BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

Sur la théorie des matrices

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 20-40

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__20_0>

SUR LA THÉORIE DES MATRICES;

PAR M. DE SÉGUIER.

On connaît la méthode si simple de Kronecker (*Cr.*, t. 107) pour la réduction (par additions, échanges, multiplications de lignes et de colonnes) des matrices dont les éléments sont entiers ou fonctions entières d'un paramètre variable. α_1 et α_0 étant deux matrices d'ordre n à éléments constants et $\alpha = t\alpha_0 + s\alpha_1$ un faisceau dont le déterminant peut être nul, on obtient ainsi deux matrices ξ, η (pouvant dépendre de s, t) telles que, dans $\xi\alpha\eta$, les seuls éléments $\neq 0$ soient dans la diagonale et soient les diviseurs élémentaires de α. Mais on sait aussi que l'on peut obtenir deux matrices u et v indépendantes de s, t telles que $u\alpha v$ ait une forme canonique complètement déterminée par certains éléments invariants de α. C'est cette autre réduction que je voudrais effectuer ici par une méthode semblable. On reconnaîtra d'ailleurs, sous l'exposition du n° 1, la marche indiquée récemment par M. Jordan (*J. M.*, 1907, p. 6-15). Dans le cas où α est réelle et symétrique, les mêmes procédés fournissent très simplement une généralisation du théorème de M. Loewy (*Cr.*, t. 122) sur la limite supérieure de la caractéristique d'une forme quadratique ou d'une forme hermitienne. Dans le cas où $\alpha_1 = \varepsilon_n$ (je désignerai en général par ε_N la matrice unité d'ordre N), on obtient la forme canonique de α_0. Je montrerai pour terminer comment cette forme canonique permet d'établir simplement aussi et de généraliser en partie certains résultats dus à MM. Frobenius, Schur, Bromwich et Rados.

1. Soit donc $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ un faisceau de matrices dont le déterminant $|\alpha|$ peut être nul. Il s'agit de trouver deux matrices u et v de déterminant $\neq 0$, indépendantes de s, t, telles que

$$u\alpha v = \mathrm{A} = \mathrm{A}_0 t + \mathrm{A}_1 s$$

soit la somme des matrices carrées composantes [1], dites *élémentaires,* des types suivants :

$$\varphi = \begin{Bmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & 0 \end{Bmatrix} = \varphi_0 t + \varphi_1 s,$$

$$\psi = \begin{Bmatrix} t & s & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} = \psi_0 t + \psi_1 s,$$

$$\chi = \begin{Bmatrix} s - ts_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ t & s - ts_i & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & s - ts_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s - ts_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & s - ts_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t & s - ts_i \end{Bmatrix} = \chi_0 t + \chi_1 s,$$

$$\omega = \begin{Bmatrix} t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ s & t & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & t & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & s & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & s & t \end{Bmatrix} = \omega_0 t + \omega_1 s,$$

dont je désignerai l'ordre, d'une manière générale, par q (pour $q = 1$, $\varphi = \psi = 0$), et éventuellement de matrices nulles [on remarquera que φ et ψ se ramènent respectivement, par permutation

---

[1] Je me servirai des mêmes notations que dans la Note II de mes *Éléments de la théorie des groupes abstraits* (Gauthier-Villars, 1904) auxquels je renverrai par la lettre *E*.

de lignes et de colonnes, aux matrices $\varphi_0 s + \varphi_1 t$, $\psi_0 s + \psi_1 t$ et que, si φ et ψ ont le même ordre, $\psi = \bar{\varphi}$; φ et ψ n'ont pas de diviseurs élémentaires; χ et ω ont respectivement les diviseurs élémentaires uniques $(s - ts_i)^q$ et t^q qui sont aussi des diviseurs élémentaires de A ou de α (*E.*, **190**)] [1].

Supposons d'abord que l'une des deux matrices α_0, α_1, par exemple α_0, soit de rang r inférieur à l'ordre n de α. Opérons sur α les *transformations* (j'entendrai par là des échanges, des multiplications, des additions à multiplicateur constant) de lignes et de colonnes qui réduisent α_0 à la forme diagonale $(0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 1)$, le nombre des zéros étant $n - r$, et soit $\begin{pmatrix} sa & sb \\ sc & d \end{pmatrix}$ la matrice obtenue, a étant une matrice constante d'ordre $n - r$ et d une matrice d'ordre r.

Par des transformations de lignes et de colonnes on peut ramener sa à la forme diagonale $(0, \ldots, 0, s, \ldots, s)$, le nombre des zéros étant $n - r - \rho$. Soit alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & sb' \\ 0 & s\varepsilon_\rho & sb'' \\ sc' & sc'' & d \end{pmatrix}$ la matrice obtenue, les matrices b', b'', c', c'' et les matrices nulles indiquées par des zéros ayant des types évidents. Si ρ est > 0, on peut, par des additions et des échanges de lignes et de colonnes, annuler b'' et c'', puis réduire α à la somme de deux matrices composantes dont l'une est $s\varepsilon_1$, de la forme χ pour $s_i = 0$, $q = 1$. *Soit donc* $\rho = 0$, *c'est-à-dire* $a = 0$.

---

(1) La forme A fournit immédiatement ce théorème de M. Stickelberger (*cf.* Muth, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler*, p. 190) :

Considérons α comme une forme bilinéaire aux deux séries de variables $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$, et soient, en supposant α_0 de rang $< n$, $x_{1k}, \ldots, x_{nk}$ $(k = 1, \ldots, p)$ un système complet de solutions indépendantes des équations $\frac{\partial \alpha_0}{\partial y_i} = 0$, la solution générale étant $\xi_i = \Sigma_1^p u_k x_{ik}$ $(i = 1, \ldots, n)$; $y_{1k}, \ldots, y_{nk}$ $(k = 1, \ldots, p)$ un système complet de solutions indépendantes des équations $\frac{\partial \alpha_0}{\partial x_i} = 0$, la solution générale étant $\eta_i = \Sigma_1^p u_k y_{ik}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Si, lorsqu'on remplace x_i par ξ_i et y_i par η_i, α_1 devient une forme bilinéaire de rang r dans les deux séries $u_1, \ldots, u_p$; $v_1, \ldots, v_p$, α a r diviseurs élémentaires égaux à t.

Il suffit de prendre α sous la forme A et de calculer les x_{ik}, y_{ik} : on voit alors tout de suite que A admet r composantes de la forme ω et d'ordre 1.

On peut ramener b, par des transformations de lignes et de colonnes, à la forme $\begin{pmatrix} o & o \\ s\varepsilon_\sigma & o \end{pmatrix}$, puis d par des transformations de lignes seulement ([1]) à la forme $t\varepsilon_r + sd'$, et faire passer les lignes nulles tout en bas du tableau.

Supposons d'abord $\sigma > o$. α se trouve ainsi réduit à la forme $\begin{pmatrix} f \\ o \end{pmatrix}$, en posant

$$\begin{pmatrix} o & s\varepsilon_\sigma & o \\ sc_1 & t\varepsilon_\sigma + sd_1 & sd_2 \\ sc_2 & sd_3 & t\varepsilon_{r-\sigma} + sd_4 \end{pmatrix} = f,$$

d_1, d_2, d_3, d_4, c_1, c_2 ayant des types évidents. Par des additions des σ premières lignes de f à celles de rangs $\sigma + 1$, ..., on peut annuler d_1 et d_3. *Soit donc* $d_1 = d_3 = o$.

Considérons la matrice $\beta = (c_1 \quad o \quad d_2)$ de type (σ, n). Si son rang est $< \sigma$, on pourra, par une transformation T *de lignes seulement,* annuler sa première ligne. En opérant cette transformation sur les lignes de rangs $\sigma + 1$, ..., 2σ de f (ce qui revient à multiplier à droite par une certaine matrice u), puis sur les *colonnes* des mêmes rangs la transformation inverse (celle qui revient à multiplier à gauche par u^{-1}), puis sur les σ premières *lignes* de f la transformation T, $s\varepsilon_\sigma$ et $t\varepsilon_\sigma$ sont inaltérées, et f se réduit immédiatement, par des transformations de lignes et de colonnes, à la somme de deux matrices composantes dont l'une $\begin{pmatrix} s & o \\ t & o \end{pmatrix}$ se réduit de même à $\begin{pmatrix} t & o \\ s & o \end{pmatrix}$, du type φ pour $q = 2$. On est ainsi ramené à une valeur moindre de n. *Soit donc* σ *le rang de* β.

Si alors c_1 est $\neq o$, on peut, par des transformations analogues, réduire (sans altérer $s\varepsilon_\sigma$ ni $t\varepsilon_\sigma$) tous les éléments d'une des $n - r$ premières colonnes à o sauf un, qu'une multiplication de colonne réduira à s. Au moyen de cet élément on annulera, par addition

---

([1]) d est de la forme $d_0 t + d_1 s$ avec $|d_0| \neq o$. Or on peut, par des transformations de lignes seulement, annuler d'abord tous les éléments de d_0 situés au-dessous de la diagonale (*E.*, p. 193). *Les éléments de la diagonale étant ici tous* $\neq o$, on peut, par de nouvelles transformations évidentes de lignes, annuler tous les éléments situés au-dessus.

de colonnes, ceux de sa ligne qui sont dans $s\,d_2$. On pourra alors, par des échanges de lignes et de colonnes, faire apparaître la matrice composante $\begin{pmatrix} o & s \\ s & t \end{pmatrix}$ qui se réduit, par échanges des colonnes, à $\begin{pmatrix} s & o \\ t & s \end{pmatrix}$ de la forme χ pour $s_i = o$, $q = 2$ (on serait arrivé à la forme ω si, au début, on avait supposé α_1 de rang $r < n$, ce qui aurait produit partout l'échange de s, t). *Soit donc* $c_1 = o$. $\beta = (o \quad o \quad d_2)$ ayant ainsi le rang σ et d_2 le type $(\sigma, r - \sigma)$, *il faut que* $r - \sigma$ *soit* $\geqq \sigma$ *ou* $r \geqq 2\sigma$.

Par des transformations de $r - \sigma$ dernières colonnes et des lignes de rangs $\sigma + 1, \ldots, 2\sigma$, chaque transformation de lignes étant accompagnée de la même transformation opérée sur les σ premières lignes de f et de la transformation inverse sur les colonnes de rangs $n - r + 1, \ldots, n - r + \sigma$, *on peut ramener* d_2, *qui est de rang* σ, *à la forme diagonale* $(1, 1, \ldots, 1)$ [*de type* $(\sigma, r - \sigma)$]. Par des additions des lignes de rangs $\sigma + 1, \ldots, 2\sigma$ aux suivantes, suivies chacune de l'opération inverse sur les colonnes de f, *on peut annuler les éléments de* d_4 *situés dans les colonnes de rangs* $n - r + \sigma + 1, \ldots, n - r + 2\sigma$. f se trouve ramenée à la forme

$$\begin{pmatrix} o & s\varepsilon_\sigma & o & o \\ o & t\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & o \\ sc'_1 & o & t\varepsilon_\sigma & sd'_2 \\ sc'_2 & o & o & t\varepsilon_{r-2\sigma} + sd'_4 \end{pmatrix} = f'.$$

Si la matrice $\beta' = (c'_1 \quad o \quad o \quad d'_2)$, de type (σ, n), est de rang $< \sigma$, on fera apparaître, par des opérations toutes semblables à celles employées plus haut, la matrice composante $\begin{pmatrix} s & o & o \\ t & s & o \\ o & t & o \end{pmatrix}$ qui se ramène à φ pour $q = 3$.

Si β' est de rang σ et $c'_1 \neq o$, on détache encore, comme plus haut, la matrice composante $\begin{pmatrix} s & o & o \\ t & s & o \\ o & t & s \end{pmatrix}$ du type χ pour $s_i = o$, $q = 3$.

Si β' est de rang σ et $c'_1 = o$, on ramène encore comme précédemment f' à la forme [d'_2 ayant le type $(\sigma, r - 2\sigma)$ et le rang σ, *il faut que* $r - 2\sigma$ *soit* $\geqq \sigma$ *ou* $r \geqq 3\sigma$)]

$$\begin{Vmatrix} 0 & s\varepsilon_\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s\varepsilon_\sigma & s\varepsilon_\sigma & 0 \\ sc''_1 & 0 & 0 & t\varepsilon_\sigma & sd''_2 \\ sc''_2 & 0 & 0 & 0 & t\varepsilon_{r-2\sigma} + sd''_4 \end{Vmatrix} = f''$$

sur laquelle on raisonnera de même.

Si $\sigma = 0$, ou bien $c = 0$ et on est ramené à la réduction de d d'ordre $< n$, ou bien c est $\neq 0$ et, par des transformations des colonnes de sc et de sd' analogues aux précédentes, on isolera une matrice composante de la forme $\begin{pmatrix} t & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons maintenant que α_0 et α_1 soient de rang n et considérons le faisceau $t(\alpha_0 + s_1\alpha_1) + s\alpha_1$, $s - ts_1$ étant un facteur de $t\alpha_0 + s\alpha_1|$. Le rang de $\beta_0 = \alpha_0 + s_1\alpha_1$ étant $< n$, on pourra appliquer à $\beta = t\beta_0 + s\alpha_1$ la méthode précédente. Supposons donc que $x\beta y$ soit une somme de matrices composantes élémentaires; α_1 ayant le rang n, ces matrices seront toutes de la forme χ ou ω; de plus, $|\beta|$ ayant le facteur s, l'une d'elles χ^1 aura la forme χ avec $s_i = 0$. Donc $x\alpha_1 y$ est une somme de matrices composantes dont l'une se déduit de χ^1 en faisant $s = 1$, $t = 0$. Donc $x\alpha y = x\beta y - ts_1 x\alpha_1 y$ est une somme de matrices composantes dont l'une a la forme χ avec $s_i = s_1$. On est donc ramené à un ordre $< n$.

2. Soient $\varphi^1, \ldots, \varphi^h$, des ordres respectifs $q_1, \ldots, q_h$ ($q_i \leqq q_{i+1}$), les matrices composantes de A de la forme φ; $\psi^1, \ldots, \psi^k$, des ordres respectifs $r, \ldots, r_k$ ($r_i \leqq r_{i+1}$), celles de la forme ψ; $\chi^1, \ldots$ et $\omega^1, \ldots$ celles des formes χ et ω.

Assimilons α à la forme bilinéaire $\Sigma\alpha_{ik}x_i y_k$. A chaque combinaison de n' lignes (colonnes) où tous les déterminants d'ordre $r' + 1 \leqq n'$ sont nuls (j'appellerai une telle combinaison *singulière*) mais non tous ceux d'ordre r' répondent $n - r'$ relations linéaires distinctes entre les dérivées par rapport aux $x_i(y_k)$. Appelons *degré en s, t d'une telle relation,* que je supposerai toujours mise sous forme entière en s, t, le degré minimum auquel on la réduit par suppression des facteurs communs. On vérifie directement que *ce degré ne croît jamais lorsqu'on change linéairement les variables* x_i, y_i.

A la combinaison singulière des q_i lignes de A qui contiennent les éléments de φ^i répond évidemment une seule relation linéaire $R_i = 0$ entre les dérivées de $A = \Sigma A_{ik} X_i Y_k$ par rapport aux X_i, homogène et de degré $q_i - 1$ exactement en s, t [ainsi, pour $\varphi^1 = t \Sigma_1^{q_1-1} X_i Y_i + \Sigma_2^{q_1} X_i Y_{i-1} = \Sigma_1^{q_1} \varphi^{1i} X_i$, R_1 est, à un facteur constant près, $\Sigma_1^{q_1} s^{q_1-i}(-t)^{i-1}\varphi^{1i}$], et, comme la combinaison de lignes obtenues en supprimant dans A les lignes nulles et la dernière ligne de chaque φ^i n'est pas singulière, il n'y a pas, entre ces dérivées, plus de h relations distinctes. D'ailleurs, chaque dérivée ne figurant que dans un R_i, *les* $R_i = 0$ *sont distinctes* et, dans tout système équivalent de relations $R'_1 = 0, \ldots, R'_h = 0$ homogènes en s, t, les R'_i sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers en s, t des R_i. De plus, *si l'on range les* $R'_i = 0$ *dans un ordre tel que le degré* δ_i *de* R'_i *en* s, t *soit* $\leqq \delta_{i+1}$, δ_i *est* $\geqq q_i - 1$. En effet, supposons prouvé que δ_i est $\geqq q_i - 1$ pour $i = 1, \ldots, j$. Si δ_j est $\geqq q_{j+1} - 1$, il en sera de même, *a fortiori*, de δ_{j+1}. Si δ_j est $< q_{j+1} - 1$, $R'_1, \ldots, R'_j$ sont des combinaisons linéaires de $R_1, \ldots, R_j$ seulement. Donc, $R'_{j+1} = 0$ étant distincte de $R'_1 = 0, \ldots, R'_j = 0$, un au moins des R_i, où i est $> j$, devra figurer dans R'_{j+1}. Donc δ_{j+1} est $\geqq q_{j+1} - 1$. Les variables Y_i donnent lieu à des considérations analogues.

Le nombre des relations distinctes entre les dérivées de α *par rapport aux* x_i *est évidemment* h, *et, dans tout système de* h *relations distinctes entre ces dérivées, les degrés de ces relations, rangés dans un ordre tel qu'ils ne décroissent pas, sont au moins égaux à* $q_1 - 1, \ldots, q_h - 1$ *respectivement* (on le voit en repassant aux variables X_i, Y_i) *et peuvent effectivement atteindre ces nombres* (on le voit en passant des variables X_i, Y_i aux variables x_i, y_i).

Les degrés $q_i - 1$ *et de même les* $r_i - 1$ *que j'appellerai* degrés canoniques, *comme aussi les nombres* h *et* k *de ces degrés, sont donc des invariants, et il en résulte que la forme* A *est unique*. Je dirai que A est la *première forme canonique* ou simplement la *forme canonique de* α. Si $\alpha_1 = \varepsilon_n$, A ne contient évidemment que des matrices χ^i, c'est-à-dire que, si $u\alpha v = A$, uv est égal à ε_n; alors $A_0 = v^{-1}\alpha_0 v$ est la *forme canonique de* α_0.

Si, dans chacune des matrices φ, ψ, χ, ω on échange les lignes équidistantes des extrêmes, ce qui revient à la multiplier à droite par une matrice carrée η_q d'ordre q où tous les éléments de la transversale principale (en appelant *transversale* toute file d'éléments perpendiculaire à la diagonale principale, et *transversale principale* celle où figure le dernier élément de la première ligne) sont égaux à 1 et les autres nuls, on obtient respectivement des matrices $\varphi^0 = \varphi_0^0 t + \varphi_1^0 s$, $\psi^0 = \psi_0^0 t + \psi_1^0 s$, $\chi^0 = \chi_0^0 t + \chi_1^0 s$, $\omega^0 = \omega_0^0 t + \omega_1^0 s$ dont les deux dernières sont symétriques. Si l'on transforme ainsi chaque composante élémentaire de A (je désignerai par φ^{i0}, ψ^{i0}, χ^{i0}, ω^{i0} ce que deviennent respectivement φ^i, ψ^i, χ^i, ω^i), A devient *la seconde forme canonique*

$$A^0 = A_0^0 t + A_1^0 s$$

de α.

En posant $s = \lambda s' + \mu t'$, $t = \lambda' s' + \mu' t'$ $(\lambda\mu' \neq \mu\lambda')$, $\alpha'_0 = \mu'\alpha_0 + \mu\alpha_1$, $\alpha'_1 = \lambda'\alpha_0 + \lambda\alpha_1$, on a $\alpha = t'\alpha'_0 + s'\alpha'_1$, et chaque diviseur élémentaire $(as + bt)^\rho$ de α devient $[(a\lambda + b\lambda')s' + (a\mu + b\mu')t]^\rho$; il est clair que l'on peut disposer de λ, μ, λ', μ' de manière que trois de ces diviseurs élémentaires s'annulent pour des valeurs arbitraires de $s' : t'$. D'ailleurs les degrés canoniques restent évidemment inaltérés. Donc la forme canonique de α, lorsqu'on passe aux variables s', t', ne subit d'autre changement que la substitution aux matrices χ^i, ω^i des matrices construites de même avec les nouveaux diviseurs élémentaires.

Il est clair que, si $\beta = \beta_0 t + \beta_1 s$ (β_0 et β_1 étant constantes) a la même forme canonique que α, β est de la forme $\xi\alpha\eta$, ξ et η étant des matrices invertibles constantes d'ordre n, et réciproquement. α et β sont alors dits *équivalents*.

Soit C un champ contenant les éléments de α_0, α_1. La méthode de réduction précédente montre que l'on peut trouver deux matrices invertibles x, y à éléments dans C, telles que $x\alpha y = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ étant la somme des matrices composantes φ^i, ψ^i, ω^i et d'une matrice α' équivalente à la somme des matrices composantes χ^i. On peut alors démontrer directement et sans passer par la forme canonique qu'il existe deux matrices ξ, η constantes et invertibles telles que $\xi\alpha'\eta = \beta'$, β' étant une matrice quelconque équivalente à α' (*cf.* Frobenius, *Cr.,* t. 86, p. 202-204). On déduit de là pour α des formes réduites successives dans les divers champs contenant C (*cf. E.*, **204**; le n° **203** est inexact).

3. Soit maintenant α une substitution d'ordre n invertible ou non. Convenons que, si $f(x)$ est un polynome ou une série entière, convergente sur tout le plan, $f(\alpha)$ se forme en remplaçant x par α et en multipliant le terme constant par $\varepsilon_n = \varepsilon$. Le sens de $f(\alpha)$ est alors évident par lui-même.

Soient $s_{l0} = s_0, \ldots, s_{l\nu_l} = s_{\nu_l}$ les racines d'un facteur f_l de $\alpha - s\varepsilon| = \Delta(s)$, irréductible dans le champ considéré; $y_{j1}, \ldots, y_{jm_j}$ ($m_j = m_{jl}$) les variables de la $j^{\text{ième}}$ suite relative à s_0 (d'après la terminologie du Traité de M. Jordan); α_{lj0} l'action de α sur $y_{j1}, \ldots, y_{jm_j}$. Prenons α sous forme canonique. D'après l'expression connue de α^λ, on aura, $\varphi(x)$ étant un polynome, en posant $\frac{\varphi^{(i)}(s_0)}{1\ldots i} = \varphi_i$,

$$(1)\qquad \varphi(\alpha_{lj0}) = \left|\begin{array}{ll} y_{j1} & \varphi_0 y_{j1} \\ y_{j2} & \varphi_1 y_{j1} + \varphi_0 y_{j2} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{jr} & \varphi_{r-1} y_{j1} + \ldots + \varphi_{r-i} y_{ji} + \ldots + \varphi_0 y_{jr} \end{array}\right|;$$

$\varphi(\alpha)$ est le produit des substitutions analogues à φ_{lj0}).

Pour que $\varphi(\alpha)$ soit nul, il faut et suffit, si $m_j \geqq m_{j+1}$, que $\varphi(s_k)$, $\varphi'(s_k), \ldots, \varphi^{(m_1-1)}(s_k)$ soient nuls (l prenant toutes ses valeurs), c'est-à-dire que s_k soit racine m_1^{uple} de φ. Or $(s - s_k)^{m_1}$ est le premier diviseur élémentaire de $\Delta(s)$ relatif à $s - s_k$ (*E.*, §§ **190**, **201**). Donc, pour que $\varphi(\alpha) = 0$, il faut et il suffit que $\varphi(s)$ soit divisible par le quotient $\psi(s)$ de $\Delta(s)$ par le plus grand commun diviseur des mineurs d'ordre $n - 1$ de $\Delta(s)$.

En formant l'inverse de $\varphi(\alpha_{lj0})$, puis le produit de deux substitutions de la forme (1), on voit directement que la formule (1) subsiste si φ est seulement rationnelle (mais finie aux points s_{lk}).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction quelconque régulière aux points s_{lk}. La formule (1) montre encore de suite le sens qu'il faudra attacher à $\varphi(\alpha)$. De plus, $\frac{\mathrm{P}}{\psi}$ désignant alors la somme des parties fractionnaires des développements de $\frac{\varphi}{\psi}$ relatifs aux points s_{lk} (si m est le degré de ψ, P est un polynome de degré $\leqq m - 1$ qui, lorsque φ n'est pas uniforme, dépend de la branche choisie en chaque point s_{lk}), $\frac{\varphi - P}{\psi} = \omega$ sera régulière aux points s_{lk} (tout polynome Q de degré $\leqq m - 1$ pour lequel $\frac{\varphi - Q}{\psi}$ est régulière aux points s_{lk} coïncide avec P puisque $P - Q$ est divisible par ψ). *Donc* $\omega(\alpha)$ *aura un sens défini. Donc* $\varphi(\alpha) = P(\alpha)$ (1).

Revenant aux variables primitives, on voit, d'après (1) ou d'après l'égalité $\varphi(\alpha) = P(\alpha)$, que $\varphi(\alpha)$ sera réelle si α est réelle et que $\varphi(s_i)$ est conjuguée de $\varphi(s_k)$ quand s_i l'est de s_k.

Si φ vérifie identiquement une équation $f(x, \varphi) = 0$, on aura évidemment $f[\alpha, \varphi(\alpha)] = 0$; si, de plus, $f(x, P)$ est régulière aux points s_{lk} et si le développement de $f(x, P + \omega\psi)$, suivant les puissances de $\omega\psi$, a un sens, on aura aussi $f[\alpha, P(\alpha)] = 0$. C'est ce qui a lieu, par exemple, si $f(x, \varphi)$ est un polynome en x, φ ou si $f(x, \varphi) = e^{\varphi} - x$ ou si $f(x, \varphi) = e^{mx} - \varphi^m$. Supposons que $f(x)$ soit un polynome en x, φ. Comme $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$, une des déterminations de $\varphi(\bar{\alpha})$ est $\overline{\varphi(\alpha)}$. De même, si les équations $f(x, \varphi^{-1}) = 0$ et $f(x^{-1}, \varphi) = 0$ sont équivalentes, $\varphi(\alpha^{-1})$ et $\varphi(\alpha)^{-1}$ ont une détermination commune. Ainsi $\left(\alpha^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ et $(\alpha^{-1})^{\frac{1}{2}}$ ou $\alpha^{\frac{-1}{2}}$ ont une détermination commune [en supposant $|\alpha| \neq 0$ pour que $\psi(0)$ soit $\neq 0$].

On déduit de là (Frobenius, *loc. cit.*) que, *si* $x\alpha y$ *avec* $|xy| \neq 0$ *et* $\bar{\alpha} = \theta\alpha$, $\bar{\beta} = \theta\beta$ $(\theta = \pm 1)$, β *est de la forme* $v\alpha\bar{v}$, v *étant indépendante de* α, β, car, en transposant, en éliminant β et en posant $\bar{y}^{-1}x = z$, on a $\alpha^{-1}z\alpha = \bar{z}$, d'où $\alpha^{-1}u\alpha = \bar{u}$, u étant un polynome quelconque en z. Donc, si $|u| \neq 0$, $\beta = xu^{-1}\alpha\overline{uy}$. Or, en posant $xu^{-1} = v$, la condition $\overline{uy} = \bar{v}$, qui s'écrit $u^2 = z$, est toujours réalisable, puisque $|z|$ est $\neq 0$. *Si* $y = x^{-1}$, v *est orthogonale*, car alors $x\varepsilon y = \varepsilon$ et v est indépendante de α, β.

4. Reprenons maintenant les notations des nos **1** et **2**. Supposons la matrice $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ symétrique et ramenons-la à la seconde forme canonique A^0. α étant symétrique, on aura $h = k$,

---

(1) *Comparer* Frobenius, *S. A. B.*, 1896, p. 7; Bromwich, *P. C. P. S.*, t. XI p. 75 (1901).

$q_i = r_i$. Donc $\begin{pmatrix} \varphi^{i0} & 0 \\ 0 & \psi^{i0} \end{pmatrix}$ devient, par l'échange des lignes équidistantes des extrêmes, une matrice symétrique $\sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \psi^i \\ \varphi^i & 0 \end{pmatrix}$; je désignerai par σ une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}$ où φ et ψ sont du même ordre q. Soit $A^{00} = A_0^{00} t + A_1^{00} s$ la somme des matrices composantes σ^i, χ^{i0}, ω^{i0}. A^{00} étant symétrique, on pourra trouver une matrice invertible constante u telle que $u\alpha\bar{u} = A^{00}$.

Supposons α réelle mais non nécessairement symétrique. On pourra d'abord, par des substitutions réelles, ramener α à la somme d'une matrice composante α', somme elle-même de matrices composantes des formes φ^0, ψ^0, ω^0 et d'une autre matrice composante $\alpha'' = \alpha''_0 t + \alpha''_1 s$ d'ordre n'' où $|\alpha''_1| \neq 0$ (si α est symétrique, on peut supposer et je supposerai que α' est une somme de matrices composantes des types σ, ω^0). Soit $f = s^2 + ast + bt^2$ $(a^2 < 4b)$ un facteur quadratique réel de $|\alpha''|$, donc de

$$|\alpha'' \alpha_1''^{-1}| = |\alpha''_0 \alpha_1''^{-1} t + \varepsilon_{n''} s|.$$

On pourra trouver (*E.*, **204**) une substitution *réelle* x telle que $x\alpha''\alpha_1''^{-1} x^{-1}$ soit une somme de matrices composantes réelles de la forme χ et de la forme

$$X = \begin{pmatrix} at+s & -bt & 0 & 0 & \dots \\ t & s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & t & at+s & -bt & \dots \\ 0 & 0 & t & s & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{pmatrix} = X_0 t + X s$$

(je désignerai l'ordre de X par $2q$) et, par suite, deux substitutions réelles x, y telles que $x\alpha y$ soit une somme $B = B_0 t + B_1 s$ de matrices composantes des formes φ^0, ψ^0, ω^0, χ, X (ou σ, ω^0, χ, X si α est symétrique). En ajoutant dans X, à chaque ligne de rang impair, la ligne suivante multipliée par $-a$ et en échangeant les lignes équidistantes des extrêmes, on obtient la matrice symétrique

$$X^0 = \begin{pmatrix} \dots & 0 & 0 & t & s \\ \dots & 0 & t & s & -as-bt \\ \dots & t & s & 0 & 0 \\ \dots & s & -as-bt & 0 & 0 \\ \dots & \cdot & \dots\dots\dots & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = X_0^0 t + X_1^0 s.$$

La matrice $B^0 = B_0^0 t + B_1^0 s$ déduite de B en remplaçant chaque matrice composante de la forme X ou χ par la matrice correspondante de la forme X^0 ou χ^0 respectivement est symétrique et équivalente à α. *Si donc α est symétrique, il y aura une matrice réelle v telle que $v\alpha\bar{v} = B$.*

On peut simplifier encore B_0^0. Considérons d'abord une composante de la forme X_0^0. Par des additions de multiplicateur b^{-1} on réduit (dans X_0^0) la transversale située immédiatement au-dessus de la principale à 1, 0, 1, 0, ... (en convenant d'écrire les éléments des transversales dans l'ordre où ils se présentent à partir de l'élément en haut à droite) sans autres changements. Considérons maintenant une composante de la forme χ_0^0. Si $s_i \neq 0$, par des additions de multiplicateur s_i^{-1} on ramène tous les éléments de la transversale située immédiatement au-dessus de la principale à 0, puis, par des multiplications de multiplicateur $-s_i^{-1}$ ou s_i^{-1}, tous ceux de la principale à 1 ou à -1. Si $s_i = 0$, on conservera χ_0^0. Soit B'_0 la nouvelle forme réduite obtenue. On saura former une substitution réelle U telle que $UB_0^0\bar{U} = B'_0$. Soit alors

$$B' = UB^0\bar{U} = B'_0 t + B'_1 s.$$

Si α est symétrique, la caractéristique [1] c de α_0 étant évidemment supérieure ou égale à la somme des caractéristiques des matrices composantes de B'_0, B'_0 fournit immédiatement $\left[\text{en observant que } xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right]$ l'inégalité

$$(2) \quad c \geqq \Sigma\left(\frac{\mu}{2} - 1\right) + \Sigma E\left(\frac{\mu'}{2}\right) + \frac{1}{2}\Sigma m'' + \Sigma E\left(\frac{m'}{2}\right) + \Sigma E\left(\frac{m^0 - 1}{2}\right),$$

où μ et μ' parcourent respectivement les ordres des matrices composantes des types σ et ω^0, où m'', m', m^0 parcourent respectivement les exposants des diviseurs élémentaires de α'' relatifs aux racines imaginaires, réelles $\neq 0$, nulles, où enfin $E(x)$ désigne le plus grand entier $\leqq x$.

---

[1] Si α est symétrique, on peut l'assimiler à une forme quadratique, et la caractéristique d'une forme quadratique réelle est, en supposant qu'elle se décompose en h carrés positifs et k carrés négatifs, le plus petit des deux nombres h, k. Le théorème établi au texte a été démontré autrement par M. Loewy (*Cr.*, t. 122) pour le cas $|\alpha_1| \neq 0$.

De la formule (2) multipliée par 2 et de l'égalité évidente $n = \Sigma\mu + \Sigma\mu' + \Sigma m'' + \Sigma m' + \Sigma m^0$ on déduit par soustraction, en désignant par ν le nombre des matrices composantes du type σ,

$$\begin{aligned}&\Sigma\mu' + \Sigma m' + \Sigma m^0 \\ &\quad \geqq n - 2c - 2\nu + 2\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{\mu'}{2}\right) + 2\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{m'}{2}\right) + 2\Sigma\,\mathrm{E}\left(\frac{m^0 - 1}{2}\right).\end{aligned}$$

Si donc $\nu = 0$, c'est-à-dire si $|\alpha|$ n'est pas identiquement nul, le nombre des facteurs linéaires réels de $|\alpha|$ est $\geqq n - 2c$. S'il est égal à $n - 2c$, les valeurs de μ' et celles de m' sont toutes égales à 1 et celles de m^0 à 1 ou à 2. En particulier (*pour $\alpha_0 = -\varepsilon$ d'où $c = 0$*) *les multiplicateurs d'une matrice symétrique réelle invertible* (α_1) *sont tous réels et sa forme canonique est monome.*

On peut toujours construire un faisceau symétrique réel d'ordre n $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ lorsqu'on se donne ses diviseurs élémentaires, les nombres μ, les nombres μ' et α_0, pourvu que les diviseurs élémentaires satisfassent à la condition (2), *que*

$$n - \Sigma\mu - \Sigma\mu' - \Sigma m^0$$

soit égal au rang r de α_0 et, bien entendu, que la somme des μ, des μ', des m'', des m', des m^0 soit égale à n et que les diviseurs élémentaires imaginaires soient deux à deux conjugués. Construisons, en effet, avec les éléments donnés la matrice B^0; déduisons-en comme tout à l'heure la matrice B' et désignons par m le second membre de (2). Soit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1 s$ la matrice symétrique variable qu'on déduit de B' en y changeant arbitrairement les signes des composantes. Par ces changements de signes la caractéristique de $\mathfrak{B}_0$ varie évidemment depuis le minimum m jusqu'au maximum $\mathrm{E}\left(\frac{r}{2}\right)$. La caractéristique c de α_0 étant $\geqq m$ et $\leqq \mathrm{E}\left(\frac{r}{2}\right)$, soit $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'_0 t + \mathfrak{B}'_1 s$ une détermination de $\mathfrak{B}'$ telle que $\mathfrak{B}'_0$ ait la caractéristique c. $\mathfrak{B}'_0$ ayant le rang de α_0, il y aura une substitution réelle invertible u telle que $u\alpha_0 u = \mathfrak{B}'_0$, et α_1 sera déterminée par $u\alpha_1 \overline{u} = \mathfrak{B}'_1$.

5. Considérons encore deux matrices a, b d'ordre n, telles que $a = a$ ($\dot{x}$ désignant, en général, la matrice imaginaire conjuguée

de n), $\bar b = \dot b$, $b = \xi a \eta$ ($|\xi\eta| \neq 0$). Assimilons a et b respectivement aux formes $\Sigma a_{kl} x_k y_l$ et $\Sigma b_{kl} x_k y_l$, et posons $a_{kl} = a'_{kl} + i a''_{kl}$, $b_{kl} = b'_{kl} + i b''_{kl}$, $x_k = x'_k + i x''_k$, $y_l = y'_l - i y'_l$, a'_{kl}, a''_{kl}, b'_{kl}, b''_{kl}, x'_k, $x''_k = x'_{n+k}$, y'_l et $y''_l = y'_{n+l}$ étant réels. a et b prennent les formes respectives $\alpha = \alpha' + i\alpha''$, $\beta = \beta' + i\beta''$, α' et β' étant des formes symétriques réelles et α'', β'' des formes alternées réelles des deux séries de $2n$ variables $x'_1, \ldots, x'_{2n}$; $y'_1, \ldots, y'_{2n}$. Comme on obtient b en soumettant les x et les y de a aux substitutions respectives $\bar\eta = |x_k, \Sigma \eta_{lk} x_l|$, $\xi = |y_k, \Sigma \xi_{kl} y_l|$ qui, en posant $\eta_{lk} = \eta'_{kl} + i\eta''_{kl}$, $\xi_{kl} = \xi'_{kl} + i\xi''_{kl}$ (les η', η'', ξ', ξ'' étant réels), opèrent sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$; $y'_1, \ldots, y'_{2n}$ les substitutions respectives $\bar y = \begin{pmatrix} \bar\eta' & -\bar\eta'' \\ \bar\eta'' & \bar\eta' \end{pmatrix}$, $x \begin{pmatrix} \xi' & \xi'' \\ -\xi'' & \xi' \end{pmatrix}$ [$\eta' = (\eta'_{kl})$, $\eta'' = (\eta''_{kl})$, $\xi' = (\xi'_{kl})$, $\xi'' = (\xi''_{kl})$], on aura $\beta = x\alpha y$. Disons qu'une substitution réelle de $x'_1, \ldots, x'_{2n}$, de la forme $z = \begin{pmatrix} \zeta' & -\zeta'' \\ \zeta'' & \zeta' \end{pmatrix}$ (ζ' et ζ'' étant des matrices d'ordre n), est quasi-imaginaire et correspond (biunivoquement) à la substitution $\zeta = \zeta' + i\zeta''$; $\bar z$ répond à $\bar{\dot\zeta}$ et z opère sur les x_k et les x_k les substitutions respectives ζ et $\dot\zeta$; inversement ζ comme $\dot\zeta$ opèrent sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$ la substitution z. Soient $t = \begin{pmatrix} \tau' & -\tau'' \\ \tau'' & \tau' \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} \upsilon' & -\upsilon'' \\ \upsilon'' & \upsilon' \end{pmatrix}$ deux autres substitutions quasi-imaginaires et $\tau = \tau' + i\tau''$, $\upsilon = \upsilon' + i\upsilon''$ leurs correspondantes. Comme $\tau\upsilon$ est l'action de tu sur les x_k et tu celle de $\tau\upsilon$ sur $x'_1, \ldots, x'_{2n}$, il est clair que, si $tu = z$, on a $\tau\upsilon = \zeta$ et réciproquement. En particulier, si $\tau\upsilon = \varepsilon_n$, on a $tu = \varepsilon_{2n}$ (la correspondante de ε_{2n} est évidemment ε_n); donc la correspondante de τ^{-1} est t^{-1}. Donc la matrice réelle υ telle que $\beta = v\alpha\bar v$ (3) est quasi-imaginaire, et, si son action sur les x_k est φ, son action sur les x_k est $\dot\varphi$. *Donc les relations* $b = \xi a \eta$, $\bar a = \theta \dot a$, $\bar b = \theta \dot b$ ($\theta = \pm 1$; le cas $\theta = -1$ se ramène au cas $\theta = 1$ en remplaçant a par ia et b par ib) *entraînent l'existence d'une matrice* φ, *indépendante de* a, b, *telle que* $b = \underset{\cdot}{\varphi} a \bar\varphi$.

De là résultent des conséquences toutes semblables à celles de tout à l'heure. En particulier, pour une forme a hermitienne (alors $\alpha'' = \beta'' = 0$), en observant qu'à chaque diviseur élémentaire relatif à un multiplicateur imaginaire répond un diviseur élémentaire conjugué, on obtient la même forme réduite B'_0 que tout à l'heure et, par suite, aussi l'inégalité (2) [en entendant ici par α_0, α_1, $\alpha = \alpha_0 t + \alpha_1 s$ des formes hermitiennes (1) et en remarquant que, si $X = x + y$, $Y = x - y$, $x\dot{y} + y\dot{x} = \frac{1}{2}(X\dot{X} - Y\dot{Y})$].

6. La forme canonique d'une matrice à termes constants obtenue au n° **2** fournit très aisément plusieurs propositions importantes.

Reprenons les mêmes notations qu'au début du n° **3**. Toute substitution α' permutable à la substitution α (invertible ou non, prise sous forme canonique) remplace $y_{j'1}, \ldots$ par des fonctions de la forme

$$
\begin{aligned}
&y'_{j'1} = \Sigma_1^\mu u_{j1}^{j'1} y_{j1},\\
&y'_{j'2} = \Sigma_1^\mu (u_{j1}^{j'2} y_{j1} + u_{j1}^{j'1} y_{j2}).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&y'_{j'h'} = \Sigma_1^\mu (u_{j1}^{j'h'} y_{j1} + \ldots + u_{j1}^{j'h'-h+1} y_{jh} + \ldots + u_{j1}^{j'1} y_{jh'}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad (u_{j1}^{j'h'} = 0 \quad \text{pour} \quad h' = 1, \ldots, m_{j'} - m_j, \quad \text{si} \quad m_{j'} > m_j),
\end{aligned}
$$

où μ est le nombre des suites relatives à la racine s_0.

Pour avoir une idée plus nette de la forme de α', numérotons les suites relatives à s_0 de manière que m_j soit $\geqq m_{j+1}$ (2), et soit $m_1 = m_{q_1} > m_{q_1+1} = m_{q_1+q_2} > m_{q_1+q_2+1} = \ldots = m_{q_1+\ldots+q_\omega}$ (je poserai $q_1 + \ldots + q_r = Q_r$ et $m_{Q_\omega+1} = 0$; $Q_\omega = \mu$). Il y aura donc q_r suites contenant chacune exactement m_{Q_r} variables : je dirai que ces q_r suites forment la $r^{\text{ième}}$ *sous-série*. Rangeons alors les y en prenant tous ceux de la $r^{\text{ième}}$ sous-série avant ceux de la $(r+1)^{\text{ième}}$ et, dans la $r^{\text{ième}}$ sous-série, d'abord tous les premiers de chaque

---

(1) Si $\Sigma_1^h X_i \dot{X}_i - \Sigma_1^k Y_i \dot{Y}_i$ est la forme réduite d'une forme hermitienne, le plus petit des deux nombres h, k est la *caractéristique* de cette forme. *Voir,* pour une autre démonstration (dans le cas $|\alpha_1| \neq 0$) du théorème établi au texte, Loewy, (*Cr.,* t. 122).

(2) Le nombre des $u_{jh}^{j'h'}$ non nécessairement nuls étant, pour chaque couple j, j', le plus petit $m_{jj'}$ des deux nombres m_j, $m_{j'}$, on voit alors que le nombre $\Sigma_{jj'} m_{jj'} = 2\Sigma_{j' \geqq j} m_{jj'} - \Sigma m_{jj}$ des coefficients est égal à $\Sigma(2j-1)m_j$. Ce nombre a été retrouvé sous une autre forme par M. Frobenius (*Cr.,* t. 84, p. 29) après les travaux de M. Jordan (*Traité,* p. 128-136) et indépendamment d'eux.

suite dans l'ordre de ces suites (les suites de chaque série étant rangées arbitrairement), puis tous les seconds dans l'ordre de ces suites, etc. Soit $U_{r1}^{r'h'} = (u_{j1}^{j'h'})(j = Q_{r-1}+1, \ldots, Q_r; j' = Q_{r'-1}+1, \ldots, Q_{r'})$ la matrice des coefficients de $y_{Q_{r-1}+1,1}, \ldots, y_{Q_r,1}$ dans les fonctions que α' substitue à $y_{Q_{r'-1}+1,h'}, \ldots, y_{r',h'}$, et formons la matrice de matrices $\mathfrak{V}_r^{r'}$ à $m_{Q_{r'}}$ lignes et m_{Q_r} colonnes dont la $h'^{\text{ième}}$ ligne est

$$U_{r1}^{r'h'}, \quad U_{r1}^{r'h'-1}, \quad \ldots, \quad U_{r'1}^{r'1}, \quad 0, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0.$$

La matrice de la partie de α' relative à s_0 sera $\mathfrak{V} = (\mathfrak{V}_r^{r'})$ $(r', r = 1, \ldots, \omega$; r' indiquant la ligne et r la colonne).

Remplaçons maintenant, dans α', $u_{j1}^{j'1}$ par $u_{j1}^{j'1} - s$. Soit $\Delta_r(s)$ ce que devient alors $\Delta_r = |U_{r1}^{r'1}|$ et s' une racine de $\Delta_r(s)$ (c'est une racine de $|\alpha' - s\varepsilon|$ de multiplicité $\geqq m_{Q_r}$). On voit de suite que $|\alpha' + \alpha - s\varepsilon|$ est égal à $|\alpha' + \alpha^0 - s\varepsilon|$, α^0 étant ce que devient α quand on y remplace par 0 les éléments non diagonaux. $|\alpha - (s - s_k)\varepsilon|$ ayant donc m_{Q_r} racines en s égales à $s' + s_k$, on peut, entre les racines de $|\alpha - s\varepsilon|$ que je désignerai maintenant par $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et celles $\rho'_1, \ldots, \rho'_n$ de $|\alpha' - s\varepsilon|$, établir une correspondance telle que les racines de $|\alpha' + \alpha - s\varepsilon|$ soient $\rho_i + \rho'_i$. Celles de $|x\alpha + x'\alpha' - s\varepsilon|$ seront alors $x\rho_i + x\rho'_i$.

De même, en posant $\theta = \pm 1$, $|\alpha^\theta\alpha' - s\varepsilon| = |(\alpha^0)^\theta\alpha' - s\varepsilon|$. Donc, $|\alpha' - ss_k^{-\theta}\varepsilon|$ ayant m_{Q_r} racines en s égales à $s's_k^\theta$, les racines de $|\alpha^\theta\alpha' - s\varepsilon|$ seront $\rho_i^\theta\rho'_i$, la correspondance étant la même que tout à l'heure.

On en déduit immédiatement que, $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ *étant des matrices d'ordre n, permutables deux à deux, on peut établir entre les racines* $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *de* $|\alpha - s\varepsilon|$, *celles* $\rho'_1, \ldots, \rho'_n$ *de* $|\alpha' - s\varepsilon|$, ... *une correspondance telle que, si par exemple* $\rho_i, \rho'_i, \rho''_i, \ldots$ *se correspondent, les racines de* $f(\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots)$, f *étant une fonction rationnelle, soient* $f(\rho_i, \rho'_i, \rho''_i, \ldots)$, *la correspondance étant indépendante de la fonction f choisie* (1).

Il est clair que, si $\alpha, \alpha', \ldots$ sont monomes, il en sera de même de $f(\alpha, \alpha', \ldots)$. Si de plus $\rho'_i = \rho'_k$ toutes les fois que $\rho_i = \rho_k$ et si $\varphi(x)$ est le polynome de degré $h - 1$ prenant lorsqu'on remplace

(1) Ce théorème est dû à M. Frobenius pour le cas où f est un polynome (*S. A. B.*, 1896, p. 601). M. Schur en a donné, sous la même hypothèse, une autre démonstration (*S. A. B.*, 1902, p. 120).

x par celles des ρ_i qui sont distinctes, h étant leur nombre, les valeurs correspondantes ρ'_i [alors $\varphi(\rho_i) = \rho'_i$ quelle que soit ρ_i], on a évidemment $\alpha' = \varphi(\alpha)$.

7. *La formule* (1) *met immédiatement en évidence les multiplicateurs de* $\varphi(\alpha)$. De plus, elle donne très simplement les diviseurs élémentaires de $\varphi(\alpha) - s\varepsilon$. Supposons, en effet, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{d-1}$ nuls, φ_d étant $\neq 0$. Soit $m_j = dq + r\,(0 \leqq r < d)$, et considérons $\varphi(\alpha_{ij0}) - s\varepsilon_{m_j} = \Phi$. Ajoutons la $(d+1)^e$ ligne de Φ multipliée par $-\varphi_{d+1} : \varphi_d$ à la $(d+2)^e$, puis la $(d+2)^e$ colonne multipliée par $\varphi_{d+1} : \varphi_d$ à la $(d+1)^e$: on aura ainsi remplacé par 0 l'élément φ_{d+1} de la première colonne sans que s figure hors de la diagonale principale. Par des opérations analogues, on ramène Φ à la forme qu'elle aurait pour $\varphi_{d+1} = \varphi_{d+2} = \ldots = 0$. Soit Φ' la matrice qu'on déduit alors de Φ en écrivant d'abord la première ligne, puis la $(d+1)^e$, puis la $(2d+1)^e$, ..., puis la $(qd+1)^e$, puis la 2^e, puis la $(d+2)^e$, puis la $(2d+2)^e$, ..., puis la $(qd+2)^e$, ..., puis la $(qd+r)^e$. Soit Φ'' la matrice déduite de Φ' en y prenant les colonnes dans l'ordre où l'on a pris les lignes de Φ pour obtenir Φ'. Φ'' équivaut à Φ et a la forme canonique. On y voit que $\varphi(\alpha_{ij0}) - s\varepsilon_{m_j}$ *a* r *diviseurs élémentaires de la forme* $(s-\varphi_0)^{q+1}$ *et* $d-r$ *de la forme* $(s-\varphi_0)^q$ (1). Si $(s-\varphi^0)^{m_\varphi}$ est, pour $\varphi(\alpha) - s\varepsilon$, le diviseur élémentaire d'exposant maximum relatif à la base $s - \varphi_0$, m_φ est $\leqq m_1$. Si donc le polynome $\psi(x)$ a la forme $\Pi_1^q(s-\rho_i)^{\lambda_i}$, les ρ_i étant distincts, $\varphi(\alpha)$ annulera le polynome $\Pi_1^q[s-\varphi(\rho_i)]^{\lambda_i}$.

8. $x'\alpha' + x\alpha$ (x et x' étant indéterminés) se déduit de α' en remplaçant U_{r1}^{r1} par $x'U_{r1}^{r1} + xs_0\varepsilon_{q_r}$, U_{r1}^{r2} par $x'U_{r1}^{r2} + x\varepsilon_{q_r}$ et les autres $U_{r1}^{r'i}$ par $xU_{r1}^{r'i}$, et en faisant des changements analogues dans les parties de α' relatives aux autres racines caractéristiques; $\alpha\alpha'$ se déduit de α' en remplaçant $U_{r1}^{r'1}$ par $s_0U_{r1}^{r'1}$, $U_{r1}^{r'i}$ pour $i>1$ par $s_0U_{r1}^{r'i} + U_{r1}^{r'i-1}$, et en faisant des changements analogues dans les autres parties de α'.

On peut maintenant canoniser U_{r1}^{r1} en transformant α' par une

(1) Ce théorème a été établi autrement par M. Bromwich [*P. C. P. S.*, t. XI, p. 75 (1901)].

substitution permutable à α. Supposons cette transformation effectuée. Écrivons ρ_1 pour s_0, et soit ρ'_1 un multiplicateur de U^{r1}_{r1}. Soient $(\rho'_1 - s)^{m'_1}$, ζ^{μ_1} les premiers diviseurs élémentaires respectifs de $\alpha' - s\varepsilon$, $x'\alpha' + x\alpha = s\varepsilon$ relativement aux bases $\rho'_1 - s$, $x'\rho'_1 + x\rho_1 - s = \zeta$, et supposons $m'_1 \geqq m_1$; μ_1 est une fonction de x et de x' dont je désignerai le maximum par μ^0_1. Soit y'_{jh} la fonction que $x'\alpha' + x\alpha - s\varepsilon$ substitue à y_{jh}, et résolvons directement par rapport aux y_{jh} les équations qui les lient aux y'_{jh}. On peut évidemment exprimer d'abord directement et immédiatement les y_{jh} où $Q_{r-1} < j \leqq Q_r$, h étant fixe, par les y'_{jh} de mêmes indices, les $y_{j'h'}$ où $j' \leqq Q_r$ avec $h' \leqq h$ et les $y_{j'h'}$ où $Q_{r-1} < j' \leqq Q_r$ avec $h' < h$: je dirai que c'est la *première expression* de ces y_{jh}. Formons la première expression des y_{j1}, puis celle des $y_{j2}, \ldots$, en prenant, pour chaque valeur de h, d'abord la première expression des y_{jh} où $j \leqq Q_1$, puis celle des y_{jh} où $Q_1 < j \leqq Q_2, \ldots$. En substituant chacune de ces premières expressions dans les suivantes, la résolution sera achevée et elle fournira μ^0_1.

Pour indiquer la marche des calculs, commençons à former la première expression des y_{jh} où $Q_{r-1} < j \leqq Q_r$. Soit e_r l'exposant du premier diviseur élémentaire de $U^{r1}_{r1} - s\varepsilon_{q_r}$ relatif à ρ'_1. Écrivons z_{jh}, z'_{jh}, $\upsilon^{j'h'}_{jh}$ pour $y_{Q_{r-1}+j,h}$, $y'_{Q_{r-1}+j,h}$, $x' u^{Q_{r-1}+j',h'}_{Q_{r-1}+j,h} + x\varepsilon^{i'h'}_{ih}$ ($\varepsilon^{j2}_{j1} = 1$, tous les autres ε étant nuls). Le coefficient de z'_{11} est ζ^{-1} dans z_{11}, $-x'\zeta^{-2}$ dans $z_{21}, \ldots, (-x')^{e_r-1}\zeta^{-e_r}$ dans z_{e_r1}. Si $\upsilon^{12}_{e_r1} \neq 0$, il est $(-x')^{e_r}\zeta^{-e_r-1}\upsilon^{12}_{e_r1}$ dans $z_{12}, \ldots, (-x')^{2e_r-1}\zeta^{-2e_r}\upsilon^{12}_{e_r1}$ dans z_{e_r2}. Soit généralement k_r le plus petit nombre pour lequel, dans la matrice formée des e_r premières lignes et colonnes de la matrice des $\upsilon^{j'2}_{j1}$, la diagonale qui contient $\upsilon^{k_r2}_{e_r2}$ a un élément $\upsilon \neq 0$ (υ^{12}_{11} est $\neq 0$; donc $k_r \leqq e_r$); le coefficient de z'_{11} dans z_{e_r2} est $(-x')^{2e_r-k_r}\zeta^{-2e_r+k_r-1}\upsilon$ $\ldots$, dans $z_{e_rm_{Q_r}}$ il sera, en posant $m_{Q_r}e_r - (m_{Q_r} - 1)(k_r - 1) = E_r$, $(-x')^{E_r-1}\zeta^{-E_r}\upsilon$. Supposons les suites relatives à ρ'_1 dans U^{r1}_{r1} (considérée comme une substitution) rangées dans un ordre tel que E_r n'aille jamais en décroissant. Si ρ'_1 n'est multiplicateur que d'un seul U^{r1}_{r1} (que je désignerai par U^{r1}_{r1}), $-E_r$ sera la plus basse puissance de ζ figurant dans les coefficients, c'est-à-dire que $\mu^0_1 = E_r$: si alors $k_r < e_r$, il est clair que $\mu^0_1 = m'_1$; si $k_r = e_r$, $\mu^0_1 = m_{Q_r} + e_r - 1$, et la méthode précédente montre (en faisant $x = n$) que $m'_1 = e_r$ pour $u^{Q_{r-1}+1,2}_{Q_{r-1}+1,1} = 0$, et que $m'_1 = m_{Q_r} + e_r - 1$, pour $u^{\mathrm{Q}_{r-1}+1,2}_{\mathrm{Q}_{r-1}+1,1} \neq 0$. Si ρ'_1 est multiplicateur de plusieurs U^{r1}_{r1}, on peut employer la même méthode; mais la présence des $\mathfrak{V}^i_r$ correspondant à ces U^{r1}_{r1} oblige à une discussion plus compliquée, si l'on veut obtenir μ^0_1. Il suffira d'observer que μ^0_1 *est toujours* $\geqq m'_1$: on le voit de suite en continuant les mêmes calculs et en les faisant parallèlement pour le cas $x = 0$.

En faisant parallèlement sur $\alpha^\theta\alpha' - s\varepsilon (\theta = \pm 1)$ les mêmes opérations que sur $x'\alpha' + x\alpha - s\varepsilon$, et en observant que les diagonales analogues à celle considérée tout à l'heure ne renferment plus le paramètre variable x, on voit de suite que *le premier diviseur élémentaire de* $\alpha^\theta\alpha' - s\varepsilon$ *relatif à la base* $\rho^\theta_1\rho'_1 - s$ *a un exposant* $\leqq \mu^0_1$.

On déduit aisément de là que *le premier diviseur élémentaire relatif à la base* $f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)$ *dans* $f(\alpha, \alpha', \ldots) - s\varepsilon$, *f étant une fonction rationnelle, a un exposant* $\mu_{f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)}$ *au plus égal à* $\mu_{x\rho_i + x'\rho'_i + \ldots}$, *si les x restent arbitraires.* Il suffit évidemment de l'établir pour $f(\alpha, \ldots) = a\alpha'' + b\alpha\alpha'$ (a et b étant $\neq 0$). Or, si [en disant pour abréger que $\mu_{f(\rho_i, \ldots)}$ est *l'exposant* de $f(\alpha, \ldots)$] l'exposant de $a\alpha'' + b\alpha\alpha'$ était supérieur à celui de $x''\alpha'' + x'\alpha' + x\alpha$, celui de la combinaison linéaire $x''b\alpha\alpha' - a(x'\alpha' + x\alpha)$ de ces deux matrices serait supérieur à celui de $x'\alpha' + x\alpha$ (qui est au plus égal à celui de $x''\alpha'' + x'\alpha' + a\alpha$). Donc celui de la combinaison linéaire (à coefficients $\neq 0$) $x''b\alpha\alpha'$ de ces deux dernières matrices serait supérieur à celui de $x'\alpha' + x\alpha$, ce qui ne se peut. *Si donc le polynome de moindre degré annulé par* $x\alpha + x'\alpha' + \ldots$ *est* $\Pi^q_1(s - x\rho_i + x'\rho'_i + \ldots)^{\lambda_i}$, *les* $x\rho_i + x'\rho'_i, \ldots$ *désignant ici des racines distinctes,* $f(\alpha, \alpha', \ldots)$ *annulera* $\Pi^q_1[s - f(\rho_i, \rho'_i, \ldots)^{\lambda_i}]$[1].

9. Voici quelques applications des théorèmes établis aux n^os 6-8. Soit α une matrice alternée d'ordre n. $\bar{\alpha} = -\alpha$ est permutable à α. Soit $\bar{\rho}_i$ le multiplicateur de $\bar{\alpha}$ qui *correspond* au multiplicateur ρ_i de α. Les multiplicateurs $\rho_i + \bar{\rho}_i$ de $\alpha + \bar{\alpha} = 0$ sont nuls. Donc les multiplicateurs de α (qui sont ceux de $\bar{\alpha}$) sont deux à deux égaux et de signes contraires. Si donc α est réelle, ils sont ou réels ou

(1) Ce théorème a été établi nettement par M. Schur pour le cas où f est un polynome (*S. A. B.*, 1902, p. 120-125).

purement imaginaires ; comme $|s\varepsilon - \alpha|$ est alors de la forme $\Sigma c_i s^{n-2i}\left[i = 0, \ldots, \mathrm{E}\left(\frac{n}{2}\right);\ c_0 = 1\right]$, tous les coefficients étant positifs (d'après les propriétés connues des déterminants gauches), ils ne peuvent être réels $\neq 0$; *ils sont donc purement imaginaires ou nuls.*

Avant de compléter ce résultat, considérons encore une matrice orthogonale α d'ordre n. $\bar{\alpha} = \alpha^{-1}$ est permutable à α, et les multiplicateurs de $\alpha^{-1} = \bar{\alpha}$ coïncident avec ceux de α. Soit $\bar{\rho}_i$ le multiplicateur de $\bar{\alpha}$ qui correspond au multiplicateur ρ_i de α. Les multiplicateurs de $\bar{\alpha}\alpha = \varepsilon$ sont $\bar{\rho}_i\rho_i = 1$. Donc $\bar{\rho}_i = \rho_i^{-1}$, et les multiplicateurs de $\alpha + \theta\bar{\alpha}(\theta = \pm 1)$ sont $\rho_i + \theta\rho_i^{-1}$. Mais $\alpha + \bar{\alpha}$ est symétrique et $\alpha - \bar{\alpha}$ alternée. Si donc α est réelle, $\rho_i + \rho_i^{-1}$ est réel (4), et $\rho_i - \rho_i^{-1}$ a sa partie réelle nulle. *Donc* $|\rho_i| = 1$. Soit $\mathrm{A} = \xi\alpha\xi^{-1}$ la forme canonique de α et $\mathrm{A}' = \xi\bar{\alpha}\xi^{-1}$. A' est permutable à A, et l'équation $\mathrm{AA}' = \varepsilon$ montre, d'après la forme générale des matières permutables à A (6), que A *est monome.*

Revenons maintenant au cas d'une matrice α alternée, réelle, d'ordre n. On voit directement que $\beta = \frac{\alpha - \varepsilon}{\alpha + \varepsilon}$ est orthogonale et réelle ($|\alpha + \varepsilon|$ est $\neq 0$). Or la fonction $\varphi(x) = \frac{x-1}{x+1}$ est régulière et $\neq 0$ ainsi que $\varphi'(x)$ aux environs des racines (toutes imaginaires ou nulles) de $|\alpha - s\varepsilon|$. Donc les diviseurs élémentaires de $\beta = \varphi(\alpha)$ ont les mêmes exposants que ceux de α (7). *Donc les diviseurs élémentaires de α sont simples.*

10. Soit $a_h(h = 1, 2, \ldots;\ a_1 = a)$ une matrice d'ordre n. Formons les $\binom{n}{r} = \mathrm{N}$ combinaisons de n objets r à r, et numérotons-les dans un ordre quelconque (indépendant de ces objets). Soit A_{ik}^h le déterminant des éléments communs à la $i^{\text{ième}}$ combinaison des lignes et à la $k^{\text{ième}}$ combinaison des colonnes de a_h, et $\mathrm{A}_h(\mathrm{A}_1 = \mathrm{A})$ la matrice des A_{ik}^n. Les multiplicateurs de A_h sont évidemment indépendants de l'ordre des combinaisons adopté.

Si les éléments de a situés au-dessus de la diagonale sont nuls, il en sera de même dans A à la seule condition de ranger les combinaisons $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$ de r lignes ou de r colonnes ($\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ désignant les rangs de ces lignes ou de ces colonnes) dans l'ordre de grandeur des nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ lorsqu'on regarde $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ comme des chiffres dans un système de numération de base $> n$, en convenant de prendre toujours $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_r$ (*nous adopterons désormais cet ordre*). En effet, considérons $A_{ik} (i < k)$. Soient $\alpha_1 \ldots \alpha_r$ l'écriture de i dans le système de numération choisi et $\beta_1 \ldots \beta_r$ celle de k; si $\alpha_1 < \beta_1$, la première ligne de A_{ik} est nulle; si $\alpha_t = \beta_t$ pour $t = 1, \ldots, \rho$ et $\alpha_{\rho+1} < \beta_{\rho+1}$, la matrice des éléments de A_{ik} communs aux lignes de rangs $1, \ldots, \rho + 1$ et aux colonnes de rangs $\rho + 1, \ldots, r$ est nulle, en sorte que tous les mineurs d'ordre $r - \rho$ que l'on peut former dans ces $r - \rho$ dernières colonnes sont nuls. Si par exemple a a la forme canonique, les multiplicateurs de A sont évidemment les produits r à r des n multiplicateurs (distincts ou non) de a. Si $a = \varepsilon_n$, il est clair que $A = \varepsilon_N$.

Si $a_1 a_2 = a_3$, on aura, d'après un théorème connu de Cauchy et Binet sur les déterminants $A_1 A_2 = A_3$ et, si $a_2 = a^{-1}$ (donc $A_3 = \varepsilon_N$), $A_2 = A^{-1}$. Si donc $a_2 = a_3^{-1} a a_3$, on a $A_2 = A_3^{-1} A A_3$. En supposant que a_2 est la forme canonique de a_1, on voit donc que *les multiplicateurs de* A *sont les produits r à r des n multiplicateurs* (*distincts ou non*) *de a* [1].

---

(1) Ce théorème est dû à M. Rados, qui l'a établi autrement (*M. A.*, t. XLVIII, p. 417; 1897). *Cf.* Stéphanos (*J. M.*, 1900, p. 73).