BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Démonstration élémentaire d'un théorème de Weierstrass

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 209-215

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__209_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE D'UN THÉORÈME DE WEIERSTRASS;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Le théorème dont il s'agit, qui est aujourd'hui classique, s'énonce ainsi : *Si* $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$ *est une série entière en* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, *convergente tant que les modules des variables restent plus petits que des nombres positifs* $r_1, r_2, \ldots, r_p, \rho$, *et si le développement de* $F(0, 0, \ldots, 0, y)$ *commence par un terme de degré* n *en* y $(n > 0)$, *on a identiquement*

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)\\ &\quad = (y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_{n-1} y + a_n)\,\Phi(x_1, \ldots, x_p, y), \end{aligned}\right.$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ *étant des séries entières en* $x_1, \ldots, x_p$, *qui s'annulent pour* $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, *et* Φ *une série entière en* $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, *avec un terme constant différent de zéro.*

On trouve la démonstration de ce théorème, que Weierstrass donnait dans son enseignement depuis 1860, dans le Tome II des *Mathematische Werke von Karl Weierstrass* (p. 135). On peut aussi le déduire des théorèmes généraux de Cauchy ([1]). Ces deux démonstrations font appel à des notions assez élevées de la théorie des fonctions analytiques, tandis que le théorème est en lui-même d'une nature élémentaire. La démonstration ci-dessous ne s'appuie que sur les propriétés les plus simples des séries entières.

2. Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

LEMME. — *Soit* $F(y)$ *une série entière*

$$(1)\qquad F(y) = A_0 + A_1 y + \ldots + A_n y^n + \ldots,$$

([1]) *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, 2e édition, p. 263) ou le Tome II de mon *Cours d'Analyse* (p. 284).

dont les coefficients sont des nombres réels et positifs, et qui est convergente pourvu qu'on ait $|y| \leqq \rho$, *le nombre* ρ *étant lui-même positif.*

Imaginons qu'on remplace dans cette série $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ *par les polynomes de degré* $(n-1)$ *en* y *qu'on déduit de la relation*

$$(2) \qquad y^n = \mu_0 + \mu_1 y + \ldots + \mu_{n-1} y^{n-1},$$

où $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ *sont des paramètres. Le résultat de la substitution est un polynome de degré* $n-1$ *en* y, *dont les coefficients sont des séries entières en* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ *qui ont des rayons de convergence différents de zéro.*

De l'équation (2) on déduit, en effet,

$$(3) \qquad y^{n+p} = \mu_0 y^p + \mu_1 y^{p+1} + \ldots + \mu_{n-1} y^{n+p-1};$$

si l'on pose pour un moment $y^m = u_m$, on a une relation de récurrence

$$(4) \qquad u_{n+p} = \mu_0 u_p + \mu_1 u_{p+1} + \ldots + \mu_{n-1} u_{n+p-1} \qquad (p = 0, 1, 2 \ldots)$$

permettant d'exprimer $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+p}, \ldots$ au moyen de u_0, $u_1, \ldots, u_{n-1}$. Soit

$$(5) \qquad u_{n+p} = \varphi_0^p u_0 + \varphi_1^p u_1 + \ldots + \varphi_{n-1}^p u_{n-1}$$

la formule qui donne u_{n+p} en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; il est clair que $\varphi_0^p, \varphi_1^p, \ldots, \varphi_{n-1}^p$ sont des polynomes en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ dont tous les coefficients sont des nombres entiers positifs.

Il suffit de remplacer dans cette relation u_i par y^i pour avoir l'expression générale de y^{n+p} au moyen de $y, y^2, \ldots, y^{n-1}$:

$$(6) \qquad y^{n+p} = \varphi_0^p + \varphi_1^p y + \ldots + \varphi_{n-1}^p y^{n-1}.$$

En remplaçant $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ par leurs expressions dans la série donnée $F(y)$, on obtient un polynome de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients sont des séries entières par rapport aux paramètres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, tous les coefficients de ces séries étant des nombres positifs. Pour prouver que ces séries ont des rayons de convergence non nuls, il suffit de montrer qu'elles sont convergentes quand on prend pour $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des valeurs positives inférieures à un nombre positif r convenablement choisi.

Soient $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines supposées distinctes de l'équation

$$(7) \qquad r^n = \mu_0 + \mu_1 r + \ldots + \mu_{n-1} r^{n-1};$$

la solution générale de la relation de récurrence (4) est, comme il est bien connu,

$$u_m = C_1(r_1)^m + C_2(r_2)^m + \ldots + C_n(r_n)^m,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ étant des coefficients arbitraires. Pour en déduire l'expression générale de y^m en fonction de $y^0, y, y^2, \ldots, y^{n-1}$, il suffira de choisir les n coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de façon qu'on ait

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = y, \qquad u_2 = y^2, \qquad \ldots, \qquad u_{n-1} = y^{n-1},$$

et l'on obtient finalement

$$y^m = P_1(y) r_1^m + P_2(y) r_2^m + \ldots + P_n(y) r_n^m \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$P_1(y), P_2(y), \ldots, P_n(y)$ étant des polynomes de degré $(n-1)$ à coefficients constants. En remplaçant toutes les puissances de y par les expressions correspondantes dans la série $F(y)$, le résultat de cette substitution est un polynome de degré $(n-1)$

$$F(r_1) P_1(y) + F(r_2) P_2(y) + \ldots + F(r_n) P_n(y).$$

Les coefficients de ce polynome seront représentés par des séries convergentes, pourvu que $|r_1|, |r_2|, \ldots, |r_n|$ soient inférieurs à ρ. Or, lorsque les paramètres $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ tendent vers zéro, les n racines de l'équation (7) tendent aussi vers zéro. Soit r un nombre positif tel que les modules des n racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ soient inférieurs à ρ lorsque les modules de $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont plus petits que r. Si l'on prend pour $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ des nombres positifs inférieurs à r, on voit que les séries entières en $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, qu'on obtient par la substitution précédente dans la série (1), seront convergentes. C. Q. F. D.

Si l'équation (7) avait une racine multiple r_1, dans l'expression générale de y^m, il entrerait des termes en $m r_1^m, m^2 r_1^m, \ldots$, mais la conclusion ne serait pas modifiée.

Il est possible de généraliser ce résultat. Considérons une série entière à $p+1$ variables $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$, admettant des rayons de convergence différents de zéro. Si l'on effectue les mêmes substitutions que dans le cas particulier précédent, on obtient encore un polynome de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p$; μ_0, $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$, et tous les coefficients de ces séries se déduisent par des additions et des multiplications seulement des coefficients de la série $F(x_1, \ldots, x_p, y)$.

Pour démontrer leur convergence, on peut donc remplacer cette série F par une série majorante telle que

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = \frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)\left(1-\frac{x_2}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x_p}{a_p}\right)\left(1-\frac{y}{\rho}\right)}.$$

Or, si l'on effectue dans cette série auxiliaire les mêmes substitutions, le coefficient de y^{n-i} dans le résultat est égal au produit du facteur

$$\frac{M}{\left(1-\frac{x_1}{a_1}\right)\cdots\left(1-\frac{x_p}{a_p}\right)}$$

par le coefficient de y^{n-i} dans le polynome obtenu en effectuant ces substitutions dans la série

$$\frac{1}{1-\frac{y}{\rho}} = 1 + \frac{y}{\rho} + \ldots + \frac{y^n}{\rho^n} + \ldots.$$

La substitution est donc légitime, quelle que soit la série entière $F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y)$, pourvu qu'elle ait des rayons de convergence différents de zéro, et que les modules de $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ soient suffisamment petits.

Si $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1}$ sont remplacés par des séries entières en y_1, $y_2, \ldots, y_q$, s'annulant pour $y_1 = y_2 = \ldots = y_q = 0$, et admettant des rayons de convergence non nuls, on sait, d'après les propriétés générales des séries entières, qu'on pourra aussi ordonner le résultat suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q$. On peut d'ailleurs supposer que quelques-unes des variables y_i sont comprises parmi les variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

3. Considérons maintenant l'équation

(8) $y^n = \varphi_0(x_1, x_2, \ldots, x_p) + y\varphi_1 + \ldots + y^n\varphi_n + y^{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots,$

dont le second membre est une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, admettant des rayons de convergence différents de zéro, qu'on écrit en l'ordonnant par rapport aux puissances croissantes de y. On suppose, de plus, que les $(n+1)$ fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont nulles pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$. Dans ces conditions, cherchons à déterminer n coefficients $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, tels qu'en posant

$$y^n = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1}, \tag{9}$$

puis en remplaçant $y^n, y^{n+1}, y^{n+2}, \ldots$ par leurs expressions au moyen de $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, y, \ldots, y^{n-1}$ déduites de la relation (9), dans les deux membres de l'équation (8), on obtienne deux polynomes de degré $(n-1)$ en y dont les coefficients soient identiques.

De la relation (9) on déduit successivement

$$\begin{aligned} y^{n+1} &= u_0 y + u_1 y^2 + \ldots + u_{n-2} y^{n-1} + \ldots, \\ y^{n+2} &= u_0 y^2 + u_1 y^3 + \ldots + u_{n-3} y^{n-1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y^{2n-1} &= u_0 y^{n-1} + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant au moins du second degré par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$; quant à $y^{2n}, y^{2n+1}, \ldots$, ils s'expriment par des polynomes dont les coefficients sont au moins du second degré par rapport à $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. En substituant dans les deux membres de l'équation (9), on a, pour déterminer $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, les n équations

$$\left\{ \begin{aligned} u_0 &= \varphi_0 + u_0\varphi_n + \ldots, \\ u_1 &= \varphi_1 + u_1\varphi_n + u_0\varphi_{n+1} + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_{n-1} &= \varphi_{n-1} + u_{n-1}\varphi_n + u_{n-2}\varphi_{n+1} + \ldots + u_0\varphi_{2n-1} + \ldots, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

les termes non écrits étant des séries entières en $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, dont tous les termes sont au moins du second degré en $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. A ce système (10) on peut appliquer le théorème général sur les fonctions implicites [1]. Pour $x_1 = \ldots = x_p = 0$, ce système admet les solutions $u_0 = 0, \ldots, u_{n-1} = 0$, et la valeur correspondante du déterminant fonctionnel est égale à l'unité. On en déduira donc pour $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ des séries entières ordonnées suivant les puissances de $x_1, x_2, \ldots, x_p$, s'annulant pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$, et satisfaisant *formellement* aux équations (10).

Ces séries sont convergentes pourvu que les modules des variables x_i soient plus petits qu'un nombre positif ρ choisi convenablement. En effet, il résulte des lemmes précédents que les seconds membres des équations (10) sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, qui admettent des rayons de convergence différents de zéro. Il en sera donc de même, d'après le théorème général sur les fonctions implicites, des séries entières $u_0(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots, u_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, obtenues par la résolution formelle des équations (10).

La démonstration du théorème de Weierstrass est maintenant bien facile. Soit

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) = 0 \tag{11}$$

une équation dont le premier membre est une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, avec des rayons de convergence différents de zéro, telle qu'on ait

$$F(0, 0, \ldots, 0, y) = A_n y^n + A_{n+1} y^{n+1} + \ldots,$$

le coefficient A_n *étant différent de zéro.* En divisant par ce coefficient, l'équation (11) peut se mettre sous la forme (8), ou, ce qui revient au même, on peut écrire

$$F(x_1, \ldots, x_p, y) = y^n - \varphi_0 - \varphi_1 y - \ldots - \varphi_n y^n - \varphi_{n+1} y^{n+1} \ldots. \tag{12}$$

Ayant déterminé les séries $u_0(x_1, \ldots, x_p), \ldots, u_{n-1}(x_1, \ldots, x_p)$ comme il vient d'être expliqué, posons

$$y^n = u_0 + u_1 y + \ldots + u_{n-1} y^{n-1} + v, \tag{13}$$

v étant une variable auxiliaire, et remplaçons, dans F, y^n, y^{n+1},

---

[1] *Voir*, par exemple, le Tome I de mon *Cours d'Analyse* (p. 450).

y^{n+2}, ... par leurs expressions déduites de la relation (13). Le résultat de cette substitution est un polynome de degré $n-1$ en y, dont les coefficients sont des séries entières en $x_1, x_2, \ldots, x_p, v$, admettant des rayons de convergence non nuls,

$$Q_0(x_1, \ldots, x_p, v) + Q_1 y + \ldots + Q_{n-1} y^{n-1}.$$

D'après la façon dont on a déterminé $u_0, \ldots, u_{n-1}$, toutes ces séries s'annulent pour $v=0$, quelles que soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$. On peut donc encore écrire le résultat de cette substitution

$$v\,R(x_1, x_2, \ldots, x_p, v),$$

R étant une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, v$ dont les coefficients sont des polynomes en y de degré $n-1$ au plus. Si l'on remplace, dans vR, v par $y^n - u_0 - u_1 y - \ldots - u_{n-1} y^{n-1}$, cela revient à faire la substitution inverse de celle qui conduit de F à vR. On retombera donc sur la fonction F elle-même; mais $R(x_1, x_2, \ldots, x_p, v)$ se change en une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$. Par suite, on a identiquement

$$\begin{aligned} &F(x_1, x_2, \ldots, x_p, y) \\ &\quad = (y^n - u_0 - u_1 y - \ldots - u_{n-1} y^{n-1})\, S(x_1, x_2, \ldots, x_p, y), \end{aligned}$$

S désignant une série entière en $x_1, x_2, \ldots, x_p, y$, avec des rayons de convergence différents de zéro. Le coefficient de y^n dans $F(0, 0, \ldots, 0, y)$ étant égal à 1, il est clair que le terme constant dans S est égal aussi à l'unité.

La démonstration précédente montre comment l'on doit calculer les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ du polynome de degré n en y qui figure dans l'identité (I). On les obtient par la résolution d'un système de n équations simultanées de la forme (10); ces équations permettent de calculer de proche en proche autant de termes qu'on voudra des développements en séries de ces fonctions.