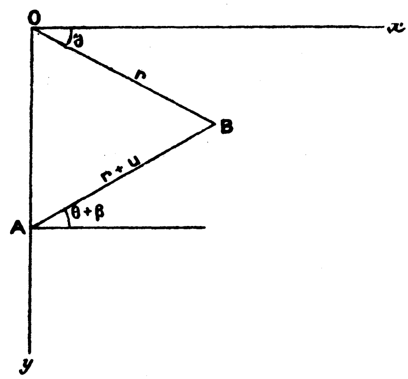
Nous désignerons, comme plus haut, par r la longueur du fil, supposée invariable, la longueur de la tige étant alors $r+u$, et sa tension dans ces conditions étant

$$Q = \nu^2 u \quad (^1),$$

où ν^2 désigne une constante.

La tige ayant actuellement la longueur $r + u$, elle fait avec l'horizontale un angle $\theta + \beta$, où β est très petit, et l'on aura pour

Fig. 2.



déterminer cette quantité β, en se bornant à la partie principale,

$$(r + u)\cos(\theta + \beta) = r\cos\theta$$

ou

$$r\beta = u\cot\theta.$$

Nous aurons ensuite

$$\eta = r\sin\theta + (r + u)\sin(\theta + \beta) = 2r\sin\theta + r\beta\cos\theta + u\sin\theta$$

ou

$$\eta = 2r\sin\theta + \frac{u}{\sin\theta}.$$

Nous poserons alors

$$\zeta = \frac{u}{\sin\theta},$$

ce qui nous donnera

$$\eta = 2r\sin\theta + \zeta,$$
$$\eta'' = 2r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2) + \zeta'',$$
$$Q = \nu^2\zeta\sin\theta.$$

---

(1) La déformation étant faible on peut, tout au moins comme première approximation, la supposer proportionnelle à la tension.

Les équations des mouvements de B et de A nous donneront donc

$$r\theta'' = g\cos\theta + Q\sin(2\theta+\beta),$$
$$\eta'' = g + Q[f\varepsilon\cos(\theta+\beta) - \sin(\theta+\beta)],$$
$$N = -Q\cos(\theta+\beta);$$

ou, en se bornant toujours à la partie principale,

$$(5)\qquad r\theta'' = g\cos\theta + 2\nu^2\zeta\sin^2\theta\cos\theta,$$
$$\eta'' = 2r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2) + \zeta'' = g + \nu^2\zeta\sin\theta(f\varepsilon\cos\theta - \sin\theta),$$

de sorte que les équations du mouvement seront l'équation (5) et l'équation

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &\zeta'' + \nu^2\zeta\sin\theta[4\sin\theta\cos^2\theta + \sin\theta - f\varepsilon\cos\theta] \\ &\qquad + g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2 = 0, \end{aligned}\right.$$

obtenue en remplaçant θ'' par sa valeur (5) dans l'équation précédente que l'on peut écrire

$$(6')\qquad \left\{\begin{aligned} &\zeta'' + \nu^2\zeta\sin\theta[3\sin\theta - f\varepsilon\cos\theta + 2\sin\theta(2\cos^2\theta - 1)] \\ &\qquad + g(2\cos^2\theta - 1) - 2r\sin\theta\theta'^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Si l'on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{1}{3}f, \qquad \theta' = 0;$$

le système est en équilibre et l'on a

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta}, \qquad N = \frac{g}{2}\cot\theta.$$

Pour ces valeurs de θ et ζ le système reste en équilibre.

Donnons à θ une valeur θ_0 très peu plus grande et telle que l'on ait

$$f = 3\operatorname{tang}\theta_0\left[1 - \frac{2}{3}\alpha(1 - 2\cos^2\theta_0)\right],$$

en supposant $\theta_0 > 45^\circ$ et α très petit.

Si le système est maintenu en équilibre dans cette position par une très petite force verticale appliquée en A [1], on aura alors

$$\zeta_0 = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta_0};$$

---

[1] La force qui maintient le système en équilibre est, en y comprenant le frot-

abandonnons maintenant le système à lui-même, sans vitesse initiale et considérons un espace de temps assez court pour que nous puissions négliger la variation de θ et prendre par suite

$$\theta' = \theta'_0 = 0, \qquad \theta = \theta_0.$$

Nous aurons

$$\zeta'' - 2\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 - 2\cos^2\theta_0)(1-\alpha)\zeta - g(1 - 2\cos^2\theta_0) = 0.$$

Posons alors

$$2\nu^2 \sin^2\theta_0 (1-\alpha)(1 - 2\cos^2\theta_0) = K^2,$$

puisque

$$\theta_0 > 45^\circ,$$

K^2 est positif et très grand, ν^2 l'étant et il devient infini avec ν, lorsqu'on suppose la tige de plus en plus raide.

Nous aurons

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2 \sin^2\theta_0}\left(\frac{1}{1-\alpha} + Ae^{Kt} + Be^{-Kt}\right).$$

Nous avons d'ailleurs par hypothèse

$$\zeta_0 = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta_0}, \qquad \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = 0;$$

et l'on en conclut

$$A = B = -\frac{\alpha}{2(1-\alpha)},$$

et par suite

$$\zeta = -\frac{g}{2\nu^2\sin^2\theta_0(1-\alpha)}\left[1 - \frac{\alpha}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt})\right].$$

Toutefois cette formule ne doit être appliquée que jusqu'à $\zeta = 0$. K étant très grand et, par suite, e^{-Kt} négligeable devant e^{Kt}, dès

---

tement,

$$N3\tang\theta_0 = \frac{3g}{2},$$

la force fournie par le frottement est Nf, la force supplémentaire serait donc

$$\frac{3g}{2} - Nf = \alpha g(1 - 2\cos^2\theta_0),$$

elle est donc très petite avec α.

que t diffère de zéro, on aura $\zeta = 0$ sensiblement pour

$$e^{Kt} = \frac{2}{\alpha}; \qquad \text{donc} \qquad t = \frac{1}{K} \mathcal{L} \frac{2}{\alpha}.$$

A partir de cet instant, ζ changeant de signe, si la liaison est unilatérale (tige s'appuyant contre un mur), la tige échappera et le mouvement subséquent se fera comme si le mur n'existait pas.

Si, au lieu de cela, la liaison est bilatérale, N changera de signe; il faudra, par suite, à partir de ce moment, prendre $\varepsilon = -1$ et l'on aurait, en prenant toujours $\theta = \theta_0$, $\theta'_0 = 0$,

$$\zeta'' + \nu^2 \zeta \sin\theta_0 [\sin\theta_0 (4 \cos^2\theta_0 + 1) + f \cos\theta_0] - g(1 - 2\cos\theta_0) = 0.$$

C'est-à-dire, si l'on se borne à la partie principale, f différant très peu de $3 \operatorname{tang}\theta_0$,

$$\zeta'' + 4\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0)\zeta - g(1 - 2\cos^2\theta_0) = 0,$$

et, en posant

$$K_1^2 = 4\nu^2 \sin^2\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0),$$

on aurait

$$\zeta = g \frac{1 - 2\cos^2\theta_0}{K_1^2} (1 + A \cos K_1 t + B \sin K_1 t),$$

de sorte qu'il se produirait une série d'oscillations, en réalité rapidement amorties, autour de la position moyenne

$$\zeta = g \frac{1 - 2\cos^2\theta_0}{K_1^2}.$$

Valeur pour laquelle on aurait

$$Q = \frac{g(1 - 2\cos^2\theta_0)}{4 \sin\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0)},$$

et par suite

$$N = -Q\cos\theta_0 = -\frac{g \cos\theta_0 (1 - 2\cos^2\theta_0)}{4 \sin\theta_0 (1 + \cos^2\theta_0)},$$

ce qui est bien la valeur obtenue pour N par l'application des lois de Coulomb et sans tenir compte de l'élasticité des liaisons.

Il reste à vérifier que l'échappement ou le changement de signe de N (suivant que la liaison est unilatérale ou bilatérale) a lieu au bout d'un temps assez court pour que l'on puisse négliger la variation de θ pendant ce temps.

Or, en prenant $\theta = \theta_0$, nous avons par l'équation (5)

$$r\theta'' = g\cos\theta_0 + 2\nu^2\zeta\sin^2\theta_0\cos\theta_0$$
$$= g\cos\theta_0 - \frac{g\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[1 - \frac{\alpha}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt})\right]$$

ou

$$r\theta'' = \frac{g\alpha\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2}(e^{Kt} + e^{-Kt}) - 1\right];$$

on en déduit

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\alpha\cos\theta_0}{1-\alpha}\left[\frac{1}{2K^2}(e^{Kt} + e^{-Kt}) - \frac{t^2}{2}\right].$$

Mais

$$e^{Kt} = \frac{2}{\alpha}, \qquad t = \frac{1}{K}\log\frac{2}{\alpha},$$

de sorte que

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0}{K^2(1-\alpha)}\left[1 - \frac{\alpha}{2}\left(\log\frac{2}{\alpha}\right)^2\right].$$

Mais

$$x\log\frac{1}{x^2}$$

est nul pour $x = 0$, de sorte que

$$\frac{\alpha}{2}\left(\log\frac{2}{\alpha}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\log\frac{2}{\alpha}\right)^2$$

est très petit avec α, et l'on peut prendre par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0}{K^2(1-\alpha)},$$

quantité très petite puisque K est très grand et qui tend vers zéro lorsque K augmente indéfiniment.

Nous remarquerons de plus que, si la liaison est unilatérale, ζ' est très petit au moment où l'échappement se produit. On a en effet

$$\zeta' = \frac{\alpha g K}{4\nu^2\sin^2\theta_0(1-\alpha)}(e^{Kt} - e^{-Kt}),$$

soit sensiblement, puisque $K = \nu\sin\theta_0\sqrt{2(1-\alpha)(1-2\cos^2\theta_0)}$,

$$\zeta' = \frac{g\sqrt{2(1-2\cos^2\theta_0)}}{2\nu\sin\theta_0\sqrt{1-\alpha}},$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque ν croît indéfiniment.

On voit donc que, s'il y a échappement, le point A peut être considéré comme s'échappant avec une vitesse nulle.

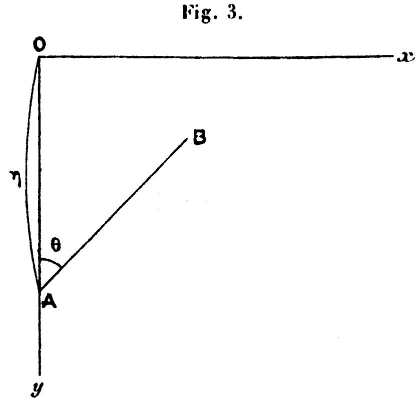
Donc, en résumé, on voit que l'application des lois de Coulomb se trouve pleinement justifiée, en ce sens que, d'une part, l'anomalie qu'elles semblent présenter par suite de la discontinuité qu'elles conduisent à admettre dans le mouvement tient uniquement à la rigidité absolue supposée aux liaisons, et que, d'autre part, sauf une période excessivement courte et sans importance, le plus souvent, elles donnent une image très satisfaisante de l'ensemble du mouvement.

II. Examinons maintenant le second problème que j'ai en vue.

Je suppose deux points matériels A et B de même masse égale à 1, reliés par une tige rigide de longueur r et de masse négligeable.

Le point A est assujetti à se mouvoir sur la verticale descendante Oy, sur laquelle il frotte, le coefficient de frottement étant

Fig. 3.



égal à f. Le point B est seulement, en plus de sa liaison au point A, assujetti à se mouvoir dans le plan vertical xOy.

Nous déterminerons la position du système par l'ordonnée η du point A et par l'angle θ que fait AB avec la verticale ascendante; nous supposons

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Soient x et y les coordonnées de B, on aura

$$x = r \sin\theta,$$
$$y = \eta - r\cos\theta,$$

et l'on en déduit

$$(7) \qquad x'' = r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2),$$
$$(8) \qquad y'' = \eta'' + r(\sin\theta\theta'' + \cos\theta\theta'^2).$$

Si d'ailleurs on désigne par P la compression de la tige AB et par N la réaction de Oy on aura

$$N = P\sin\theta,$$
$$(9) \qquad \eta'' = g + P\cos\theta - Pf\varepsilon\sin\theta,$$
$$(10) \qquad x'' = P\sin\theta,$$
$$(11) \qquad y'' = g - P\cos\theta;$$

où $\varepsilon = \pm 1$, le signe de cette quantité étant déterminé par la condition

$$N\varepsilon\eta' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' \lessgtr 0,$$

et par la condition

$$N\varepsilon\eta'' > 0 \quad \text{si} \quad \eta' = 0,$$

cette dernière condition revenant, puisque nous supposons $\sin\theta$ positif, à

$$P\varepsilon\eta'' > 0;$$

on déduit d'ailleurs des équations (7), (8), (9), (10) et (11)

$$\sin\theta(\sin\theta\theta'' + \cos\theta\theta'^2) + (\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2)(2\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta) = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(12) \qquad \theta'' = \frac{\sin\theta\theta'^2(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta)}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta},$$

et ensuite

$$P\sin\theta = r(\cos\theta\theta'' - \sin\theta\theta'^2),$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (12),

$$P = -\frac{r\theta'^2}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta},$$

puis

$$\eta'' = g - \frac{r\theta'^2(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta)}{1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta}.$$

En considérant ces formules il semble à première vue que, dans le cas où, le système étant abandonné à lui-même, sans vitesse initiale, on a $\theta'_0 = o$, il n'y ait qu'une solution possible, celle qui correspond à

$$\theta'' = P = o, \qquad \eta'' = g,$$

c'est-à-dire au cas où la tige se transporte parallèlement à elle-même, sous l'influence de la pesanteur, sans être soumise à aucune action de la part de Og.

Ce mouvement est évidemment celui qui se produit si le point A a avec Oy un simple contact géométrique qui ne met pas en jeu le frottement.

Mais en sera-t-il de même si l'on a d'abord mis la tige en contact avec Og dans une position où elle fait un angle θ avec cette droite et si on la maintient au moyen d'une force verticale appliquée en A et d'une autre force perpendiculaire à sa direction appliquée en B?

On aura alors

$$P = g\cos\theta,$$
$$N = g\cos\theta\sin\theta,$$

et la réaction verticale Q qu'il faudra appliquer en A, si l'on ne tient pas compte du frottement, sera

$$Q = g + g\cos^2\theta = g(1 + \cos^2\theta).$$

Mais, si le coefficient de frottement est tel que l'on ait

$$f > \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

on pourra supprimer la force Q appliquée en A et cette force sera fournie par le frottement.

Si ensuite on rend le point B libre en supprimant la force normale qui le retenait, rien ne sera changé au début aux réactions qui s'exerçaient en A et ce point restera fixe, la tige tournant autour de lui.

D'ailleurs, puisque le point A reste fixe, on devra avoir

$$\eta'' = g + P(\cos\theta - f_1\sin\theta) = o,$$

avec

$$f_1 \leqq f:$$

de plus, puisque la tige tourne autour d'un point fixe, on a

$$P = g\cos\theta - r\theta'^2,$$

et par suite le point A restera fixe tant que l'on aura

$$\frac{g(1+\cos^2\theta) - r\theta'^2\cos\theta}{g\cos\theta\sin\theta - r\theta'^2\sin\theta} \leqq f.$$

On verrait ensuite qu'au moment où cette inégalité se change en égalité, η'', qui était nul jusque-là, prend brusquement une valeur finie et que N, qui était positif, devient à ce moment brusquement négatif (ou nul si la liaison est unilatérale). Il y a donc là une discontinuité apparente, mais dont l'explication, toute semblable à celle donnée pour le problème précédent, nous permettrait encore de constater que les lois de Coulomb fournissent pour l'ensemble des phénomènes une image très suffisamment approchée.

Nous ne reviendrons pas sur ce fait, car pour cela nous n'aurions, à peu de chose près, qu'à répéter ce que nous avons dit pour le problème précédent, mais nous croyons au lieu de cela devoir insister un peu sur ce qui se passe au début du mouvement.

Nous avons vu, en supposant le système abandonné sans vitesse initiale, que, si l'on a

$$f > \frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

le problème comporte deux solutions : 1° si la tige a avec Oy un simple contact géométrique elle se transporte parallèlement à elle-même; 2° si l'on a d'abord maintenu la tige immobile en contact avec Ag, de façon que le frottement entre en jeu, la tige tourne, au début du mouvement du moins, autour du point A qui reste fixe.

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta},$$

on n'a dans tous les cas qu'une solution, la tige se transporte parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

A première vue, ce dernier résultat peut paraître paradoxal; il est certain, en effet, puisque l'on a d'abord maintenu la tige en contact avec Oy, que cette tige exerce sur Oy une pression égale à

$$g\sin\theta\cos\theta,$$

le frottement entre donc forcément en jeu au début du mouvement et il semble à première vue étrange que ce mouvement soit absolument le même que s'il n'existait pas. Nous allons cependant reconnaître que là encore les lois de Coulomb donnent une image très suffisamment approchée du phénomène.

Nous allons montrer en effet que, si l'on tient compte de l'élasticité de la tige AB, le frottement s'exercera pendant un temps assez court pour que l'on puisse considérer son effet comme négligeable.

Nous aurons, en désignant par r la longueur normale de la tige AB et par $r+u$ sa longueur à un instant quelconque,

$$P = -\mu^2 u,$$

où μ^2 est très grand et devient infini lorsqu'on suppose la tige rigide.

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
\eta'' &= g + P(\cos\theta - f\varepsilon \sin\theta),\\
\eta'' &= g + \mu^2 u(f\varepsilon \sin\theta - \cos\theta),\\
x &= (r+u)\sin\theta,\\
x'' &= (r+u)\cos\theta\theta'' - (r+u)\sin\theta\theta'^2 + 2u'\cos\theta\theta' + u''\sin\theta,\\
y &= \eta - (r+u)\cos\theta,\\
y'' &= \eta'' + (r+u)\sin\theta\theta'' + (r+u)\cos\theta\theta'^2 + 2u'\sin\theta\theta' - u''\cos\theta,
\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
x'' &= P\sin\theta = -\mu^2 u \sin\theta,\\
y'' &= g - P\cos\theta = g + \mu^2 u\cos\theta,
\end{aligned}$$

de sorte qu'on aura

$$\begin{aligned}
&(r+u)\cos\theta\theta'' - (r+u)\sin\theta\theta'^2 + 2u'\theta'\cos\theta + u''\sin\theta + \mu^2 u\sin\theta = o,\\
&\quad (r+u)\sin\theta\theta'' + (r+u)\cos\theta\theta'^2\\
&\qquad\qquad + 2u'\theta'\sin\theta - u''\cos\theta - \mu^2 u(2\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta = o.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$(r+u)\theta'' + 2u'\theta' - \mu^2 u\sin\theta(\cos\theta - f\varepsilon\sin\theta) = o, \tag{13}$$

$$u'' - (r+u)\theta'^2 + \mu^2 u(1 + \cos^2\theta - f\varepsilon\sin\theta\cos\theta) = o. \tag{14}$$

Toutefois, si le point A est fixe, on a $\eta'' = o$ et par suite f doit être remplacé par une valeur f_1 telle que l'on ait

(15) $$g = \mu^2 u(\cos\theta - f_1 \varepsilon \sin\theta).$$

D'ailleurs à l'instant initial on a, *dans tous les cas,*

$$P = -\mu^2 u_0 = g\cos\theta_0;$$

d'où

(16) $$u_0 = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2},$$

et aussi si le point A est fixe en vertu de (15) et (16),

$$1 + \cos^2\theta_0 - f_1 \sin\theta_0 \cos\theta_0 = 0.$$

On en conclut que, pour que le point A reste fixe à l'instant initial, nous avons bien la condition

$$f \geqq \frac{1+\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0}.$$

Si au lieu de cela on a

$$f < \frac{1+\cos^2\theta_0}{\sin\theta_0\cos\theta_0},$$

le point A se met en mouvement et l'on a

$$\eta'' > 0,$$
$$N = -\mu^2 u_0 \sin\theta_0 > 0.$$

Il faut donc prendre $\varepsilon = +1$. En supposant donc qu'il s'agisse d'une période assez courte pour que l'on puisse négliger la variation de θ et prendre $\theta' = \theta'_0 = 0$, (14) nous donnera

$$u'' + \mu^2 u(1 + \cos^2\theta_0 - f\sin\theta_0\cos\theta_0) = 0,$$

ou en posant

$$1 + \cos^2\theta_0 - f\sin\theta_0\cos\theta_0 = K^2 > 0,$$
$$u'' + \mu^2 K^2 u = 0,$$

d'où, en tenant compte de ce que

$$u_0 = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2}, \qquad u'_0 = 0,$$

(17) $$u = -\frac{g\cos\theta_0}{\mu^2}\cos\mu K t,$$

formule qui ne doit être appliquée que tant que u est positif (puisque P et N et, par suite ε, changent de signe avec u).

Or on a $u = 0$ pour

$$t = \frac{\pi}{2K\mu},$$

et pour cette valeur de t on a

$$u' = \frac{g\cos\theta_0}{\mu}K.$$

De plus l'équation (13) nous donne, en négligeant les termes en u^2,

$$r\theta'' = \mu^2 u \sin\theta_0(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0),$$

ou, en remplaçant u par sa valeur (17),

$$r\theta'' = -g\cos\theta_0\sin\theta_0(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0)\cos\mu K t,$$

et par suite

$$r(\theta - \theta_0) = \frac{g\cos\theta_0\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0)(\cos\mu K t - 1),$$

donc, pour $t = \frac{\pi}{2K\mu}$, θ aura une valeur θ_1 donnée par la formule

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g\cos\theta_0\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(\cos\theta_0 - f\varepsilon\sin\theta_0),$$

ou, en tenant compte de la valeur de K^2,

$$r(\theta_1 - \theta_0) = -\frac{g\sin\theta_0}{\mu^2 K^2}(K^2 - 1),$$

quantité très petite et qui tend vers zéro lorsque μ croît indéfiniment, c'est-à-dire si la tige devient de plus en plus raide. Il en est d'ailleurs de même de u' et de θ'.

On conclut que, si la liaison est unilatérale, la tige échappera à l'action de Oy au bout d'un temps assez court pour qu'on puisse la considérer comme n'ayant pas sensiblement bougé et comme ayant des vitesses de rotation et de translation nulles. Elle se transportera donc parallèlement à elle-même sous l'influence de la seule pesanteur.

Nous retrouvons par suite les résultats obtenus au moyen des lois de Coulomb et en considérant la tige comme indéformable.

Si, au lieu d'être unilatérale, la liaison était bilatérale, il se ferait quelques oscillations entre les deux guides qui seraient rapidement amorties (vu la petitesse de leur amplitude comparable, ou même inférieure au jeu qui existe forcément être les deux guides).

On voit donc en résumé que, dans ce cas encore, l'application des lois de Coulomb mène, ainsi que nous l'avons annoncé, à une image suffisamment approchée du phénomène, et qui conduit seulement à négliger une période de transition excessivement courte, et le plus souvent sans importance.