H. DULAC

Sur les intégrales passant par un point singulier d'une équation différentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 36 (1908), p. 216-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1908__36__216_0>

SUR LES INTÉGRALES PASSANT PAR UN POINT SINGULIER D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. HENRI DULAC.

1. *Résumé et introduction.* — Si, étant donnée l'équation différentielle

$$(1) \qquad Y(x, y)\,dy + X(x, y)\,dx = 0,$$

où X et Y sont des fonctions de x et y holomorphes et nulles pour $x = 0$, $y = 0$, nous posons

$$y = tx^{\nu},$$

ν étant un exposant positif rationnel ou irrationnel, nous obtenons en général (¹) l'équation

$$(2) \qquad x(at^{q-1} + \ldots)\,dt + (bt^{q} + \ldots)\,dx = 0,$$

où les termes non écrits sont nuls pour $x = 0$; a et b sont deux constantes dont l'une peut être nulle; q est un entier positif. Nous obtenons *toujours* une équation de cette forme dans le cas, que nous voulons examiner particulièrement, où ν *est un nombre irrationnel.* Considérant les intégrales $y(x)$ de l'équation (1) et supposant que x tende vers zéro, en variant dans le champ complexe, je démontre les deux théorèmes suivants :

I. *Si, comme cela a lieu en général, on a* $b \neq 0$ *et si* t *tend vers une limite, cette limite est nulle ou infinie.*

II. *Si l'on a* $b = 0$, t *tend nécessairement vers une limite lorsque* x *tend vers zéro.*

J'emploierai pour la démonstration de ces théorèmes deux formes de l'intégrale générale de (2) qui pourraient être utiles dans d'autres cas.

Les deux théorèmes énoncés sont des conséquences immédiates des théorèmes généraux relatifs aux équations différentielles,

---

(¹) Il en est toujours ainsi lorsque ν n'est la pente d'aucun côté du polygone figuratif.

lorsque ν est un nombre entier. Le premier résulte de ce que l'équation (2) n'a pas d'autre intégrale que $x = 0$, répondant aux conditions initiales $x = 0$, $t = t_0$, t_0 n'étant ni nul ni infini. Le second théorème résulte du théorème de M. Painlevé. Ces démonstrations s'étendent au cas où ν est rationnel $\left(\nu = \frac{p}{q}\right)$; en remplaçant x par x^q, on est ramené au cas de ν entier. Certaines des démonstrations qu'on peut donner du théorème I, dans le cas où ν est entier, s'étendent au cas où ν est irrationnel, mais les démonstrations données du théorème de M. Painlevé ne permettent pas de démontrer le théorème II.

Le théorème I a été fréquemment employé dans la recherche des intégrales passant par le point singulier $x = 0$, $y = 0$, sans qu'on se soit, me semble-t-il, beaucoup demandé si l'on en possédait une démonstration rigoureuse valable dans tous les cas.

Nous considérerons *exclusivement* dans nos démonstrations le cas où ν est irrationnel. On verra facilement les simplifications qu'elles comporteraient si ν était rationnel.

2. *Forme de l'équation différentielle* (2). — L'équation (1) peut s'écrire

$$dy \Sigma A_{pq} x^{p+1} y^{q-1} + dx \Sigma B_{pq} x^p y^q = 0. \tag{3}$$

Les deux Σ s'étendent à toutes les valeurs que prennent dans l'équation (1) les exposants p et q. Par hypothèse on a

$$p \geqq -1, \qquad q \geqq 0.$$

Après le changement de variable $y = tx^\nu$, l'équation devient

$$x\, dt \Sigma A_{pq} x^{p+q\nu} t^{q-1} + dx\, \Sigma(\nu A_{pq} + B_{pq}) x^{p+q\nu} t^q = 0.$$

Considérons les termes où l'exposant $p + q\nu$ prend la plus petite valeur et soit $p' + q'\nu$ cette valeur minimum. Divisons les deux membres de l'équation par $x^{p'+q'\nu}$. Nous avons l'équation

$$x\, dt \Sigma A_{pq} x^{p-p'+(q-q')\nu} t^{q-1} + dx\, \Sigma(\nu A_{pq} + B_{pq}) x^{p-p'+(q-q')\nu} t^q = 0. \tag{4}$$

Soit h un entier positif que nous fixerons plus loin et désignons par $\frac{n+1}{h}$ et $\frac{n}{h}$ les valeurs approchées de ν à $\frac{1}{h}$ près. Posons

$$u = x^{\frac{n+1}{h} - \nu}, \qquad v = x^{\nu - \frac{n}{h}}.$$

Je vais montrer qu'en prenant h assez grand, on pourra remplacer toutes les puissances irrationnelles de x, qui entrent dans (5), par des termes de la forme $u^\alpha v^\beta$, α et β étant des entiers positifs.

Les divers exposants de x dans (5) sont tous positifs et de l'un des trois types suivants, où P et Q sont des entiers positifs :

1° $$P + Q\nu,$$
2° $$P - Q\nu,$$
3° $$Q\nu - P.$$

Dans le cas 1° nous devons, pour toutes les valeurs possibles de P et Q, trouver des entiers positifs α et β tels qu'on ait

$$u^\alpha v^\beta = x^{P+Q\nu},$$

ou encore

$$\alpha\left(\frac{n+1}{h} - \nu\right) + \beta\left(\nu - \frac{n}{h}\right) = P + Q\nu.$$

Il faut donc et il suffit qu'on ait

$$\beta = \alpha + Q, \qquad \alpha(n+1) - \beta n = hP,$$

d'où

$$\alpha = hP + nQ;$$

α et par suite β sont donc bien des entiers positifs.

Dans le cas 2° nous avons de même

$$\alpha = \beta + Q, \qquad \beta = hP - (n+1)Q.$$

En posant

$$\frac{n+1}{h} = \nu + \frac{\varepsilon}{h},$$

on a $\varepsilon < 1$ et l'on peut écrire

$$\beta = h(P - Q\nu) - \varepsilon Q. \tag{5}$$

Remarquons qu'on a $Q = q' - q$ et par conséquent $Q \leqq q'$, q' étant le nombre fixe dont il a été question. Il en résulte que, pour toutes les valeurs que peuvent prendre ici P et Q, la différence $P - Q\nu$, qui est positive, est supérieure à un nombre fixe facile à déterminer lorsque ν est donné. D'autre part εQ est inférieur à q' ; on peut donc prendre h assez grand pour que β, qui est un entier, soit positif en vertu de (5). Il en sera de même de α.

Dans le cas 3° on aura

$$\beta = \alpha + \mathrm{Q}, \qquad \alpha = n\mathrm{Q} - h\mathrm{P}.$$

Comme on a

$$\mathrm{P} = p' - p,$$

on aura

$$\mathrm{P} \leqq p' + 1.$$

Désignons par r une de ces valeurs $0, 1, 2, \ldots, p'+1$ que prend P ($\mathrm{P}=r$). Pour chacune de ces valeurs r, déterminons un entier Q_r tel qu'on ait

$$\nu \mathrm{Q}_r - r > 0.$$

Posons maintenant

$$\frac{n}{h} = \nu - \frac{\varepsilon'}{h}, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{Q}_r + \mathrm{Q}',$$

Q_r étant l'entier qui correspond à la valeur $\mathrm{P}=r$ qui entre dans $n\mathrm{Q} - h\mathrm{P}$. Nous aurons

$$\alpha = n\mathrm{Q}' + h(\nu \mathrm{Q}_r - r) - \varepsilon' \mathrm{Q}_r;$$

$\nu \mathrm{Q}_r - r$ reste supérieur à un nombre positif, tandis que $\varepsilon' \mathrm{Q}_r$ reste inférieur à un autre nombre positif. On peut donc prendre h assez grand pour que l'expression $h(\nu \mathrm{Q}_r - r) - \varepsilon' \mathrm{Q}_r$ soit toujours positive; α est donc un entier positif et il en est de même de β. En prenant h assez grand pour satisfaire aux conditions rencontrées, les puissances irrationnelles de x seront remplacées par des termes de la forme $u^\alpha v^\beta$ (¹). Nous pouvons donc écrire l'équation (5) sous la forme

$$x\, dt \sum \mathrm{A}_{pq} u^\alpha v^\beta t^{q-1} + dx \sum (\nu \mathrm{A}_{pq} + \mathrm{B}_{pq}) u^\alpha v^\beta t^q = 0.$$

Les termes de (4) où l'exposant de x est nul sont ceux où l'on a

$$p = p', \qquad q = q'.$$

(¹) **Le théorème que nous venons de démontrer peut encore être énoncé ainsi :**

Étant données des expressions $r\rho + n\nu$ qui sont toutes* positives, *où ρ et ν sont deux nombres dont le rapport est irrationnel, tandis que r et n sont des entiers positifs ou négatifs, on peut toujours déterminer deux nombres irrationnels λ et μ et faire correspondre à chaque système des valeurs r et n des entiers* positifs *l et n tels qu'on ait $r\rho + n\nu = l\lambda + m\mu$.

Il doit donc y avoir un seul terme de cette espèce dans le coefficient de dt et un seul dans le coefficient de dx. Soient $at^{q'-1}$ et $bt^{q'}$ ces deux termes. Une des quantités a ou b peut être nulle, mais elles ne peuvent pas être nulles toutes les deux (¹). Nous pouvons écrire l'équation (4) sous la forme

$$(6)\quad x\,dt(at^{q'-1}+\Sigma A_{pq}u^{\alpha}v^{\beta}t^{q-1})+dx[bt^{q'}+\Sigma(\nu A_{pq}+B_{pq})u^{\alpha}v^{\beta}t^{q}]=0;$$

dans chacun des Σ considérés les exposants α et β ne peuvent être nuls tous les deux à la fois.

3. Théorème I. — *Lorsque x tend vers zéro et qu'on n'a pas $b=0$, le rapport $y:x^{\nu}$ ou bien ne tend vers aucune limite* (²) *ou bien tend vers l'infini ou vers zéro.*

Montrons qu'il existe une fonction $f(u, v, t)$ holomorphe pour u et v voisins de zéro et t voisin d'une valeur t_0, la fonction f étant telle que

$$f(u, v, t) = \text{const.}$$

donne l'intégrale générale de (6) dans le voisinage de $x=0$ et $t=t_0$. Nous posons pour abréger

$$u = x^{\lambda},\qquad v = x^{\mu},$$

et nous supposons, pour fixer les idées, qu'on ait $\lambda<\mu$. Il faut qu'on ait

$$\left(\lambda u\frac{\partial f}{\partial u}+\mu v\frac{\partial f}{\partial v}\right)(at^{q'-1}+\Sigma A_{pq}u^{\alpha}v^{\beta}t^{q-1})$$
$$=\frac{\partial f}{\partial t}[bt^{q'}+\Sigma(\nu A_{pq}+B_{pq})u^{\alpha}v^{\beta}t^{q}].$$

(¹) En effet, on a

$$a = A_{p'q'},\qquad b=\nu A_{p'q'}+B_{p'q'}$$

et une des quantités $A_{p'q'}$, $B_{p'q'}$ est différente de zéro.

(²) t peut ne tendre vers aucune limite. Les circonstances que j'ai signalées (*Comptes rendus*, 25 novembre 1907) et qui se présentent pour le rapport $y:x$, rapport qui dans la plupart des cas ne tend vers aucune limite, lorsque x tend vers zéro suivant un chemin convenablement choisi, se présentent encore pour le rapport $y:x^{\nu}$. Les résultats que j'ai obtenus dans l'étude du rapport $y:x$, et qui sont développés dans un Mémoire qui doit paraître dans les *Rendiconti del Circolo matematico*, s'étendent sans peine au rapport $y:x^{\nu}$.

Les coefficients des dérivées dans les deux membres sont des fonctions de u, v, t holomorphes pour $u=0$, $v=0$, $t=t_0$. De plus le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial t}$ n'est pas nul pour $u=0$, $v=0$, $t=t_0$, si l'on a $t_0 \neq 0$. L'équation aux dérivées partielles est donc vérifiée par une fonction $f(u, v, t)$ holomorphe pour les valeurs considérées et se réduisant à u pour $t=t_0$. En développant cette fonction suivant les puissances de $t-t_0$, les coefficients de ce développement seront des séries entières en u et v. Il en résulte qu'en mettant en facteur $u=x^\lambda$, l'intégrale générale de l'équation peut s'écrire

$$x^\lambda[1+(t-t_0)\varphi_1(x)+(t-t_0)^2\varphi_2(x)+\ldots]=C, \tag{7}$$

φ_1, φ_2, ... étant des fonctions de x qui sont nulles pour $x=0$.

Ceci posé, il est impossible qu'il existe une intégrale telle que, lorsque x tend vers zéro, t tende vers une limite finie t_0, différente de zéro. En effet, cette intégrale vérifie la relation (7); comme le premier membre de (7) tend vers zéro avec x, on doit avoir $C=0$; mais pour $C=0$ la relation (7) ne peut être vérifiée par aucune fonction $t(x)$ tendant vers t_0 lorsque x tend vers zéro.

4. *Cas où l'on a $b=0$.* — Je vais d'abord montrer que, quelle que soit la valeur t_0 choisie ($t_0 \neq 0$), il y a une intégrale telle que t tende vers t_0, lorsque x tend vers zéro d'une façon quelconque. Je vais faire voir que cette intégrale peut être représentée par une relation de la forme

$$t=\varphi(u, v),$$

φ étant une fonction de u et v holomorphe pour $u=0$, $v=0$. Puisqu'on a $b=0$, on aura $a \neq 0$ et l'équation (6) peut s'écrire

$$x\frac{dt}{dx}=f(t, u, v).$$

Nous pouvons choisir arbitrairement un nombre ε aussi petit qu'on veut, et un nombre E aussi grand qu'on veut; il existera un nombre η tel que f soit une fonction holomorphe pour

$$\varepsilon < t < E, \qquad |u| < \eta, \qquad |v| < \eta. \tag{8}$$

En posant

$$t=t_0+z,$$

nous devons avoir

$$\lambda u \frac{\partial z}{\partial u} + \mu v \frac{\partial z}{\partial v} = f(t_0 + z, u, v) \equiv f_1(z, u, v). \tag{9}$$

Si nous prenons

$$\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} < |t_0| < \mathrm{E} - \frac{\varepsilon}{2}, \tag{10}$$

f_1 sera une fonction holomorphe de z, u, v si l'on a

$$|z| < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad |u| < \eta, \qquad |v| < \eta.$$

Si M est le maximum du module de f lorsque t, u, v varient dans le champ défini par les inégalités (8), on pourra prendre comme fonction majorante de f_1 la fonction

$$\frac{\mathrm{M}(u+v)}{\left(1 - \frac{2z}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{u}{\eta}\right)\left(1 - \frac{v}{\eta}\right)}.$$

Nous prendrons pour z un développement se réduisant à zéro pour $u = 0$, $v = 0$. On peut déterminer sans difficultés les termes successifs de ce développement vérifiant la relation (9). Ce développement est convergent; en effet, si l'on suppose comme précédemment $\lambda < \mu$, les termes de $z(u, v)$ sont inférieurs en valeur absolue aux termes de la fonction Z vérifiant la relation

$$\lambda \mathrm{Z} = \frac{\mathrm{M}(u+v)}{\left(1 - \frac{2z}{\varepsilon}\right)\left(1 - \frac{u}{\eta}\right)\left(1 - \frac{v}{\eta}\right)}.$$

Il existe un nombre η', facile à calculer, tel que Z soit convergent pour $|u| < \eta'$, $|v| < \eta'$. Tous les termes de Z étant positifs, z sera convergent pour $|u| < \eta'$, $|v| < \eta'$. Les coefficients de ce développement z seront des fonctions holomorphes de t_0, si t_0 vérifie les conditions (10). Nous désignerons ce développement par $z(t_0, u, v)$ et nous aurons

$$t = t_0 + z(t_0, u, v), \tag{11}$$

ce qui met en évidence l'intégrale $t(x)$ qui se réduit à t_0 pour $x = 0$ [1].

---

[1] Si nous considérons l'intégrale correspondante de (1), nous aurons

$$y = t_0 x^\nu + x^\nu z(t_0, u, v).$$

5. Théorème II. — Je vais conclure de ce qui précède que, *si l'on a $b = 0$, t tend nécessairement vers une limite lorsque x tend vers zéro.*

Considérons une intégrale $t(x)$ pour laquelle t ne tend ni vers zéro ni vers l'infini, lorsque x tend vers zéro. On peut trouver un nombre ε' tel que pour une valeur x_1, aussi petite qu'on veut en valeur absolue, t prenne une valeur t_1 vérifiant la condition

$$\varepsilon' < |t_1| < \frac{1}{\varepsilon'}.$$

Désignons par u_1, v_1 les valeurs de u et v pour $x = x_1$, et, considérant la relation (11), montrons qu'il y a une valeur de t_0 et une seule vérifiant l'équation

$$t_0 - t_1 + z(t_0, u_1, v_1) = 0 \tag{12}$$

et satisfaisant aux conditions (10) que nous écrirons, pour plus de commodité,

$$\varepsilon_1 < |t_0| < \mathrm{E}_1. \tag{13}$$

Si l'on considère dans le plan des t_0 l'aire renfermant tous les points t_0 vérifiant les relations (13), cette aire est limitée par les deux cercles ayant pour centres l'origine et pour rayons respectifs ε_1 et E_1. Nous désignerons ces cercles par (ε_1) et (E_1). Pour démontrer que l'équation (12) n'a qu'une racine comprise entre (ε_1) et (E_1), il suffit de montrer que, si l'affixe de t_0 parcourt (dans le sens direct par rapport à l'aire comprise entre les deux cercles) le double contour formé par les cercles (ε_1) et (E_1), la variation de l'argument du premier membre de (12) est égale à 2π. Lorsqu'on

---

On peut se demander si l'on ne peut pas obtenir une forme plus simple, en particulier un développement suivant les puissances de x et de $t_0 x^\nu$. Cette dernière simplification n'est pas possible en général. Si nous considérons en effet l'équation

$$x^2 \frac{dy}{dx} = \nu x y + (1 - \nu) y^2,$$

avec $\nu < 1$, l'intégrale générale de cette équation est donnée par

$$y = \frac{C x^\nu}{1 + C x^{\nu - 1}},$$

et nous voyons que la simplification indiquée n'est pas possible.

parcourt le cercle (ε_1), la variation d'argument est nulle. En effet, $z(t_0, u, v)$ étant nul pour $u = 0$, $v = 0$, on peut prendre x_1 assez petit pour qu'on ait

$$|z(t_0, u_1, v_1)| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Nous pouvons supposer ε_1 aussi petit qu'on veut et supposer qu'on a $\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon'}{2}$. Le premier membre de (12), pouvant s'écrire

$$-t_1\left[1 - \frac{t_0}{t_1} - \frac{z(t_0, u_1. v_1)}{t_1}\right],$$

aura une variation d'argument nulle lorsqu'on parcourt le cercle (ε_1).

Supposons maintenant que t_0 parcoure le cercle (E_1). Le premier membre de (12) peut s'écrire

$$t_0\left[1 - \frac{t_1}{t_0} + \frac{z(t_0, u_1, v_1)}{t_0}\right]. \tag{14}$$

On a

$$\left|\frac{t_1}{t_0}\right| < \frac{1}{\varepsilon' E_1};$$

on peut supposer $\varepsilon' E_1$ égal à 2, puisque E_1 peut être pris aussi grand qu'on veut. On peut également supposer qu'on a

$$\left|\frac{z(t_0, u_1. v_1)}{t_0}\right| < \frac{1}{2}.$$

La variation d'argument de (14) lorsqu'on parcourt le cercle E_1 sera donc égale à 2π. L'équation (12) a une racine t_0 vérifiant les conditions (13) et l'intégrale qui pour $x = x_1$ prend la valeur t_1 est confondue avec l'intégrale

$$t = t_0 + z(t_0, u, v).$$

Donc, si l'on a une intégrale pour laquelle t ne tende ni vers zéro ni vers l'infini, lorsque t_1 tend vers zéro, t tend vers une limite finie t_0.