L. RAFFY

Sur l'isothermie relative des réseaux

Bulletin de la S. M. F., tome 35 (1907), p. 259-282
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1907__35__259_1>

SUR L'ISOTHERMIE RELATIVE DES RÉSEAUX;

Par M. L. Raffy.

Les pages qui suivent ont pour principal objet d'étendre la notion de réseau isotherme, afin de faire rentrer dans une même théorie diverses classes de réseaux, notamment ceux qui caractérisent soit les surfaces isothermiques, soit les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, et ceux que M. Bianchi appelle isothermes-conjugués.

Je commence par définir l'isothermie relative de deux réseaux et, après avoir montré qu'à deux réseaux qui présentent cette propriété on en peut toujours associer un troisième, qui est dans la même relation avec chacun d'eux, je donne sous forme invariante les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux.

J'applique d'abord ces conditions aux surfaces à lignes de courbure isothermes, et je ramène l'un à l'autre les deux critères de S. Lie et de M. Weingarten relatifs à ces surfaces.

Une seconde application concerne les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées, dont l'étude a été commencée par M. Eisenhart (*American Journal of Mathematics*, t. XXV, p. 213-248). Par le fait même de son rattachement à une notion plus large, cette étude se trouve complétée sur divers points. Je calcule à nouveau, en la généralisant, l'équation aux dérivées partielles des surfaces de M. Eisenhart et j'en déduis leurs caractéristiques (lignes de courbure et lignes asymptotiques).

Après diverses indications concernant la compatibilité des deux conditions d'isothermie relative, je montre que toute famille de courbes dont l'équation est de la forme

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

appartient à un réseau isotherme relativement au réseau des lignes coordonnées ($u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$) et je fais rentrer dans une même catégorie les surfaces isothermiques, celles dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme et celles dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme-conjugué.

I. — Définition et conditions pour l'isothermie relative des réseaux.

1. Quand deux couples de variables, α et β d'une part, φ et χ d'autre part, donnent lieu à une identité telle que

$$d\alpha\, d\beta = \psi(\varphi, \chi)(d\varphi^2 + d\chi^2), \tag{1}$$

si les équations $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ sont celles des deux familles de lignes de longueur nulle d'une surface, on dit que le réseau des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est un réseau isotherme de la surface [1].

En vue de généraliser cette notion, nous n'imposerons plus, au

---

[1] Si, au lieu de l'identité (1), on posait

$$d\alpha\, d\beta = W(u, v)\,[U(u)\, du^2 + V(v)\, dv^2],$$

le réseau $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ coïnciderait, comme il est bien connu, avec le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$

moins en général, aux lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ la condition d'être des lignes minima, et nous énoncerons le fait analytique exprimé par l'identité (1) en disant que le réseau $\varphi = \text{const.}$, $\chi = \text{const.}$ est *isotherme relativement au réseau* $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, ou, plus brièvement, que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement au réseau (α, β).

D'après cette convention de langage, une surface est dite *isothermique* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau formé par ses lignes de longueur nulle; la représentation sphérique (des lignes de courbure) d'une surface est dite *isotherme* quand le réseau de ses lignes de courbure est isotherme relativement au réseau qui correspond aux lignes minima de sa représentation sphérique; un réseau est dit *isotherme-conjugué,* au sens de M. Bianchi, quand il est isotherme relativement au réseau formé par les lignes asymptotiques.

2. Revenons à l'identité (1). Pour qu'elle ait lieu, il faut et il suffit que α et β soient deux fonctions ne dépendant, l'une que de $\varphi + i\chi$, l'autre que de $\varphi - i\chi$, de sorte qu'on a, inversement,

$$\varphi + i\chi = 2\alpha_1(\alpha), \qquad \varphi - i\chi = 2i\beta_1(\beta).$$

Ces équations entraînent

$$d\varphi\, d\chi = -i(d\alpha_1^2 + d\beta_1^2).$$

Or, le réseau (α_1, β_1) n'est pas distinct du réseau (α, β); d'où cette conclusion :

Théorème I. — *Si un réseau* (φ, χ) *est isotherme relativement à un réseau* (α, β), *le réseau* (α, β) *est isotherme relativement au réseau* (φ, χ), *et réciproquement.* En d'autres termes, *pour qu'un réseau soit isotherme relativement à un autre, il faut et il suffit que cet autre soit isotherme relativement au premier.*

Comme application, cherchons la condition d'isothermie des lignes de courbure d'une surface (S) rapportée à ses lignes minima. Soit

$$ds^2 = 4\lambda^2(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta$$

son élément linéaire et soit ξ l'une des coordonnées isotropes,

$x + iy$, par exemple, d'un point variable sur cette surface; les lignes de courbure sont déterminées (O. Bonnet) par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right)d\beta^2 = 0.$$

Soient $\varphi =$ const., $\chi =$ const. leurs équations finies; on a

$$\mu\, d\varphi\, d\chi = \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right)d\alpha^2 - \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right)d\beta^2.$$

Pour exprimer que la surface (S) est isothermique, écrivons que le réseau (α, β) est isotherme relativement au réseau (φ, χ) : nous trouvons immédiatement

$$\frac{1}{A_0(\alpha)}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\xi'_\alpha}{\lambda^2}\right) = \frac{1}{B_0(\beta)}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\xi'_\beta}{\lambda^2}\right),$$

ce qui est la condition connue.

Comme autre application, considérons une surface rapportée aux coordonnées tangentielles isotropes d'Ossian Bonnet, qui sont les paramètres (α, β) des lignes minima de sa représentation sphérique, et cherchons la condition pour que l'élément linéaire

$$d\sigma^2 = \frac{4\,d\alpha\, d\beta}{(\alpha\beta + 1)^2}$$

de la sphère de Gauss acquière la forme $\psi(d\varphi^2 + d\chi^2)$, quand on prend pour variables les paramètres (φ, χ) des lignes de courbure. Le plan tangent à la surface a pour équation

$$(\alpha - \beta)x - i(\alpha - \beta)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et, si l'on pose

$$p = \xi'_\alpha, \qquad q = \xi'_\beta, \qquad r = \xi''_{\alpha^2}, \qquad s = \xi''_{\alpha\beta}, \qquad t = \xi''_{\beta^2},$$

l'équation différentielle des lignes de courbure est

$$r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2 = 0,$$

de sorte qu'on a

$$\lambda\, d\varphi\, d\chi = r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2.$$

Au lieu d'écrire que le réseau (φ, χ) est isotherme relativement au réseau (α, β), écrivons que celui-ci est isotherme relativement au premier; nous trouvons immédiatement

$$\frac{r}{A_0(\alpha)} = \frac{t}{B_0(\beta)}:$$

c'est la condition pour que la représentation sphérique (des lignes de courbure) de la surface soit isotherme. Elle entraîne l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta} \log \frac{r}{t} = 0,$$

qui lui est équivalente, et dont les caractéristiques sont définies par la relation

$$d\alpha\, d\beta (r\, d\alpha^2 - t\, d\beta^2) = 0.$$

Ainsi, *l'équation aux dérivées partielles des surfaces pour lesquelles la représentation sphérique des lignes de courbure est isotherme admet comme caractéristiques les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.*

3. L'isothermie relative de deux réseaux peut se reconnaître à un caractère, théorique comme le précédent, et que voici :

Théorème II. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit :* 1° *que les tangentes aux courbes de l'un d'eux forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes de l'autre;* 2° *qu'ils soient isothermes l'un et l'autre relativement à un troisième réseau.*

1° Soient (α, β) et (φ, χ) les deux réseaux. On a, par hypothèse,

$$d\alpha\, d\beta = \psi(\varphi, \chi)(d\varphi^2 + d\chi^2).$$

Or, si l'on rapporte le second membre au type général

$$\mathfrak{F} = A\, d\varphi^2 + 2B\, d\varphi\, d\chi + C\, d\chi^2,$$

on aura

$$A = C = \psi, \qquad B = 0.$$

De même, si l'on compare le produit $2\,d\varphi\,d\chi$ au type général

$$\mathcal{F}_1 = A_1\,d\varphi^2 + 2B_1\,d\varphi\,d\chi + C_1\,d\chi^2,$$

on aura

$$A_1 = C_1 = 0, \qquad B_1 = 1.$$

De là résulte immédiatement

$$AC_1 - 2BB_1 + CA_1 = 0,$$

ce qui exprime que les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F} = 0$ ou (α, β) forment en tout point un faisceau harmonique avec les tangentes aux courbes du réseau $\mathcal{F}_1 = 0$ ou (φ, χ). Nous dirons avec M. Darboux (*Théorie des surfaces,* t. IV, p. 65) que *les réseaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ se divisent harmoniquement.*

2° Une extension facile d'un théorème dû à M. Tissot conduit à cet énoncé : *Étant données deux formes quadratiques binaires de différentielles, il existe des variables telles que les deux formes, exprimées au moyen de ces variables, ne contiennent pas de terme rectangle.* Si les deux formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne sont pas proportionnelles, ce système de variables est unique et il est fourni par les intégrales de l'équation

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} A\,d\varphi + B\,d\chi & A_1\,d\varphi + B_1\,d\chi \\ B\,d\varphi + C\,d\chi & B_1\,d\varphi + C_1\,d\chi \end{vmatrix} = 0,$$

qu'on obtient en égalant à zéro le covariant jacobien des deux formes. Dans le problème qui nous occupe, les deux réseaux étant distincts, les formes $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ ne peuvent pas être proportionnelles.

Appliquons cette règle au cas présent. L'équation différentielle du réseau qu'elle fait correspondre aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ) est

$$\mathcal{F}_2 = d\varphi^2 - d\chi^2 = 0.$$

Posons

$$d\varphi + d\chi = 2\,du, \qquad d\varphi - d\chi = 2\,dv.$$

Nous déduisons de là

$$d\alpha\,d\beta = \psi\,(d\varphi^2 + d\chi^2) = 2\psi\,(du^2 + dv^2), \qquad d\varphi\,d\chi = du^2 - dv^2,$$

ce qui prouve que le réseau $\mathcal{F}_2 = 0$ ou (u, v) est isotherme relativement aux deux réseaux (α, β) et (φ, χ), et que ces deux réseaux sont isothermes relativement à lui.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réseau (u, v) tel que, quand on rapporte la surface à ce réseau, les deux formes $d\alpha\, d\beta$ et $d\varphi\, d\chi$ deviennent respectivement

$$d\alpha\, d\beta = 2\psi(du^2 + dv^2), \qquad d\varphi\, d\chi = \lambda[\mathrm{U}(u)\, du^2 - \mathrm{V}(v) dv^2].$$

Si, de plus, les deux réseaux (α, β) et (φ, χ) se divisent harmoniquement, on devra, d'après la condition rappelée plus haut, avoir $\mathrm{U} = \mathrm{V}$, de sorte qu'il viendra

$$d\varphi\, d\chi = \mu(du^2 - dv^2).$$

Dès lors l'identité

$$2d(u + iv)\, d(u - iv) = [d(u + v)]^2 + [d(u - v)]^2$$

prouve que le réseau $(u + v,\ u - v)$, c'est-à-dire le réseau (φ, χ), est isotherme relativement au réseau $(u + iv,\ u - iv)$ ou (α, β).

La proposition est donc complètement démontrée. Le réseau (u, v), isotherme relativement aux deux réseaux proposés, n'est autre que celui qui est défini par l'extension du théorème de M. Tissot. Son équation, que nous avons dans le cas général mise sous la forme (2), peut aussi s'écrire

$$\begin{vmatrix} d\chi^2 & -d\varphi\, d\chi & d\varphi^2 \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} \\ \mathrm{A}_1 & \mathrm{B}_1 & \mathrm{C}_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle exprime simplement que ce réseau divise harmoniquement les deux réseaux proposés.

4. *Remarques et exemples.* — Faisons, pour un instant, abstraction de l'hypothèse concernant l'isothermie relative des réseaux et considérons, sur une surface, deux réseaux (R_1) et (R_2), définis respectivement par l'évanouissement de deux formes quadratiques de différentielles

$$\mathcal{F}_1 = \mathrm{A}_1\, d\varphi^2 + 2\mathrm{C}_1\, d\varphi\, d\chi + \mathrm{C}_1\, d\chi^2 = 0,$$
$$\mathcal{F}_2 = \mathrm{A}_2\, d\varphi^2 + 2\mathrm{C}_2\, d\varphi\, d\chi + \mathrm{C}_2\, d\chi^2 = 0.$$

En égalant à zéro le covariant jacobien $\mathcal{F}_3$ de ces deux formes, on définit un troisième réseau (R_3), qui divise harmoniquement et le réseau (R_1) et le réseau (R_2). Si donc ces deux réseaux se divisent harmoniquement, quel que soit celui des trois réseaux (R_1), (R_2), (R_3) que l'on considère, il divise harmoniquement chacun des deux autres : la condition est nécessaire et suffisante.

Quand elle est réalisée, les trois réseaux présentent une liaison mutuelle remarquable, que nous rappellerons en disant qu'ils forment une *triade*. Voici divers exemples de triades : 1° tout réseau orthogonal tracé sur une surface, son réseau bissecteur et le réseau des lignes minima; en particulier, les lignes de courbure d'une surface, leurs courbes bissectrices et les lignes minima; 2° les lignes de courbure d'une surface, ses lignes asymptotiques et ses *lignes diagonales* (lignes tangentes aux diamètres conjugués égaux de l'indicatrice); 3° les réseaux considérés par M. Darboux dans sa théorie des douze surfaces (*loc. cit.*).

A l'hypothèse qui définit la *triade* ajoutons l'isothermie relative de deux des réseaux; d'après le théorème qui précède, le troisième réseau sera isotherme relativement aux deux premiers. En conséquence, pour exprimer l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra introduire le réseau qui complète la triade dont ils font partie et exprimer que ce réseau est isotherme relativement à l'un des premiers. Il y aura donc trois manières équivalentes d'énoncer la propriété d'une surface sur laquelle deux réseaux déterminés sont isothermes l'un relativement à l'autre. Ainsi, les *surfaces isothermiques* étant définies par l'isothermie relative de leurs lignes de courbure et de leurs lignes minima, on a ces théorèmes, dont les réciproques sont vraies : *Sur toute surface isothermique, le réseau bissecteur des lignes de courbure est isotherme relativement au réseau des lignes minima; il est isotherme relativement au réseau des lignes de courbure.* De même, *les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées* étant définies par l'isothermie relative de leurs asymptotiques et de leurs lignes de courbure, en considérant le réseau des lignes diagonales, on trouve ces deux propriétés caractéristiques : *Sur toute surface à lignes de courbure isothermes-conjuguées, le réseau des lignes diagonales est isotherme relativement aux lignes asymptotiques; il est isotherme relativement aux lignes de courbure.*

Il résulte immédiatement de là que *les surfaces minima ont*, comme l'a démontré M. Eisenhart, *leurs lignes de courbure iso-*

thermes-conjuguées. En effet, les lignes asymptotiques des surfaces minima, étant rectangulaires, coïncident avec le réseau bissecteur des lignes de courbure; l'isothermie relative des lignes de courbure et de leur réseau bissecteur, que les surfaces minima présentent parce qu'elles sont isothermiques, revient donc à l'isothermie relative des lignes de courbure et des lignes asymptotiques, propriété qui définit les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

5. Nous allons maintenant donner, sous forme invariante, les conditions qui assurent l'isothermie relative de deux réseaux déterminés. A cet effet, nous introduirons une notion qui paraît de nature à intervenir dans bien d'autres recherches, la notion des *éléments invariants*. Soient

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{F} = \mathrm{A}\,du^2 + 2\mathrm{B}\,du\,dv + \mathrm{C}\,dv^2 = 0$$

l'équation d'un premier réseau et

$$\text{(II)} \qquad l\,du^2 + 2m\,du\,dv + n\,dv^2 = 0$$

celle d'un second réseau, isotherme relativement au premier. Cette dernière équation peut être remplacée par les deux suivantes :

$$\text{(II}'\text{)} \qquad l_1\,du + n_1\,dv = 0, \qquad l_2\,du + n_2\,dv = 0,$$

dont les premiers membres ne sont déterminés chacun qu'à un facteur arbitraire près. A ces premiers membres nous substituerons des expressions différentielles que nous appellerons les *éléments invariants de la forme* (II) *ou du réseau* (II) *relativement à la forme* (I) *ou au réseau* (I) et qui seront indépendantes non seulement des facteurs arbitraires dont il vient d'être question, mais aussi des coordonnées curvilignes auxquelles on rapporte la surface. Ces *éléments invariants*, auxquels nous attribuons les expressions suivantes

$$\text{(EI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sqrt{\mathrm{C}\,l_2^2 - 2\mathrm{B}\,l_2 n_2 + \mathrm{A}\,n_2^2}\,\frac{l_1\,du + n_1\,dv}{l_1\,n_2 - n_1\,l_2}, \\ &\sqrt{\mathrm{C}\,l_1^2 - 2\mathrm{B}\,l_1 n_1 + \mathrm{A}\,n_1^2}\,\frac{l_2\,du + n_2\,dv}{l_1\,n_2 - n_1\,l_2}, \end{aligned} \right.$$

sont homogènes et du degré zéro séparément par rapport à l_1, n_1

et par rapport à l_2, n_2. Ils se réduisent respectivement, quand la forme (I) est l'élément linéaire de la surface, aux *éléments d'arc* (¹) des courbes du réseau (II). Pour établir dans tous les cas leur invariance, posons

$$(3) \qquad l_1\,du + n_1\,dv = \omega_1\,d\alpha, \qquad l_2\,du + n_2\,dv = \omega_2\,d\beta$$

et désignons par $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ les paramètres différentiels de α et de β calculés par rapport à la forme quadratique (I); soit enfin $\Theta(\alpha, \beta)$ le déterminant fonctionnel de α et β, divisé par $\sqrt{AC - B^2}$. Les expressions considérées sont respectivement identiques à ces deux-ci

$$\sqrt{\Delta\beta}\,\frac{d\alpha}{\Theta(\alpha, \beta)}, \qquad \sqrt{\Delta\alpha}\,\frac{d\beta}{\Theta(\alpha, \beta)},$$

où ne figurent que des symboles invariants.

Cela étant, nous pouvons prendre pour courbes coordonnées les courbes du réseau (II) et faire, en conséquence, $l_1 = n_2 = 1$, $l_2 = n_1 = 0$. Les éléments invariants (EI) se réduisent respectivement à $\sqrt{A}\,du$, $\sqrt{C}\,dv$ (²).

Pour que le réseau (I) soit isotherme relativement au réseau (II), il faut et il suffit, par définition même, que $\mathcal{F}$ ne contienne pas de terme en $du\,dv$ et que les coefficients de du^2 et de dv^2 soient proportionnels à deux fonctions, dont l'une ne dépende que de u et l'autre que de v. C'est ce qu'expriment les deux relations

$$(4) \qquad B = 0,$$

$$(5) \qquad \frac{\sqrt{A}}{U(u)} = \frac{\sqrt{C}}{V(v)}.$$

La condition (4) exprime simplement que *les deux réseaux* (I) *et* (II) *se divisent harmoniquement.*

(¹) Les *éléments d'arc* ont été considérés par M. von Lilienthal (*Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen,* Leipzig, 1896; p. 17) et lui ont fourni, entre autres, un résultat que nous rapporterons un peu plus loin.

(²) L'équation $A\,du^2 - C\,dv^2 = 0$ définit le réseau qui divise harmoniquement le réseau (I) et le réseau (u, v). D'où cette propriété générale : *En égalant entre eux les carrés des éléments invariants d'un réseau relativement à un autre, on obtient l'équation différentielle du réseau qui les divise harmoniquement tous les deux.*

D'après la condition (5), les éléments invariants s'écrivent

$$\sqrt{A}\,du = \zeta\,U(u)\,du, \qquad \sqrt{C}\,dv = \zeta\,V(v)\,dv,$$

c'est-à-dire qu'*ils admettent un facteur intégrant commun.* Réciproquement, si les deux expressions $\sqrt{A}\,du$ et $\sqrt{C}\,dv$ admettent un facteur intégrant commun, la première ne dépendant que de u et la seconde que de v, on a les relations précédentes, qui entraînent la condition (5).

En conséquence nous arrivons à cette conclusion :

Théorème III. — *Pour que deux réseaux soient isothermes l'un relativement à l'autre, il faut et il suffit que ces deux réseaux se divisent harmoniquement et que les éléments invariants de l'un, calculés relativement à l'autre, admettent un facteur intégrant commun.*

Nous allons faire maintenant diverses applications de ce théorème. Il va sans dire que l'on peut, dans les applications, multiplier chaque élément invariant par tel facteur constant que l'on veut et multiplier simultanément ces deux éléments par n'importe quel facteur constant ou variable, par exemple négliger le dénominateur commun $l_1 n_2 - n_1 l_2$.

II. — Réseaux isothermes et critères divers pour l'isothermie des lignes de courbure.

6. Un réseau *isotherme* d'une surface est un réseau orthogonal, isotherme relativement au réseau des lignes de longueur nulle de la surface. En raison de leur orthogonalité, les tangentes aux courbes du réseau considéré forment un faisceau harmonique avec les tangentes aux lignes minima. Nous avons donc simplement à exprimer que *les éléments invariants du réseau relativement à l'élément linéaire admettent un facteur intégrant commun;* en d'autres termes, *pour qu'un réseau soit isotherme, il faut et il suffit que les éléments d'arc des deux familles de courbes dont il est composé admettent un facteur intégrant commun.*

C'est la forme même donnée par M. von Lilienthal (*loc. cit.*) au critère que Sophus Lie ([1]) a formulé ainsi :

Pour que les courbes intégrales d'une équation

$$l_1\,du + n_1\,dv = 0$$

fassent partie d'un réseau isotherme sur une surface d'élément linéaire

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

il faut et il suffit que l'expression $l_1\,du + n_1\,dv$ *et le premier membre*

$$\frac{\mathrm{E}n_1 - \mathrm{F}l_1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,du + \frac{\mathrm{F}n_1 - \mathrm{G}l_1}{\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}\,dv$$

de l'équation différentielle des trajectoires orthogonales de ces courbes admettent un facteur intégrant commun.

Désignons, en effet, ce premier membre par $l_2\,du + n_2\,dv$ et comparons les *éléments invariants* (EI)

$$\sqrt{\mathrm{G}l_2^2 - 2\mathrm{F}l_2n_2 + \mathrm{E}n_2^2}\,\frac{l_1\,du + n_1\,dv}{l_1n_2 - n_1l_2},$$

$$\sqrt{\mathrm{G}l_1^2 - 2\mathrm{F}l_1n_1 + \mathrm{E}n_1^2}\,\frac{l_2\,du + n_2\,dv}{l_1n_2 - n_1l_2}$$

avec les expressions correspondantes de Sophus Lie

$$l_1\,du + n_1\,dv, \qquad l_2\,du + n_2\,dv.$$

Pour prouver qu'ils leur sont proportionnels, nous n'avons qu'à vérifier l'identité

$$\mathrm{G}l_2^2 - 2\mathrm{F}l_2n_2 + \mathrm{E}n_2^2 = \mathrm{G}l_1^2 - 2\mathrm{F}l_1n_1 + \mathrm{E}n_1^2.$$

Or cette vérification est immédiate, eu égard aux significations de l_2 et n_2.

7. C'est, au fond, le critère tiré des *éléments invariants* que M. Darboux (*Théorie des surfaces*, t. II, p. 248-249) a employé pour former l'équation aux dérivées partielles des surfaces isother-

([1]) *Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen*, Leipzig, 1891; p. 162.

miques. La surface étant rapportée aux lignes minima ($\alpha =$ const., $\beta =$ const.) de sa représentation sphérique (*voir* ci-dessus, n° 2), si l'on pose

$$z = \frac{\xi - p\alpha - q\beta}{\alpha\beta + 1},$$

l'élément linéaire a pour expression

$$ds^2 = [r\,d\alpha + (z+s)\,d\beta][(z+s)\,d\alpha + t\,d\beta],$$

et le réseau des lignes de courbure a pour équations

$$\pm\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta = 0.$$

Formons ses éléments invariants relativement à l'élément linéaire, d'après les expressions générales (EI); nous aurons ici

$$A = r(z+s), \qquad 2B = (z+s)^2 + rt, \qquad C = t(z+s);$$
$$l_1 = \sqrt{r}, \qquad n_1 = \sqrt{t}; \qquad l_2 = -\sqrt{r}, \qquad n_2 = \sqrt{t}.$$

De là résulte

$$\begin{aligned} C l_2^2 - 2B l_2 n_2 + A n_2^2 &= \sqrt{rt}(z + s + \sqrt{rt})^2, \\ C l_1^2 - 2B l_1 n_1 + A n_1^2 &= -\sqrt{rt}(z + s - \sqrt{rt})^2, \\ l_1 n_2 - n_1 l_2 &= 2\sqrt{rt}. \end{aligned}$$

Par suite, les éléments invariants sont, à des facteurs numériques près,

$$(z + s + \sqrt{rt})\frac{\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}, \qquad (z + s - \sqrt{rt})\frac{\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}.$$

Or M. Darboux considère les deux expressions

$$\frac{\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta}{z + s - \sqrt{rt}}, \qquad \frac{\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta}{z + s + \sqrt{rt}},$$

visiblement proportionnelles aux deux précédentes et il écrit qu'elles admettent un facteur intégrant commun, ce qui conduit à l'équation du quatrième ordre que nous formerons un peu plus loin (*voir* ci-après, n° 9).

8. *Comparaison avec le critère de M. Weingarten.* — Voici,

aux notations près. comment M. Bianchi expose [1] le critère de M. Weingarten :

L'élément linéaire d'une surface et sa seconde forme quadratique fondamentale étant respectivement

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \qquad \mathrm{L}\,du^2 + 2\mathrm{M}\,du\,dv + \mathrm{N}\,dv^2,$$

on introduit trois fonctions λ, μ, ν, *définies par le système*

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{E}\nu - 2\mathrm{F}\mu + \mathrm{G}\lambda = 0, \\ \mathrm{L}\nu - 2\mathrm{M}\mu + \mathrm{N}\lambda = 0, \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} - \dfrac{\partial\mu}{\partial u} = \mathrm{B}\,\lambda + (\mathrm{B}_1 - \mathrm{A})\,\mu - \mathrm{A}_1\nu, \\[2mm] \dfrac{\partial\nu}{\partial u} - \dfrac{\partial\mu}{\partial v} = \mathrm{B}_1\nu + (\mathrm{B} - \mathrm{C}_1)\mu - \mathrm{C}\lambda, \end{cases}$$

où A, A_1, B, B_1, C, C_1 *sont les symboles de Christoffel formés avec* E, F, G. *L'existence des fonctions* λ, μ, ν *est la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit isothermique.*

Pour vérifier les équations finies (6), on pose

$$\lambda = \rho(\mathrm{EM} - \mathrm{FL}), \qquad 2\mu = -\rho(\mathrm{GL} - \mathrm{EN}), \qquad \nu = \rho(\mathrm{FN} - \mathrm{GM}).$$

Substituant dans les équations aux dérivées partielles, on obtient deux relations qui déterminent les deux dérivées de $\log\rho$; on écrit la condition d'existence de cette fonction auxiliaire : c'est la condition cherchée.

Tout revient donc ici à écrire qu'une certaine expression différentielle est une différentielle exacte. Pour appliquer le critère tiré des éléments invariants, on doit écrire que deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun. Ces deux opérations ne sont pas, au fond, distinctes l'une de l'autre : en effet, pour vérifier si deux expressions différentielles admettent un facteur intégrant commun, on en forme une troisième et l'on écrit que cette expression différentielle est une différentielle exacte.

Pour ramener les deux procédés l'un à l'autre, rapportons la surface à ses lignes de courbure ($u = $ const., $v = $ const.); nous aurons $\mathrm{F} = \mathrm{M} = 0$ et, par suite, $\lambda = \nu = 0$. Les équations (7) se

---

[1] *Lezioni di Geometria differenziale*, t. II, p. 30.

réduisent à

$$(7)' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \log \mu}{\partial u} = \mathrm{A} - \mathrm{B}_1 = \dfrac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\dfrac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}, \\ \dfrac{\partial \log \mu}{\partial v} = \mathrm{C}_1 - \mathrm{B} = \dfrac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\dfrac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}, \end{cases}$$

et la condition d'isothermie des lignes de courbure exprime simplement que l'expression

$$d' = \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}}\, du + \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{E}}}\, dv$$

est une différentielle exacte.

Or les éléments invariants (qui sont ici les éléments d'arc) du réseau des lignes de courbure ont pour expressions respectives $\sqrt{\mathrm{E}}\, du$ et $\sqrt{\mathrm{G}}\, dv$. L'existence d'un facteur intégrant commun revient à la condition pour que l'expression

$$d'' = \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} du + \frac{\partial \log \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} dv$$

soit une différentielle exacte. Mais l'identité

$$d \log \sqrt{\mathrm{EG}} = d' + 2d''$$

montre que d' et d'' sont en même temps des différentielles exactes.

Remarque. — Les fonctions λ, μ, ν étant proportionnelles aux coefficients de la forme invariante aux lignes de courbure

$$\mathcal{F} = \frac{\mathrm{EM} - \mathrm{FL}}{\mathrm{H}} du^2 - \frac{\mathrm{GL} - \mathrm{EN}}{\mathrm{H}} du\, dv + \frac{\mathrm{FN} - \mathrm{GM}}{\mathrm{H}} dv^2 \quad \left(\mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\right),$$

il paraît préférable d'introduire cette forme elle-même, en posant

$$\rho = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{H}},$$

de manière à avoir

$$\lambda\, du^2 + 2\mu\, du\, dv + \nu\, dv^2 = \mathrm{W} \mathcal{F}.$$

Alors la nouvelle fonction auxiliaire W a une signification invariante, facile à trouver. Reportons-nous, en effet, aux équations $(7)'$. L'existence de la fonction μ entraîne la condition nécessaire et suffisante

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\log\frac{E}{G} = 0. \tag{8}$$

D'autre part, les rayons de courbure principaux étant représentés par R_1 et R_2, la forme invariante $\mathcal{F}$ se réduit ici à

$$\mathcal{F} = \sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) du\, dv;$$

la fonction auxiliaire W est donc liée à μ par la relation

$$2\mu = W\sqrt{EG}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Mais, la condition (8) étant vérifiée, on peut supposer les paramètres des lignes de courbure choisis de façon que l'on ait $E = G$. Alors, en vertu des équations $(7)'$, la fonction μ se réduit à une constante. En conséquence, *la fonction* W, *dont la condition d'existence exprime l'isothermie des lignes de courbure, est, à un facteur constant près, l'inverse de*

$$\frac{E}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

c'est-à-dire de la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles de la surface considérée (transformation de Bour-Christoffel; voir *Annales de l'École Normale supérieure*, 1905, p. 419).

Ajoutons que, d'après l'identité

$$2\mu\, du\, dv = W\mathcal{F},$$

où μ est maintenant une constante, $W\mathcal{F}$ est un produit de deux différentielles. Ainsi, *quand une surface est isothermique, pour changer sa forme invariante aux lignes de courbure $\mathcal{F}$ en un produit de deux différentielles, il suffit de diviser cette forme par la courbure moyenne de l'une des transformées par normales parallèles.* Ceci s'accorde bien avec la proposition de Sophus Lie, aux termes de laquelle les lignes de courbure de toute surface isothermique peuvent être déterminées par des quadratures de différentielles exactes.

On peut mettre le résultat précédent sous une forme un peu différente et dire : *A toute surface isothermique correspond une fonction* ω *telle que l'élément linéaire, multiplié par* ω, *devient un produit de deux différentielles et que la forme invariante aux lignes de courbure devient aussi un produit de deux différentielles lorsqu'on la multiplie par* ω *et qu'on la divise par la différence des courbures principales.* En effet, si l'on désigne par 2Γ la différence des courbures principales, on a, d'après ce qui vient d'être rappelé,

$$\mathfrak{F} = 2\Gamma(\sqrt{E}\,du)(\sqrt{G}\,dv).$$

Ainsi la forme $\mathfrak{F}$ est égale au produit de 2Γ et des éléments invariants $\sqrt{E}\,du$, $\sqrt{G}\,dv$ du réseau des lignes de courbure. Soit $\sqrt{\omega}$ le facteur intégrant commun à ces deux éléments : nous aurons

$$\sqrt{\omega}\sqrt{E} = U'(u), \qquad \sqrt{\omega}\sqrt{G} = V'(v);$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathfrak{F} = \frac{2\Gamma}{\omega}\,dU\,dV, \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 = \frac{dU^2 + dV^2}{\omega},$$

ce qui démontre la proposition.

III. — Les surfaces a lignes de courbure isothermes-conjuguées et leurs caractéristiques.

9. Pour exprimer la propriété qui définit ces surfaces, il faut écrire que le réseau de leurs lignes de courbure et celui de leurs lignes asymptotiques sont isothermes l'un relativement à l'autre. Les tangentes aux courbes de ces deux réseaux formant en chaque point un faisceau harmonique, nous n'avons à tenir compte que de la condition relative aux éléments invariants. Employons encore les coordonnées tangentielles isotropes de Bonnet (*voir* ci-dessus, n^{os} 2 et 7). L'équation des lignes asymptotiques est

$$A\,d\alpha^2 + 2B\,d\alpha\,d\beta + C\,d\beta^2 = r\,d\alpha^2 + 2(z+s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2 = 0,$$

ce qui permet de prendre

$$A = r, \qquad B = z + s, \qquad C = t.$$

Pour les lignes de courbure, nous aurons, comme au n° 7,

$$l_1 = \sqrt{r}, \qquad n_1 = \sqrt{t}, \qquad l_2 = -\sqrt{r}, \qquad n_2 = \sqrt{t}.$$

De là résulte

$$\begin{aligned} C l_2^2 - 2 B l_2 n_2 + A n_2^2 &= 2\sqrt{rt}(\sqrt{rt} + z + s), \\ C l_1^2 - 2 B l_1 n_1 + A n_1^2 &= 2\sqrt{rt}(\sqrt{rt} - z - s), \\ l_1 n_2 - n_1 l_2 &= 2\sqrt{rt}. \end{aligned}$$

En conséquence, les éléments invariants du réseau des lignes de courbure relativement aux asymptotiques sont, à des facteurs numériques près,

$$\sqrt{z + s + \sqrt{rt}}\,\frac{\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}, \qquad \sqrt{z + s - \sqrt{rt}}\,\frac{\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta}{\sqrt[4]{rt}}.$$

Il suffira donc d'écrire qu'il existe un facteur intégrant commun aux deux expressions

$$(z + s + \sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha + \sqrt{t}\,d\beta), \qquad (z + s - \sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha - \sqrt{t}\,d\beta),$$

ce qui donne

$$(\mathrm{E}) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t} - m\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\sqrt{\frac{t}{r}}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{z + s + \sqrt{rt}}{z + s - \sqrt{rt}}\right) \\ &\qquad - m\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\sqrt{\frac{r}{t}}\,\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{z + s - \sqrt{rt}}{z + s + \sqrt{rt}}\right) = 0. \end{aligned} \right.$$

L'hypothèse $m = 0$ conduit à l'équation

$$(9) \qquad \frac{\partial^2}{\partial\alpha\,\partial\beta}\log\frac{r}{t} = 0,$$

qui caractérise (n° 2) les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme.

En faisant $m = 1$, on retrouve l'équation de M. Darboux relative aux surfaces isothermiques. Pour $m = \frac{1}{2}$, on obtient l'équation de M. Eisenhart (*loc. cit.*, p. 226) relative aux surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées.

Ces deux dernières équations ne différant que par les coefficients de leur premier terme, les surfaces qui les vérifient à la fois satisfont visiblement à l'équation (9); il suit de là que la représentation sphérique de leurs lignes de courbure est isotherme. Réciproquement, toute surface qui vérifie à la fois l'équation (9), ainsi que l'une des équations de M. Darboux et de M. Eisenhart, satisfait aussi à l'autre. En conséquence, *si le réseau des lignes de courbure d'une surface est isotherme relativement à deux des trois réseaux formés par ses asymptotiques, ses lignes minima et les lignes minima de sa représentation sphérique, il est isotherme relativement à tous les trois.* On peut encore dire : *Toute surface qui possède deux des propriétés suivantes, lignes de courbure isothermes, représentation sphérique des lignes de courbure isotherme, lignes de courbure isothermes-conjuguées, possède aussi la troisième.* Tel est le cas des surfaces de révolution, des quadriques et, plus généralement, de toutes les surfaces isothermiques à représentation sphérique isotherme.

Nous allons maintenant chercher les caractéristiques de l'équation générale (E).

Le groupe des termes contenant les dérivées du quatrième ordre est, abstraction faite du diviseur commun $(z+s)^2 - rt$,

$$\frac{m(z+s)}{rt}\left(r^2\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta^4} - t^2\frac{\partial^4\xi}{\partial\alpha^4}\right) - \frac{(z+s)^2+(2m-1)rt}{rt}\left(r\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta^3\,\partial\alpha} - t\frac{\partial^4\xi}{\partial\beta\,\partial\alpha^3}\right),$$

de sorte que les caractéristiques sont définies par l'équation

$$\begin{aligned} &m(z+s)(r^2\,d\alpha^4 - t^2\,d\beta^4)\\ &\quad + [(z+s)^2+(2m-1)rt](r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\,d\alpha\,d\beta = 0, \end{aligned}$$

qu'on peut écrire

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\big\{m(z+s)(r\,d\alpha^2+t\,d\beta^2)+[(z+s)^2+(2m-1)rt]\,d\alpha\,d\beta\big\} = 0.$$

Si l'on fait $m=0$, on trouve

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)\,d\alpha\,d\beta = 0.$$

Donc *les caractéristiques des surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme sont les lignes de courbure et les lignes qui correspondent aux lignes minima de la représentation sphérique.*

Pour $m=1$, il vient

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)[r\,d\alpha + (z+s)\,d\beta][(z+s)\,d\alpha + t\,d\beta] = 0,$$

ce qui vérifie un théorème que j'ai déjà démontré autrement : *les caractéristiques de l'équation des surfaces isothermiques sont les lignes de courbure et les lignes minima* (voir *Annales de l'École Normale supérieure,* 1906).

Pour $2m = 1$, en écartant l'hypothèse $z + s = 0$, qui correspond aux surfaces minima signalées plus haut, on a

$$(r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2)[r\,d\alpha^2 + 2(z+s)\,d\alpha\,d\beta + t\,d\beta^2] = 0.$$

Ainsi *les caractéristiques de l'équation des surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées sont les lignes de courbure et les lignes asymptotiques*. Cette proposition devra intervenir dans la théorie des surfaces dont il s'agit, de la même façon que la proposition ci-dessus intervient dans la recherche des surfaces isothermiques dépendant de fonctions arbitraires.

Ces deux théorèmes ne pouvaient d'ailleurs être prévus d'après les seules définitions des surfaces qu'ils concernent, car nous savons (n° 4) que ces surfaces sont également définies par l'isothermie relative de *trois couples* de réseaux, tandis qu'un seul de ces couples de réseaux est formé de leurs caractéristiques.

IV. — Compatibilité des conditions d'isothermie et questions diverses.

10. Dans les deux cas que nous venons d'étudier, l'une des conditions pour l'isothermie relative des deux réseaux considérés, celle du faisceau harmonique, était vérifiée d'elle-même. Il n'est resté que la condition concernant les éléments invariants : ces éléments étant exprimés au moyen d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées des deux premiers ordres, on a obtenu dans les deux cas *une équation* du quatrième ordre.

Si l'on veut exprimer qu'une surface présente l'isothermie relative de deux réseaux déterminés, on aura généralement *deux conditions distinctes*. Supposons que les équations différentielles des deux réseaux dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement. La condition du faisceau harmonique s'exprime par une équation d'ordre n ; la condition relative aux éléments invariants donnera une équation qui sera généralement de l'ordre $n+2$ et ces deux équations aux dérivées partielles pourront n'admettre que des solutions fort particulières, ou même être incompatibles. C'est ce dont on s'assurerait en traitant des exemples convenablement choisis.

Pour définir des classes très étendues de surfaces présentant l'isothermie relative de deux réseaux, on pourra se donner *les deux familles* de l'un des réseaux et seulement *l'une des familles* de l'autre. Si les équations différentielles de ces trois familles dépendent d'une fonction inconnue ξ et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, celle de la quatrième famille, qui sera fournie par la condition du faisceau harmonique, dépendra des mêmes dérivées et la condition relative aux éléments invariants fournira *une équation* de l'ordre $n+2$ en général.

On peut aussi, dans ce cas, répéter le raisonnement bien connu qui conduit à la condition nécessaire et suffisante pour que les courbes $\varphi=$ const. constituent, avec leurs trajectoires orthogonales $\chi=$ const., un réseau isotherme (au sens classique du mot) sur une surface donnée. La condition d'orthogonalité $\Delta(\varphi,\chi)=0$ exprime simplement que les courbes $\varphi=$ const., $\chi=$ const. qui se croisent en chaque point de la surface forment un faisceau harmonique avec ses lignes minima. Elle n'implique aucunement et la suite de la démonstration n'implique pas davantage que la forme quadratique de différentielles dont les coefficients figurent dans les paramètres $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, $\Delta(\varphi, \chi)$, $\Delta_2\varphi$ soit un élément linéaire. En conséquence, *pour que les courbes* $\varphi=$ const. *fassent partie d'un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation*

$$\mathcal{F} = A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2 = 0,$$

il faut et il suffit que le quotient des deux paramètres $\Delta_2\varphi$ *et* $\Delta\varphi$, *calculés par rapport à* $\mathcal{F}$, *soit une fonction de* φ. On arrive ainsi aux conclusions qui viennent d'être énoncées.

11. Il y a plus. La règle précédente fait connaître l'équation dont dépend *la recherche de tous les réseaux isothermes* relativement au réseau défini par l'équation $\mathcal{F}=0$. En outre, les symboles qu'elle fait intervenir étant essentiellement invariants, nous pouvons réduire la forme $\mathcal{F}$ à son terme rectangle, en supposant

$A = C = 0$. Il vient alors simplement

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_u \varphi'_v} = \Phi(\varphi).$$

Cette équation exprime, comme on sait, que φ est une fonction de la somme $U(u) + V(v)$, où U et V sont des fonctions arbitraires de leurs arguments respectifs. Ainsi *l'équation*

$$U(u) + V(v) = \text{const.}$$

définit sur une surface quelconque une famille de courbes qui fait partie d'un réseau isotherme relativement au réseau des courbes coordonnées $u =$ const., $v =$ const. Cette remarque générale s'applique en particulier à diverses classes de surfaces dont les courbures principales sont fonctions l'une de l'autre : le réseau (u, v) étant composé des lignes de courbure, les rayons principaux sont fonctions de $U(u) + V(v)$ pour les hélicoïdes, pour les surfaces isothermiques (*voir* la thèse de M. Caronnet, Paris, 1894), pour celles dont la représentation sphérique est isotherme, pour celles dont les lignes de courbure sont isothermes-conjuguées (Eisenhart), pour celles qui présentent une famille de lignes de courbure planes (Dini, Dobriner) ou sphériques et, sans doute, pour d'autres encore.

12. Proposons-nous, en terminant, la question inverse de celle qui fait l'objet du théorème III :

Étant données deux expressions différentielles

$$M_1(l_1\, du + n_1\, dv), \quad M_2(l_2\, du + n_2\, dv)$$

qui sont supposées admettre un facteur intégrant commun, trouver le réseau isotherme relativement au réseau (R) *défini par l'équation*

$$(l_1\, du + n_1\, dv)(l_2\, du + n_2\, dv) = 0.$$

Les deux inconnues du problème sont les rapports des coefficients A, B, C de l'équation

$$\mathcal{F} = A\, du^2 + 2B\, du\, dv + C\, dv^2 = 0,$$

qui définit le réseau cherché. Pour déterminer ces rapports, nous allons écrire que les deux expressions données sont proportionnelles aux éléments invariants (El) du réseau (R) relativement au réseau $\mathcal{F}=0$; il vient ainsi

$$\begin{aligned} C l_2^2 - 2 B l_2 n_2 + A n_2^2 &= \lambda M_1^2,\\ C l_1^2 - 2 B l_1 n_1 + A n_1^2 &= \lambda M_2^2, \end{aligned}$$

λ étant une indéterminée. De plus, les réseaux (R) et ($\mathcal{F}$) devant se diviser harmoniquement, nous avons

$$C l_1 l_2 - B(l_1 n_2 + n_1 l_2) + A n_1 n_2 = 0.$$

Ainsi se trouve constitué un système de trois équations du premier degré à trois inconnues dont le déterminant $(l_1 n_2 - n_1 l_2)^3$ est différent de zéro. Il fait connaître A, B, C en fonctions des données et du coefficient λ auquel on peut attribuer telle expression qu'on veut.

En appliquant la règle précédente aux deux expressions différentielles

$$(z+s+\sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha+\sqrt{t}\,d\beta), \qquad (z+s-\sqrt{rt})^m(\sqrt{r}\,d\alpha-\sqrt{t}\,d\beta),$$

considérées ci-dessus (n° 9), on trouve sans peine l'équation

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = {} & [(z+s+\sqrt{rt})^{2m}-(z+s-\sqrt{rt})^{2m}](r\,d\alpha^2+t\,d\beta^2)\\ & + 2\sqrt{rt}[(z+s+\sqrt{rt})^{2m}+(z+s-\sqrt{rt})^{2m}]\,d\alpha\,d\beta = 0, \end{aligned}$$

pour définir le réseau isotherme relativement au réseau des lignes de courbure

$$r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0.$$

Si l'on rapporte la surface à ses lignes de courbure $du\,dv=0$, on voit facilement qu'il faut remplacer les expressions précédentes par ces deux-ci :

$$\frac{\sqrt{E}\,du}{R_1^{1-m}}, \quad \frac{\sqrt{G}\,dv}{R_2^{1-m}}, \tag{10}$$

dont les numérateurs sont les éléments d'arc ds_1 et ds_2 des lignes de courbure; dans chaque dénominateur figure le rayon de la section principale tangente à la ligne de courbure considérée.

Supposons que ces deux expressions, visiblement invariantes, admettent un facteur intégrant commun et cherchons le réseau dont cette hypothèse entraîne l'isothermie relativement aux lignes de courbure $du\,dv = 0$. Par l'application des formules ci-dessus, on trouve immédiatement

$$A = \lambda \frac{E}{R_1^{2-2m}}, \qquad B = 0, \qquad C = \lambda \frac{G}{R_2^{2-2m}};$$

d'où résulte l'équation du réseau cherché

$$\mathfrak{F} = \frac{E\,du^2}{R_1^{2-2m}} + \frac{G\,dv^2}{R_2^{2-2m}} = 0.$$

Pour $m = 0$, on a les lignes minima de la représentation sphérique; pour $m = 1$, celles de la surface elle-même; pour $2m = 1$ ses lignes asymptotiques. Ainsi les surfaces dont les lignes de courbure ont leur représentation sphérique isotherme, les surfaces isothermiques et les surfaces à lignes de courbure isothermes-conjuguées rentrent dans la catégorie plus générale des surfaces dont les lignes de courbure forment un réseau isotherme relativement au réseau défini par l'équation $\mathfrak{F} = 0$, où m est une constante arbitraire. On peut donc définir ces trois classes de surfaces par la condition que les deux expressions (10) admettent un facteur intégrant commun, pour les trois valeurs correspondantes de m.

FIN DU TOME XXXV.

ERRATA.

Page 184, ligne 4, *au lieu de* α, *lire* α_1.
Même page, ligne 10, *au lieu de* σ''_1, *lire* σ''_3.
Page 188, ligne 3, *au lieu de* $\sigma'_1 \sigma'_1 \sigma'_3$, *lire* $\sigma'_1 \sigma'_2 \sigma'_3$.