BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les équations d'ordre nomographique 3 et 4

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 173-195
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__173_1>

SUR LES ÉQUATIONS D'ORDRE NOMOGRAPHIQUE 3 ET 4 (1);

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

I.

1. *Ordre nomographique d'une équation.* — Rappelons

(1) Les principaux résultats contenus dans ce Mémoire ont été précédemment communiqués à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CXLII, p. 988; t. CXLIV, p. 190, 895 et 1027).

d'abord quelques notions maintenant classiques de Nomographie. Si nous désignons les variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$, entrant dans une équation, simplement par leurs indices, et si nous attribuons aux divers signes fonctionnels les indices de toutes les variables sur lesquelles ils portent, nous dirons qu'une équation à n variables

$$F_{1.2\ldots n} = 0$$

est *nomographiquement rationnelle* si elle s'écrit

$$\sum f_1 f_2 \ldots f_n = 0.$$

Si, ordonnée par rapport aux fonctions de la variable z_i, elle contient $p_i + 1$ termes linéairement distincts, elle est dite, comme l'a proposé M. Soreau [1], de l'*ordre nomographique* p_i par rapport à la variable z_i. Son ordre nomographique total sera

$$p = \sum_{i=1}^{i=n} p_i,$$

Par exemple, pour l'équation

$$f_1 f_2 + \sqrt{1+f_1^2}\sqrt{1+f_2^2} = f_3,$$

nomographiquement rationnelle par rapport aux fonctions

$$f_1, \quad \sqrt{1+f_1^2}, \quad f_2, \quad \sqrt{1+f_2^2}, \quad f_3,$$

on a

$$p_1 = 2, \qquad p_2 = 2, \qquad p_3 = 1,$$

et, par suite,

$$p = 5.$$

Mais, pour faire ressortir que cette notion de l'ordre nomographique est purement formelle, nous n'aurons qu'à remarquer que l'équation précédente peut encore s'écrire [2]

$$g_1 + g_2 = g_3,$$

lorsqu'on pose

$$g_1 = \log(f_1 + \sqrt{1+f_1^2}), \qquad g_2 = \log(f_2 + \sqrt{1+f_2^2}),$$
$$g_3 = \log(f_3 + \sqrt{f_3^2 - 1}),$$

---

(1) *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils*, août 1901, p. 243.
(2) *Traité de Nomographie* (ou, plus simplement, *T. N.*), p. 421.

et que, sous cette forme, elle apparaît comme étant de l'ordre 3.

Un tel changement des fonctions composantes équivaut d'ailleurs à une anamorphose transcendante.

Lorsqu'on se borne à des transformations projectives, l'ordre nomographique se conserve.

2. *Genre d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *genre* d'un nomogramme à points alignés le nombre des échelles curvilignes qu'il comporte. Ce genre sera donc 0, 1, 2 ou 3 suivant qu'il y aura 0, 1, 2 ou 3 échelles curvilignes, c'est-à-dire suivant que, dans l'équation représentée, mise sous forme du déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1 & g_1 & h_1 \\ f_2 & g_2 & h_2 \\ f_3 & g_3 & h_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

il y aura 0, 1, 2 ou 3 lignes dont les éléments seront *linéairement dépendants,* c'est-à-dire exprimables linéairement au moyen d'*une seule fonction* de même indice.

En se reportant à la définition précédente, on voit que l'équation développée sera alors d'ordre 3, 4, 5 ou 6.

Donc, en général, à un nomogramme de genre q correspondra une équation d'ordre $p = q + 3$. Mais il pourra se faire que cette équation renferme un ou plusieurs *facteurs parasites* ne portant que sur deux des trois variables, de sorte que l'équation représentée, une fois débarrassée de ces facteurs parasites, ne soit plus que d'un ordre inférieur à $q + 3$.

Cela aura lieu si les supports de deux des échelles (z_1) et (z_2), par exemple, sont confondus (sans d'ailleurs que ces échelles soient identiques). Entre les valeurs de z_1 et z_2 correspondant à chaque point du support commun existe une relation bien déterminée

$$\varphi_1 = \varphi_2.$$

Il suit de là que des valeurs de z_1 et z_2 satisfaisant à cette relation, associées à une valeur quelconque pour z_3, se correspondent en vertu de l'équation représentée, autrement dit que celle-ci doit être de la forme

$$f_{1.2.3}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \tag{2}$$

Et le nomogramme peut être considéré comme représentatif de l'équation

$$f_{1.2.3} = 0$$

quand on associe à des valeurs de z_1 et z_2, affectées à des points *différents* du support commun, la valeur de z_3 que donne la troisième échelle sur l'alignement des deux premières.

Le grand intérêt de cette remarque réside dans ce fait, mis en évidence pour la première fois par M. Clark, et sur lequel nous reviendrons plus loin, que certaines équations, non directement représentables par points alignés, peuvent le devenir grâce à l'introduction d'un facteur parasite convenable.

3. *Construction des échelles par projection.* — Toute échelle cotée au moyen des valeurs de la variable (z_i) peut être définie par l'équation en coordonnées parallèles u et v de son point courant

$$u f_i + v g_i + h_i = 0.$$

Cette échelle est dite ***algébrique*** par rapport à la fonction f_i quand son équation peut s'écrire

$$U + V f_i + W f_i^2 + \ldots + Z f_i^n = 0,$$

U, V, W, ..., Z étant des fonctions linéaires en u et v, et nous avons fait voir qu'une telle échelle peut se construire par des projections successives à partir de l'échelle de la fonction f_i portée sur un axe rectiligne. En particulier

$$(3) \qquad U + V f_i = 0$$

représente une échelle portée sur la droite, unissant les points $U = 0$, $V = 0$, et qui est simplement projective de celle de la fonction f_i [1]. Appelons *faisceau projetant* de celle-ci le système de toutes les droites unissant les points de cette échelle à un centre de projection quelconque. Toute échelle projective de celle de f_i s'obtiendra en coupant un tel faisceau par une transversale dont la position sera entièrement définie par trois de ses points. Donc, toute échelle projective peut être construite quand on a déterminé trois de ses points.

---

[1] *T. N.*, p. 15.

On peut d'ailleurs, pour la construction, coter les points, non pas au moyen des valeurs de la variable z_i, mais au moyen de celles de la fonction f_i, quitte, après la construction, à remplacer celles-ci par les valeurs correspondantes de z_i. En ce cas, l'échelle à projeter est *métrique*, ce qui, en bien des cas, peut être avantageux, surtout lorsque, à toutes les valeurs de f_i, ne correspondent pas de valeurs réelles de z_i (exemple : $\sin z_i$ qui ne donne des valeurs réelles pour z_i que si $|\sin z_i| < 1$).

De même

$$U + V f_i + W f_i^2 = 0 \tag{4}$$

représente une échelle dont le support est une conique et qui peut se construire par double projection de l'échelle de la fonction f_i, attendu que nous avons démontré que *tout faisceau projetant une telle échelle à partir d'un de ses points se confond avec un faisceau projetant de la fonction* f_i (¹). Il suit de là qu'une telle échelle est complètement déterminée par quatre de ses points, attendu que le faisceau projetant ayant pour centre l'un quelconque de ces quatre points est entièrement déterminé par les rayons unissant ce point aux trois autres et qu'il suffit de deux tels faisceaux pour construire l'échelle conique demandée.

4. *Transformation homographique générale.* — Nous rappellerons enfin qu'on peut faire subir à tout nomogramme à points alignés la transformation homographique la plus générale, ce qui revient simplement à multiplier l'équation, mise sous forme de déterminant, qu'il représente par un déterminant quelconque du troisième ordre non nul. Et comme un tel déterminant renferme, sous forme homogène, 9 éléments, il permet l'introduction de 8 paramètres arbitraires. Il permet notamment de choisir arbitrairement les points correspondant à quatre cotes quelconques, chacun d'eux équivalant à l'ensemble de deux coordonnées (²).

En particulier, comme nous venons de voir que toute échelle conique est entièrement déterminée par quatre de ses points, il en résulte que, si une telle échelle intervient sur un nomogramme

---

(¹) *T. N.*, p. 142.
(²) *T. N.*, p. 132.

à points alignés, elle peut être choisie d'une façon entièrement arbitraire.

En pratique, c'est généralement, parmi les trois variables, toujours la même, z_3, qui est prise pour inconnue. Les deux autres, z_1 et z_2, étant, dès lors, qualifiées de *données,* on sait, dans chaque cas particulier, entre quelles limites a_1 et b_1, a_2 et b_2, elles restent comprises; et les quatre points que l'on se donne arbitrairement sont ceux qui correspondent à ces valeurs limites ([1]).

II.

5. *Points critiques d'un nomogramme à points alignés.* — Nous appelons *points critiques* d'un nomogramme à points alignés les points de mutuelle rencontre des échelles qui le composent, *valeurs critiques* des variables servant à graduer ces échelles les valeurs que ces variables prennent en ces points; et nous étendons cette désignation aux valeurs correspondantes des fonctions de ces variables dont dépendent ces échelles.

Nous verrons, dans le paragraphe III de ce Mémoire, le rôle capital que joue cette notion de valeur critique dans la construction des nomogrammes à points alignés; nous allons d'abord nous occuper de la détermination de ces valeurs.

Celle-ci repose tout entière sur la remarque que voici : lorsqu'on donne à deux des variables, z_1 et z_2 par exemple, les valeurs critiques ξ_1 et ξ_2 qui correspondent à un même point critique P, l'alignement $\xi_1 \xi_2$ est indéterminé; on peut le confondre avec une droite quelconque passant par le point P, et, par suite, la valeur correspondante de z_3 est aussi indéterminée. En d'autres termes, *on a les valeurs critiques correspondant aux points de rencontre des échelles* (z_1) *et* (z_2) *en cherchant les couples de valeurs de* z_1 *et* z_2 *rendant* z_3 *indéterminé.*

Lorsque l'équation est mise sous la forme du déterminant (1), cette détermination va de soi. Il est clair, en effet, que les valeurs de z_1 et z_2 qui annulent ce déterminant, quelle que soit la valeur

---

([1]) *T. N.*, p. 135.

de z_3, sont telles que

(5) $$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2} = \frac{h_1}{h_2},$$

système de deux équations d'où l'on tire les valeurs critiques de z_1 et z_2; il y a lieu toutefois d'examiner de près, une fois ces valeurs trouvées, de quelle façon il convient de les associer, aux divers points critiques.

Ce n'est d'ailleurs généralement pas ainsi que le problème se pose; le principal intérêt de la considération des valeurs critiques réside, comme nous l'allons voir, dans la possibilité qui en résulte de construire le nomogramme à points alignés d'une équation sans l'amener au préalable (par des transformations algébriques parfois assez délicates) à la forme du déterminant (1). Notre premier objet doit donc être de trouver directement les valeurs critiques des variables entrant dans une équation nomographiquement rationnelle. Tel est le problème dont nous allons nous occuper pour les équations d'ordre nomographique 3 ou 4, les seules, ou à peu près, qui intéressent les applications pratiques.

6. *Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique* 3. — L'équation d'ordre nomographique 3 la plus générale peut s'écrire

(6) $$Af_1f_2f_3 + \sum B_i f_j f_k + \sum C_i f_i + D = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

L'étude algébrique complète que nous avons faite précédemment de cette équation [1] a mis en évidence le rôle que jouent dans cette théorie certains invariants que définissent les formules suivantes.

Posant

(7) $$\left\{ \begin{array}{lll} & F_0 = \sum B_i C_i - AD, & \\ E_i = AC_i - B_j B_k, & F_i = F_0 - 2B_i C_i, & G_i = B_i D - C_j C_k, \end{array} \right.$$

on a, quel que soit i,

(8) $$F_i^2 - 4E_i G_i = \Delta,$$

[1] *Acta mathematica*, t. XXI, 1897, p. 301, et *T. N.*, Chap. VI, Sect. II B.

Δ étant le discriminant du premier membre de (6) rendu homogène. Posant encore

(9) $\quad H_i = B_i(F_0 - 2B_jC_j - 2B_kC_k) + 2AC_jC_k, \qquad K = AF_0 - 2B_1B_2B_3,$

nous aurons aussi

(10) $\quad F_jB_i + 2E_jC_k = F_kB_i + 2E_kC_j = H_i, \qquad AF_i + 2E_iB_i = K.$

Pour déterminer les valeurs critiques σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2, nous écrirons l'équation (6) sous la forme

$$f_3(Af_1f_2 + B_1f_2 + B_2f_1 + C_3) + B_3f_1f_2 + C_1f_1 + C_2f_2 + D = 0,$$

et nous remarquerons que ces valeurs critiques, rendant f_3 indéterminé, doivent satisfaire à la fois aux équations

$$(11) \qquad \begin{cases} A\,\sigma_1\sigma_2 + B_1\sigma_2 + B_2\sigma_1 + C_3 = 0, \\ B_3\sigma_1\sigma_2 + C_1\sigma_1 + C_2\sigma_2 + D = 0, \end{cases}$$

d'où, par élimination du terme en $\sigma_1\sigma_2$, on déduit immédiatement, eu égard à (7),

$$E_1\sigma_1 + E_2\sigma_2 + AD - B_3C_3 = 0.$$

Si l'on remarque, en se reportant encore à (7), que

$$AD - B_3C_3 = -\frac{F_1 + F_2}{2},$$

on voit que cette dernière égalité peut encore s'écrire

$$(12) \qquad E_1\sigma_1 + E_2\sigma_2 - \frac{F_1 + F_2}{2} = 0.$$

Si, de même, on élimine entre les équations (11) les termes en σ_2 seulement, on a

$$(13) \qquad E_2\sigma_1\sigma_2 + \frac{F_1 - F_2}{2}\sigma_1 - G_1 = 0.$$

Retranchant cette dernière équation de l'équation (12) multipliée par σ_1, on a

$$E_1\sigma_1^2 - F_1\sigma_1 + G_1 = 0.$$

On trouverait la même équation avec l'indice 2 par l'élimination de σ_1; et, comme le choix des variables z_1 et z_2 a été arbitraire, on peut dire que les valeurs critiques σ_i' et σ_i'' de f_i sont les racines de l'équation

$$E_i\sigma_i^2 - F_i\sigma_i + G_i = 0. \tag{14}$$

Par suite,

$$\sigma_i' = \frac{F_i + \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \qquad \sigma_i'' = \frac{F_i - \sqrt{\Delta}}{2E_i}, \tag{15}$$

si nous convenons de représenter par $\sqrt{\Delta}$ la valeur *arithmétique* de ce radical. Nous répartissons ainsi les valeurs critiques en deux groupes (σ') et (σ'') respectivement caractérisés par le fait que le covariant

$$2E_i\sigma_i - F_i$$

a la même valeur, $\sqrt{\Delta}$ ou $-\sqrt{\Delta}$, pour les trois valeurs critiques σ_i du même groupe. Or, l'équation (12) peut s'écrire

$$2E_1\sigma_1 - F_1 = -(2E_2\sigma_2 - F_2). \tag{16}$$

Ceci nous montre que *les deux valeurs critiques associées en un même point critique sont nécessairement de groupes différents*. Il résulte de là que, si P_i est le point critique d'un nomogramme de genre 0 situé à la rencontre des droites d_j et d_k portant respectivement les échelles (z_j) et (z_k), on pourra avoir soit la disposition

$$P_1(\sigma_2', \sigma_3''), \quad P_2(\sigma_3', \sigma_1''), \quad P_3(\sigma_1', \sigma_2''),$$

soit la disposition

$$P_1(\sigma_3', \sigma_2''), \quad P_2(\sigma_1', \sigma_3''), \quad P_3(\sigma_2', \sigma_1''),$$

d'où, pour la même équation d'ordre 3, *deux classes de nomogrammes de genre* 0 *homographiquement irréductibles de l'une à l'autre.*

La correspondance des points de la droite d_i et des valeurs de la fonction f_i étant univoque, on voit en outre que les valeurs critiques σ et les points critiques P sont ensemble réels ou imaginaires.

Donc, *le nomogramme de genre* 0 *représentatif de l'équa-*

tion d'ordre 3 *donnée ne sera réel que si* $\Delta \geqq 0$ (1). C'est le théorème que nous avions précédemment obtenu par une autre voie (2).

Si d'ailleurs $\Delta = 0$, les valeurs critiques σ' et σ'' devenant égales deux à deux, les trois points critiques se confondent, ce qui est la seconde partie du théorème ici rappelé (3).

Nous verrons plus loin comment, une fois connues les valeurs critiques, la construction du nomogramme peut s'effectuer par une voie purement géométrique.

7. *Valeurs critiques dans le cas d'une équation d'ordre nomographique* 4. — L'équation d'ordre nomographique 4 la plus générale peut s'écrire

$$(17) \quad \begin{cases} f_3(a_0 f_1 f_2 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3) + g_3(b_0 f_1 f_2 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_3) \\ \qquad + c_0 f_1 f_2 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

L'équation représentée par un nomogramme de genre 1, sur lequel les échelles rectilignes (z_1) et (z_2) (portées par les droites d_1 et d_2 qui se coupent en P_3) sont respectivement projectives de f_1 et f_2, est de cette forme. Mais, inversement, une telle équation est-elle toujours représentable par un tel nomogramme? Par une voie purement algébrique [en cherchant à ramener l'équation (17) à la forme canonique correspondant à un nomogramme de genre 1] (4), M. Clark a établi que non, en faisant connaître la condition requise pour que cette représentation soit possible. Nous allons retrouver son résultat d'une façon bien simple, grâce à la notion des valeurs critiques.

En effet, si la représentation en question est possible, les valeurs σ_1 et σ_2 que prennent f_1 et f_2 en P_3 sont critiques. Or, ces valeurs devant satisfaire à (17), *quelle que soit la valeur de* z_3,

(1) Il convient de ne pas perdre de vue que nous n'avons égard ici qu'aux échelles projectives de celles des fonctions f_i, car lorsque $\Delta < 0$ on peut être ramené au cas où $\Delta = 0$ moyennant une *anamorphose transcendante,* ainsi que M. Fontené en a, le premier, fait la remarque (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1900, p. 494).

(2) *T. N.*, p. 440.

(3) *T. N.*, p. 446.

(4) *T. N.*, p. 182.

doivent être telles que l'on ait à la fois

$$(18)\qquad \begin{cases} a_0\sigma_1\sigma_2 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3 = 0, \\ b_0\sigma_1\sigma_2 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3 = 0, \\ c_0\sigma_1\sigma_2 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Et cela exige que le résultat de l'élimination de σ_1 et σ_2 entre ces trois équations soit nul. Or, si l'on pose

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

et si l'on représente par D_i le déterminant déduit de celui-ci lorsqu'on y remplace les éléments a_i, b_i, c_i par a_0, b_0, c_0, on voit, en considérant les équations (18) comme linéaires en $\sigma_1\sigma_2$, σ_1 et σ_2, que l'on en tire

$$(19)\qquad \sigma_1\sigma_2 = -\frac{D}{D_3}, \qquad \sigma_1 = \frac{D_1}{D_3}, \qquad \sigma_2 = \frac{D_2}{D_3}.$$

Il vient, par suite, pour la condition cherchée

$$(20)\qquad DD_3 + D_1D_2 = 0.$$

C'est celle à laquelle M. Clark est parvenu par une voie sensiblement plus laborieuse.

Si elle est remplie, les valeurs critiques de σ_1 et σ_2 sont données par les deux dernières formules (19).

III.

8. *Construction projective des nomogrammes de genre* o *et* 1. — Plaçons-nous d'abord, pour le genre o, dans l'hypothèse où $\Delta > 0$, c'est-à-dire où les trois points critiques sont distincts (ce qui, par leur jonction deux à deux, donne trois supports d_i non concourants).

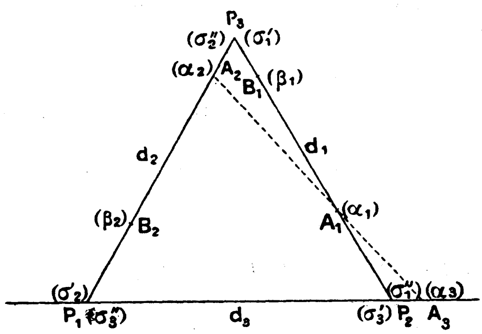
Nous pouvons, comme nous l'avons vu au n° 4, nous donner arbitrairement les points A_1 et B_1, A_2 et B_2 où les variables z_1 et z_2 prennent leurs valeurs limites a_1 et b_1, a_2 et b_2, auxquelles correspondent pour les fonctions f_1 et f_2 les valeurs α_1 et β_1, α_2 et β_2.

Tirant les droites A_1B_1 et A_2B_2, qui sont les supports d_1 et d_2, nous avons le point critique P_3 où les valeurs de f_1 et f_2 sont respectivement, par exemple (n° 6), σ'_1 et σ''_2.

Or, sur d_1, les points A_1, B_1, P_3 cotés α, β_1, σ'_1 appartiennent à une échelle projective d'une échelle métrique (n° 3) et la déterminent complètement [1]; on peut donc marquer sur cette échelle le point coté σ''_1; c'est le point P_2. Le point P_1 se détermine de même sur d_2 où l'on connaît déjà les points A_2, B_2, P_3.

Tirant la droite P_1P_2 on a le support d_3 sur lequel les points P_1 et P_2 sont cotés σ''_1 et σ'_3; un troisième point suffira pour déterminer complètement l'échelle (z_3) comme projective de celle de f_3. Or, ce troisième point est immédiatement donné par la rencontre

Fig. 1.



de d_3 avec l'alignement défini par deux points déjà cotés sur d_1 et d_2, par exemple A_1 et A_2, la cote du point obtenu se tirant de l'équation (6) où z_1 et z_2 ont été remplacés par leurs valeurs a_1 et a_2.

Si $\Delta = 0$, la construction doit être un peu modifiée, attendu que, par les valeurs critiques, on n'a plus qu'un point (le point critique unique P) de d_3. Pour avoir un second point de ce support, il faut déterminer sur d_1 et d_2 les points où aboutissent deux alignements correspondant, en vertu de (6), à une même valeur de z_3. Un troisième alignement quelconque, indépendant des deux premiers,

---

[1] Si l'on possède déjà une échelle de la fonction f_1, on peut coter A_1, B_1, P_3 au moyen des valeurs correspondantes a_1, b_1, ξ'_1 de z_1 et construire directement l'échelle (z_1) comme projective de celle de f_1.

donne ensuite sur d_3 le troisième point nécessaire à la détermination complète de l'échelle (z_3).

La même construction projective s'étend immédiatement aux nomogrammes de genre 1 lorsque la condition (20) ci-dessus est remplie. En effet, la connaissance des valeurs σ_1 et σ_2 de f_1 et f_2 au point critique P, jointe aux valeurs α_1 et β_1 d'une part, α_2 et β_2 de l'autre, permet la détermination complète des échelles (z_1) et (z_2). On construit ensuite, au moyen de doubles alignements correspondants, comme ci-dessus, autant de points qu'il est nécessaire de l'échelle (z_3), quatre, par exemple, s'il s'agit d'une échelle conique (n° 3).

9. *Emploi direct des échelles des fonctions composantes.* — Pour que l'échelle (z_i) figurant sur un nomogramme soit non pas seulement projective de l'échelle de la fonction f_i, mais cette échelle elle-même, il faut et il suffit que le point à l'infini sur la droite d_i corresponde à la valeur infinie de la fonction f_i. Appelons d'une manière générale I_i le point de d_i où la fonction f_i devient infinie. Pour que les échelles (z_i) et (z_j) soient simultanément réduites à celles des fonctions f_i et f_j il suffit, par une transformation homographique, de rejeter la droite I_iI_j à l'infini. Si, par hasard, le point I_k se trouve lui-même sur cette droite, la troisième échelle se trouve *ipso facto* réduite aussi à celle de la fonction f_k. Mais il peut se faire aussi que la droite I_iI_j coïncide avec le support d'une des échelles, auquel cas elle ne saurait être tout entière rejetée à l'infini. Il est donc essentiel d'examiner à part les cas où l'un ou plusieurs des points I se confondent avec des points critiques. C'est cette discussion que nous allons présenter ici d'une façon complète.

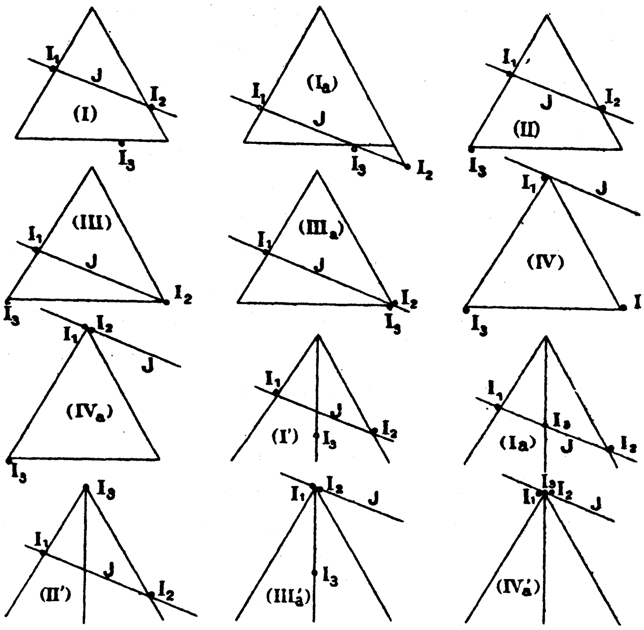
Nous ferons correspondre les numéros I, II, III et IV aux cas où 0, 1, 2 et 3 valeurs critiques des fonctions composantes sont infinies, en les affectant d'un accent lorsque les trois supports d_1, d_2, d_3 sont concourants et d'un indice a lorsque les trois points I_1, I_2, I_3 sont en ligne droite. Observons d'ailleurs tout de suite que les hypothèses (II_a), (II'_a), (III') et (IV') correspondent à des impossibilités.

La disposition relative à chacune des autres hypothèses est représentée schématiquement sur le Tableau ci-joint où la droite J est celle que l'on rejette à l'infini. Nous allons donner un exemple de chacune d'elles.

Au préalable, faisons les deux remarques générales que voici :

1° Pour avoir la valeur que prend l'une des fonctions lorsque les deux autres sont infinies, il faut diviser l'équation (6) par

Fig. 2.



le produit de celles-ci, ce qui montre que la valeur de f_i pour $f_j = f_k = \infty$ est donnée par

$$A f_i + B_i = 0,$$

et, par suite, qu'elle ne peut devenir elle-même infinie que si $A = 0$.

2° Pour qu'une des valeurs critiques σ_i devienne infinie, l'équation (14) montre qu'il faut que $E_i = 0$.

Il suit de là que les divers cas sont caractérisés comme suit (la notation θ indiquant une quantité différente de o) :

$$\Delta > 0.$$

I...........	$E_i = \theta$,	$E_j = \theta$,	$E_k = \theta$,	$A = \theta$,
I_a..........	θ,	θ,	θ,	o,
II..........	θ,	θ,	o,	θ,
III..........	θ,	o,	o,	θ,
III_a........	θ,	o,	o,	o,
IV..........	o,	o,	o,	θ,
IV_a.........	o,	o,	o,	o.

$$\Delta = 0.$$

I'...........	$E_i = \theta$,	$E_j = \theta$,	$E_k = \theta$,	$A = \theta$,
I'_a..........	θ,	θ,	θ,	o,
II'..........	θ,	θ,	o,	θ,
III'_a........	θ,	o,	o,	o,
IV'_a.........	o,	o,	o,	o.

Nous retrouvons bien ainsi les diverses conditions établies naguère par une voie purement algébrique ([1]).

Remarquons enfin que, étant libres de choisir des axes cartésiens avec lesquels les trois supports aient des équations aussi simples que possible, et ayant sur chacun de ces supports les cotes de 3 points, nous pouvons immédiatement écrire pour chacun d'eux les coordonnées du point courant en fonction de sa cote. Il suffit ensuite de remplacer ces coordonnées par leur expression dans le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

pour avoir, à peu près sans calcul algébrique, la transformation de l'équation donnée sous la forme de déterminant (1). C'est ce que nous aurons soin de faire à l'occasion de chacun des exemples particuliers ci-dessous.

10. *Exemples de tous les cas possibles d'équation d'ordre* 3 *représentable par un nomogramme de genre* o. — Représentant

---

([1]) *T. N.*, p. 459. A cet endroit, une faute d'impression s'est glissée dans l'avant-dernière ligne du Tableau, où le signe θ pour A doit être remplacé par o.

par J_3 la valeur de z_3 pour $z_1 = z_2 = \infty$, nous disposons au-dessous de chaque équation les valeurs critiques dans l'ordre

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 & \sigma'_1 & \sigma'_3 \\ \sigma''_1 & \sigma''_2 & \sigma''_3 \end{pmatrix}$$

en y ajoutant (J_3).

I. $$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (-1).$$

Nous indiquerons ici le détail de la mise sous forme de déterminant, sans y revenir pour les exemples suivants où nous nous contenterons de donner le résultat, qu'il est très facile de retrouver en se reportant à la marche indiquée ci-dessous.

Si nous prenons d_1 pour Ox, d_3 pour Oy, et d_2 comme droite $y = x + 1$, nous avons

$$x_1 = m_1 z_1 + n_1,$$
$$x_2 = m_2 z_2 + n_2,$$
$$y_3 = \frac{m_3 z_3 + n_3}{z_3 + p_3},$$

avec

$$\begin{array}{llllllll} x_1 = 0, & & -1, & \text{pour} & z_1 = 0, & & -\frac{1}{2}, \\ x_2 = 0, & & -1, & \text{pour} & z_2 = 0, & & -1, \\ y_3 = 0, & 1, & \infty, & \text{pour} & z_3 = 0, & 1, & -1, \end{array}$$

ce qui donne

$$x_1 = 2 z_1,$$
$$x_2 = z_2,$$
$$y_3 = \frac{2 z_3}{z_3 + 1},$$

d'où le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2 + 1 & 1 \\ 0 & 2 z_3 & z_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Quant à la construction, elle est d'une extrême simplicité, attendu que les échelles (z_1) et (z_2) sont métriques et que l'échelle homographique (z_3), ayant même cote (0) que l'échelle (z_1) en leur point commun O, est effectivement projective de celle-ci; le centre de projection est à la rencontre des alignements joignant, par exemple, les points cotés 1 et les points cotés — 1 (ce dernier, par conséquent, parallèle à Oy).

Pour les exemples suivants, nous bornant à inscrire au-dessous de chaque équation les valeurs critiques σ' et σ'' ainsi que J_3, nous les faisons suivre de la transformée sous forme de déterminant qui en résulte par une marche analogue à celle ci-dessus.

I_a.

$$z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2+1 & 1 \\ 0 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II.

$$z_1 z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 + z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & z_2+1 & 1 \\ 0 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III.

$$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \end{pmatrix} \quad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -z_3 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III_a.

$$z_3 z_1 - z_1 z_2 - z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & 0 \end{pmatrix} \quad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ -1 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

$$z_1 z_2 z_3 - 1 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \infty & \infty & \infty \end{pmatrix} \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & z_2 + 1 \\ 1 & -z_3 & -z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV$_a$.

$$z_3 z_1 - z_1 + z_2 = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & 1 \\ \infty & 0 & \infty \end{pmatrix} \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

I'.

$$z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 - z_3 z_1 + z_1 z_2 + 4 = 0,$$

$$(-2 \quad -2 \quad -2) \qquad (-1),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 2 & z_2 - 2 & -1 \\ -z_3 & z_3 + 2 & z_3 + 1 \end{vmatrix} = 0.$$

I'$_a$.

$$z_2 z_3 + z_3 z_1 - z_1 z_2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3},$$

$$(0 \quad 0 \quad 0) \qquad (\infty),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

II'.

$$z_1 z_2 z_3 - z_1 - z_2 = 0,$$

$$(0 \quad 0 \quad \infty) \qquad (0),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ 0 & z_2 & 1 \\ 1 & 1 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

III'$_a$.

$$z_2 z_3 - 2 z_3 z_1 + 1 = 0,$$

$$(\infty \quad \infty \quad 0) \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 1 \\ z_2 & 1 & 1 \\ 1 & -z_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

IV$'_a$.
$$z_1 - 2z_2 + z_3 = 0,$$
$$(\infty \quad \infty \quad \infty) \qquad \left(\frac{0}{0}\right),$$
$$\begin{vmatrix} z_1 & 0 & 0 \\ z_2 & 1 & 1 \\ z_3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

IV.

11. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre* 3. — Lorsqu'une équation est ordonnée nomographiquement par rapport à l'une des variables, z_3 par exemple, sous la forme

$$f_3 f_{12} + g_3 g_{12} + h_3 h_{12} = 0, \tag{21}$$

on peut essayer d'effectuer la disjonction des variables en posant

$$u f_{12} - g_{12} = 0, \qquad v f_{12} - h_{12} = 0, \tag{22}$$

ce qui donne pour z_3 l'échelle ponctuelle définie par

$$f_3 + u g_3 + v h_3 = 0.$$

Si, éliminant ensuite successivement z_2 et z_1 entre les équations (22), on trouve des équations linéaires en u et v

$$f_1 + u g_1 + v h_1 = 0,$$
$$f_2 + u g_2 + v h_2 = 0,$$

la disjonction se trouve effectuée sous la forme requise pour l'application de la méthode des points alignés.

Appliquons cela à l'équation (6). Mise sous la forme (21), elle s'écrira

$$f_3(A f_1 f_2 + B_1 f_2 + B_2 f_1 + C_3) + B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D = 0,$$

et les équations (22) seront ici

$$A\ f_1 f_2 + B_2 f_1 + B_1 f_2 + C_3 = u,$$
$$B_3 f_1 f_2 + C_1 f_1 + C_2 f_2 + D\ = v.$$

L'élimination de f_2 entre ces équations donne, eu égard aux formules du n° 6,

$$E_1 f_1^2 + (B_3 u - A v - F_1) f_1 + C_2 u - B_1 v + G_1 = 0,$$

équation linéaire en u et v, donc définissant un point dont le support a pour équation

$$(B_3 u - A v - F_1)^2 - 4 E_1 (C_2 u - B_1 v + G_1) = 0,$$

que, eu égard encore aux formules du n° 6, on peut écrire

$$(B_3 u - A v)^2 - 2 H_3 u + 2 K v + \Delta = 0,$$

équation qui resterait la même si l'on permutait les indices 1 et 2. Il résulte de là qu'on obtient ainsi un nomogramme sur lequel les échelles (z_1) et (z_2) ont pour support une *même* conique. Telle est la remarque fondamentale due à M. Clark; et, comme elle ne suppose rien sur le discriminant Δ, on voit qu'elle s'applique indistinctement à toutes les équations d'ordre 3.

Il résulte d'ailleurs de ce que nous avons rappelé au n° 3 que chacune de ces échelles (z_1) et (z_2) peut être construite au moyen de deux faisceaux projetants de la fonction f_1 ou f_2. Pour déterminer un tel faisceau, il en faut connaître trois rayons. Or, grâce à la considération de l'homographie la plus générale (n° 4), on peut disposer arbitrairement de quatre points A, B, C, D d'une de ces échelles, cotés d'une manière quelconque. Dans le faisceau obtenu en prenant pour centre l'un d'eux, A par exemple, on connaît les trois rayons AB, AC, AD avec leur cote; par suite, le choix fait des quatre points A, B, C, D entraîne la détermination complète soit de l'échelle (z_1), soit de l'échelle (z_2), et c'est également sur cette remarque que M. Clark a fondé la construction de ses nomogrammes coniques.

La question qui se pose est celle qui consiste à trouver la relation liant z_1 et z_2 en chaque point du support conique commun. M. Clark la résout en ramenant l'équation donnée à la forme canonique

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 + (\varphi_1 + \varphi_2) \psi_3 + \chi_3 = 0, \tag{23}$$

symétrique par rapport à φ_1 et φ_2, parce qu'alors la relation cherchée s'écrit

$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{24}$$

Mais la considération des valeurs critiques nous a conduit à trouver le moyen d'écrire cette relation d'après l'équation générale (6) sans lui faire subir aucune transformation préalable. Il est, en effet, facile de se rendre compte *a priori* de la disposition des valeurs critiques sur un nomogramme conique : si C est le support conique commun des échelles (z_1) et (z_2), D le support rectiligne de l'échelle (z_3), coupant la conique C aux points I et J, il est clair que les valeurs critiques sont réunies en ces deux points de façon qu'à l'un d'eux correspondent, pour z_1 et z_2, deux valeurs de même groupe, et, pour z_3, une valeur du groupe contraire; soit, par exemple : σ'_1, σ'_2 et σ''_3 en I; σ''_1, σ''_2 et σ'_3 en J.

Ainsi, les valeurs σ'_1 et σ'_2, d'une part, σ''_1 et σ''_2, de l'autre, sont associées en un même point de la conique. Or, ces couples de valeurs satisfont, d'après ce qui a été vu au n° 6, à la relation

$$2E_1\sigma_1 - F_1 = 2E_2\sigma_2 - F_2,$$

d'où l'on conclut que l'on doit avoir

$$\varphi_1 = 2E_1 f_1 - F_1, \qquad \varphi_2 = 2E_2 f_2 - F_2.$$

Et, en effet, si, dans l'équation générale (6), on remplace f_1 et f_2 par leurs valeurs tirées de là, on obtient

$$\varphi_1\varphi_2(Af_3 + B_3) + (\varphi_1 + \varphi_2)(Kf_3 + H_3) + L_3 f_3 + M_3 = 0,$$

où

$$L_3 = AF_1F_2 + 2B_1E_1F_2 + 2B_2E_2F_1 + 4C_3E_1E_2,$$
$$M_3 = BF_1F_2 + 2C_1E_2F_1 + 2C_2E_1F_2 + 4D\;E_1E_2,$$

qui est bien de la forme (23).

Ainsi, la forme particulière de la relation (24), déduite directement de l'équation générale (6), est

$$(25) \qquad 2E_1 f_1 - F_1 = 2E_2 f_2 - F_2.$$

Elle permet une construction immédiate du nomogramme, rendant inutile non seulement toute transformation algébrique préliminaire, mais même la simple disjonction des variables, puisque, l'échelle (z_1) étant arbitrairement construite comme il vient d'être dit, la relation (25) permet de doubler sa graduation de celle de l'échelle (z_2).

Remarque. — Nous venons de voir qu'on pouvait arbitrairement choisir quatre points cotés de (z_1). Pour ces quatre cotes, on prendra évidemment, d'une part, les valeurs de z_1, qui sont limites pour l'application qu'on a en vue, de l'autre, celles qui, en vertu de (25), correspondent de même aux valeurs limites de z_2.

12. *Nomogrammes coniques pour équations d'ordre* 4. — Appliquons la même analyse à l'équation générale d'ordre nomographique 4 écrite sous la forme (17) du n° 7, ou, par abréviation,

$$\alpha_{12} f_3 + \beta_{12} g_3 + \gamma_{12} = 0, \tag{17 bis}$$

et, pour cela, posons

$$\gamma_{12} u - \alpha_{12} = 0, \qquad \gamma_{12} v - \beta_{12} = 0. \tag{26}$$

Pour que nous puissions ainsi effectuer la disjonction des variables, remarquons d'abord qu'il faut que les équations en f_1 et f_2,

$$\alpha_{12} = 0, \qquad \beta_{12} = 0, \qquad \gamma_{12} = 0,$$

ne soient pas compatibles. Si, en effet, elles l'étaient, on aurait

$$\gamma_{12} = \lambda \alpha_{12} + \mu \beta_{12},$$

et, des équations (26), on déduirait

$$\lambda u + \mu v = 0,$$

équation indépendante de z_1 et z_2, conduisant dès lors à une impossibilité. Or, si l'on se reporte au n° 7, on voit que la condition d'incompatibilité des équations ci-dessus [qui, moyennant le remplacement de la notation f par la notation σ, se confondent avec les équations (18)] est

$$DD_3 + D_1 D_2 \neq 0.$$

Ainsi, la disjonction par les équations (26) pourra se faire lorsque la condition (20) n'aura pas lieu, c'est-à-dire lorsque l'équation (17) ne sera pas représentable par un nomogramme à deux échelles rectilignes; d'où cette conclusion, autrement obtenue par M. Clark, que, *tandis qu'une équation d'ordre* 3 *est* ad libitum *représentable par un nomogramme à échelles* *rectilignes ou coniques, une équation d'ordre 4 est représentable soit par l'un, soit par l'autre de ces types de nomogramme, à l'exclusion l'un de l'autre.*

Reste à vérifier que les équations (26) conduisent bien, pour z_1 et z_2, à des échelles coniques de même support.

Si, d'une manière générale, on pose

$$u_i = c_i u - a_i, \qquad v_i = c_i v - b_i,$$

les équations (26) peuvent s'écrire

$$f_2(u_0 f_1 + u_2) + u_1 f_1 + u_3 = 0,$$
$$f_2(v_0 f_1 + v_2) + v_1 f_1 + v_3 = 0,$$

et, par suite, lorsqu'on pose encore

$$\text{(27)} \qquad \mathrm{U}_{ij} = u_i v_j - u_j v_i,$$

le résultat de l'élimination de f_2 entre ces équations se met sous la forme

$$\text{(20)} \qquad \mathrm{U}_{01} f_1^2 + (\mathrm{U}_{03} - \mathrm{U}_{12}) f_1 + \mathrm{U}_{23} = 0,$$

équation linéaire en u et v, car on vérifie immédiatement que

$$\text{(29)} \qquad \mathrm{U}_{ij} = (b_i c_j - b_j c_i)\, u + (c_i a_j - c_j a_i)\, v + (a_i b_j - a_j b_i).$$

L'équation (28) définit donc bien pour z_1 une échelle conique.

De même, on trouverait pour z_2 l'échelle

$$\text{(30)} \qquad \mathrm{U}_{02} f_2^2 + (\mathrm{U}_{03} - \mathrm{U}_{21}) f_2 + \mathrm{U}_{13} = 0.$$

Il s'agit maintenant de faire voir que les échelles définies par les équations (28) et (30) ont même support. Les équations des supports de ces échelles sont respectivement (en coordonnées parallèles)

$$(\mathrm{U}_{03} - \mathrm{U}_{12})^2 - 4\mathrm{U}_{01}\mathrm{U}_{23} = 0,$$

et

$$(\mathrm{U}_{03} - \mathrm{U}_{21})^2 - 4\mathrm{U}_{02}\mathrm{U}_{13} = 0,$$

et la vérification de leur identité, lorsqu'on remarque que $\mathrm{U}_{21} = -\mathrm{U}_{12}$, se réduit à celle de

$$\mathrm{U}_{02}\mathrm{U}_{13} - \mathrm{U}_{01}\mathrm{U}_{23} = \mathrm{U}_{03}\mathrm{U}_{12},$$

qui est immédiate lorsqu'on y remplace les U par leurs expressions (27).