BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DULAC

Remarque sur les conditions nécessaires pour qu'une équation différentielle ait ses points critiques fixes

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 126-128

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__126_1>

REMARQUE SUR LES CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR QU'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AIT SES POINTS CRITIQUES FIXES;

PAR M. HENRI DULAC.

Les raisonnements par lesquels on établit les conditions pour qu'une équation différentielle du premier ordre n'ait pas de points critiques mobiles présentent une lacune qui pourrait faire craindre que, dans certains cas particuliers, les conditions habituellement énoncées ne soient pas nécessaires. Considérons l'équation $F(y', y, x) = 0$, algébrique en y' et y. Supposons que pour $y = g(x)$ plusieurs valeurs de y' deviennent égales. Soit

$$z = y - g(x).$$

Plusieurs valeurs de z' deviennent égales pour $z = 0$. Supposons que ν de ces valeurs se permutent entre elles, lorsqu'on tourne autour de $z = 0$. Si nous posons $z = Z^\nu$, nous aurons

$$\nu Z^{\nu-1} Z' = A_s(x) Z^s + A_{s+1}(x) Z^{s+1} + \ldots; \tag{1}$$

s est un entier positif, négatif ou nul, les $A(x)$ sont des fonctions que nous pouvons supposer holomorphes dans le voisinage d'une valeur $x = a$. Supposons qu'on ait $q = \nu - s - 1 > 0$. L'intégrale $Z(x)$, qui pour $x = x_0$ prend la valeur $Z = 0$, est une fonction algébroïde de x à $q + 1$ valeurs. On en conclut [1] qu'il en

[1] FUCHS, *Berlin. Berichte*, t. XXXII, 1884, p. 703. — HAMBURGER, *Journal de Crelle*, t. 112, 1893, p. 212-216. — PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 54.

est de même pour $z = Z^\nu$. Cette conclusion peut être fausse dans certains cas. Si nous considérons par exemple l'équation

$$z' = 2z^{\frac{2}{4}} + xz^{\frac{3}{4}} - z^{\frac{5}{4}},$$

pour laquelle on a $\nu = 4$, $s = 2$, $q = 1$, on vérifie facilement que l'intégrale $z = x^2$ est la seule intégrale $z(x)$ nulle pour $x = 0$; c'est une fonction holomorphe et non une fonction algébroïde à deux valeurs.

Je vais montrer que cette circonstance exceptionnelle ne peut se présenter que pour des valeurs isolées et fixes de x_0. L'existence de pareilles valeurs de x_0, pour lesquelles les raisonnements habituels sont en défaut, ne changera donc rien aux conditions nécessaires pour que l'équation n'ait pas de points critiques mobiles : il faut qu'on ait $s \geqq \nu - 1$. Pour établir la conclusion que j'ai en vue, on peut, en considérant le développement fourni par l'équation (1),

$$Z = c_1(x - x_0)^{\frac{1}{q+1}} + c_2(x - x_0)^{\frac{2}{q+1}} + \ldots,$$

chercher à reconnaître dans quel cas, contrairement à l'affirmation de Fuchs et de M. Hamburger, $z = Z^\nu$ est une fonction à moins de $q + 1$ déterminations. Cette façon de procéder présente quelques longueurs. Il nous sera plus commode de développer le raisonnement par lequel M. Painlevé (passage cité) démontre qu'en général z est une fonction à $q + 1$ déterminations.

Nous pouvons écrire l'équation (1) sous la forme

$$(2) \quad z' = B_0(x, z) + B_1(x, z)Z + B_2(x, z)Z^2 + \ldots + B_{\nu-1}(x, z)Z^{\nu-1},$$

en posant

$$(3) \qquad z = Z^\nu;$$

$B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}$ sont des fonctions holomorphes pour $x = a$, $y = 0$. En général, à chacune des valeurs de Z vérifiant l'équation (3) correspond d'après (2) une valeur distincte de z'. Par suite, Z s'exprime en fonction rationnelle de z' et des coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_{\nu-1}$. Il est donc impossible que z soit une fonction ayant moins de $q + 1$ déterminations, si Z est une fonction à $q + 1$ déterminations. Ce raisonnement ne serait jamais en défaut, si l'on n'était pas obligé de considérer z comme une foncti on de x

En effet, si, laissant x fixe, on fait tourner z autour de $z = 0$, l'équation (2) fournit par hypothèse ν valeurs distinctes de z' correspondant aux ν valeurs distinctes que prend Z. Mais nous ne pouvons raisonner ainsi; nous devons considérer z comme une fonction de x et il peut se faire que cette fonction soit telle que pour chaque valeur de x et pour les valeurs correspondantes de z et z' les équations (2) et (3) aient plusieurs racines communes. Dans ce cas, z pourra avoir moins de $q+1$ valeurs, alors que Z en a $q+1$.

Remarquons maintenant que si, dans (2), z' reprend la même valeur pour deux valeurs Z et ωZ, racines de l'équation (3) (ω est une racine d'ordre ν de l'unité), on aura

$$(\omega-1)B_1(x, Z^\nu)Z + (\omega^2-1)B_2(x, Z^\nu)Z^2 + \ldots + (\omega^{\nu-1}-1)B_{\nu-1}(x, Z^\nu)Z^{\nu-1} = 0.$$

Le premier membre de cette expression est divisible par $\omega - 1$ et par une certaine puissance de Z; une fois la division effectuée, nous obtenons

$$C_0(x) + Z\,C_1(x) + Z^2\,C_2(x) + \ldots = 0.$$

Le premier membre de cette relation est une série ordonnée suivant les puissances de Z; les coefficients C_0, C_1, ... sont des fonctions connues de x, holomorphes pour $x = a$. Cette relation ne peut être vérifiée par une fonction $Z(x)$ nulle pour $x = x_0$ que si l'on a $C_0(x_0) = 0$.

Ce n'est donc que pour des valeurs fixes de x_0, vérifiant la relation $C_0(x_0) = 0$, que z peut avoir moins de $q+1$ déterminations tandis que Z en a $q+1$. En particulier, ce n'est que pour des valeurs fixes x_0 que l'intégrale $z(x)$, prenant pour $x = x_0$ la valeur $z = 0$, peut être uniforme pour $x = x_0$, si l'on n'a pas $s \geqq \nu - 1$.