BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Sur les surfaces à courbure constante négative

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 51-58
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__51_0>

SUR LES SURFACES A COURBURE CONSTANTE NÉGATIVE;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Dans un article *Ueber Flächen von constanter Gausscher Krümmung* (*Transactions of the American mathematical Society*, Vol. II, 1901, p. 87-99), M. David Hilbert a démontré qu'il n'existait aucune surface analytique, à courbure constante négative, n'ayant aucun point singulier à distance finie. La démonstration, assez difficile à suivre, exige des considérations fort délicates de Géométrie de situation. En restreignant un peu l'énoncé du problème, on peut donner une démonstration beaucoup plus simple.

Soit S une surface analytique, à courbure constante égale à -1, sans point singulier à distance finie, correspondant point par point à un plan (u, v), de façon à représenter complètement l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\,dv^2; \tag{1}$$

telle serait la pseudo-sphère idéale, qui fournirait la représentation complète du plan non euclidien de Lobatschefsky. Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de cette surface sont, par hypothèse, des fonctions analytiques réelles des deux variables (u, v),

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v), \tag{2}$$

régulières dans le voisinage de tout système de valeurs réelles (u_0, v_0), et satisfaisant aux trois équations

$$\mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad \mathrm{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad \mathrm{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = e^{2u}. \tag{3}$$

De ces équations on déduit

$$\left[\frac{\mathrm{D}(x, y)}{\mathrm{D}(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{D}(y, z)}{\mathrm{D}(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\mathrm{D}(z, x)}{\mathrm{D}(u, v)}\right]^2 = e^{2u}, \tag{4}$$

de sorte qu'inversement, si les trois fonctions x, y, z vérifient les relations (3), la surface S n'aura aucun point singulier à distance finie, puisque les trois jacobiens $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, $\frac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $\frac{D(z,x)}{D(u,v)}$ ne peuvent s'annuler en même temps. Pour démontrer qu'il n'existe pas de surface S satisfaisant aux conditions énoncées, il suffit donc de prouver qu'il ne peut exister aucun système de trois fonctions analytiques régulières dans tout le plan, des variables u et v, satisfaisant aux équations (3).

Nous supposons qu'à un point (u, v) du plan correspond un point et un seul (x, y, z) de la surface, mais l'hypothèse inverse n'est pas nécessaire; il pourrait se faire qu'un même point de S correspondît à plusieurs points du plan. C'est ce qui arriverait, par exemple, si les fonctions f, φ, ψ étaient périodiques. La surface S devrait alors être considérée comme formée d'une infinité de feuillets superposés.

2. Admettons donc qu'il existe un système de trois fonctions x, y, z, régulières dans le voisinage de tout système de valeurs réelles (u_0, v_0), et satisfaisant aux équations (3). L'équation différentielle des lignes de courbure de la surface S est

$$(5) \qquad F = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ c & c' & c'' \\ dc & dc' & dc'' \end{vmatrix} = 0,$$

c, c', c'' étant les cosinus directeurs de la normale

$$c = e^{-u}\frac{D(y,z)}{D(u,v)}, \qquad c' = e^{-u}\frac{D(z,x)}{D(u,v)}, \qquad c'' = e^{-u}\frac{D(x,y)}{D(u,v)};$$

ces coefficients sont aussi des fonctions régulières des variables u et v dans tout le plan, et, par suite, l'équation (5) développée est de la forme

$$(5)' \qquad \mathfrak{F} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0,$$

E, F, G étant des fonctions régulières dans tout le plan. Les deux valeurs de $\frac{dv}{du}$ déduites de cette équation étant toujours réelles et distinctes, le discriminant $F^2 - EG$ est toujours positif, quels que soient u et v, et, par suite, la fonction

$$H = \sqrt{F^2 - EG}$$

est une fonction régulière et *positive* pour toutes les valeurs réelles de u et de v. Mais on sait, d'après un théorème de M. Weingarten ([1]), que la forme F est le produit de deux différentielles exactes dU et dV, et l'on peut, par des quadratures, décomposer cette forme F en un produit tel que

$$(6)\qquad \mathfrak{F} = (a\,du + b\,dv)(a_1\,du + b_1\,dv),$$

a, b, a_1, b_1 étant des fonctions régulières de (u, v) dans tout le plan et les deux facteurs $a\,du + b\,dv$, $a_1\,du + b_1\,dv$ étant des différentielles exactes. Pour ne pas interrompre la suite des idées, je renverrai la démonstration rigoureuse de cette propriété au paragraphe suivant. Il s'ensuit que les fonctions U et V, obtenues par des quadratures,

$$(7)\qquad U = \int a\,du + b\,dv, \qquad V = \int a_1\,du + b_1\,dv,$$

sont aussi des fonctions régulières de u et de v dans tout le plan

$$(8)\qquad U = \Phi(u, v), \qquad V = \Psi(u, v).$$

Le jacobien $\dfrac{D(U, V)}{D(u, v)} = ab_1 - ba_1$ n'est jamais nul, car il est égal à $\pm H$.

Ces deux fonctions U et V ne sont déterminées qu'à un facteur constant près, car on peut remplacer U et V par KU et $\dfrac{V}{K}$ respectivement. Or on peut choisir le facteur constant K de façon qu'on ait ([2])

$$\cos^2\omega\, dU^2 + \sin^2\omega\, dV^2 = ds^2 = du^2 + e^{2u}\, dv^2$$

et, par suite, on a

$$dU^2 + dV^2 = ds^2 + \sin^2\omega\, dU^2 + \cos^2\omega\, dV^2$$

ou

$$dU^2 + dV^2 > ds^2.$$

Lorsque le point (u, v) décrit dans son plan une ligne joignant

---

([1]) WEINGARTEN (J.), *Ueber eine Eigenschaft der Flächen bei denen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des anderen ist* (*Journal de Crelle*, t. 103, 1888, p. 184). — DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. III, p. 359.

([2]) DARBOUX, *loc. cit.*, note de la page 380.

l'origine à un point indéfiniment éloigné, le point correspondant de la surface S ne peut décrire une ligne de longueur finie, et, par suite, le point (U, V) ne peut lui-même décrire une ligne de longueur finie, dans son plan. Il suit de là, d'après un théorème de M. Hadamard [1], qu'on peut inversement résoudre les équations (8) par rapport à u et à v, de sorte qu'à tout point du plan (U, V) corresponde un point, et un seul, du plan (u, v) et par suite un point, et un seul, de la surface S. On peut donc représenter la surface sur le plan (U, V) de façon que les deux familles de lignes de courbure correspondent aux deux familles de droites

$$U = \text{const.}, \qquad V = \text{const.}$$

Les deux familles de lignes asymptotiques correspondent alors aux deux systèmes de droites

$$U + V = \text{const.}, \qquad U - V = \text{const.},$$

et, par conséquent, deux lignes asymptotiques de systèmes différents se rencontrent toujours en un point et en un seul.

Quand on passe du plan (u, v) au plan (U, V), les formules qui définissent la transformation sont telles qu'on ait identiquement

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}\, dv^2 = \cos^2\omega\, dU^2 + \sin^2\omega\, dV^2, \tag{9}$$

ω étant solution de l'équation [2]

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial U^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial V^2} = \sin\omega\cos\omega. \tag{10}$$

Si l'on prend comme nouvelles variables les paramètres α et β des lignes asymptotiques

$$2\alpha = U + V, \qquad 2\beta = U - V,$$

ds^2 a pour expression

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2\cos 2\omega\, d\alpha\, d\beta, \tag{9$'$}$$

---

(1) HADAMARD, *Sur les transformations ponctuelles* (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXIV, 1905, p. 71-84).

(2) DARBOUX, *loc. cit.*, p. 378 et suivantes.

tandis que l'équation (10) devient

$$\frac{\partial^2(2\omega)}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \sin 2\omega. \tag{10'}$$

L'angle 2ω est égal à l'angle formé par les deux lignes asymptotiques et reste compris entre o et π.

L'intégrale double $\int\int_{(A)} e^u\,du\,dv$ étendue à un champ (A) du plan (u, v) est égale à l'intégrale double

$$\int\int_{(\mathcal{A})} \sin 2\omega\,d\alpha\,d\beta = \int\int_{(\mathcal{A})} \frac{\partial^2(2\omega)}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\alpha\,d\beta,$$

étendue au champ correspondant $(\mathcal{A})$ du plan (α, β). Il est évident que l'intégrale double $\int\int_{(A)} e^u\,du\,dv$ peut dépasser tout nombre donné, pourvu qu'on prenne le champ (A) assez étendu : cette intégrale double représente l'aire de la portion de surface S qui correspond au domaine plan (A) du plan (u, v). Au contraire, l'intégrale double

$$\int\int_{(\mathcal{A})} \sin 2\omega\,d\alpha\,d\beta$$

est toujours inférieure à 2π; en effet, on peut toujours renfermer le champ $\mathcal{A}$ à l'intérieur d'un rectangle

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \alpha = \alpha_1, \qquad \beta = \beta_0, \qquad \beta = \beta_1,$$

et l'intégrale double $\int\int \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\,\partial\beta}\,d\alpha\,d\beta$ étendue à ce rectangle est évidemment inférieure à 2π (Darboux, *loc. cit.*, p. 380).

Nous sommes donc conduits à une contradiction en admettant l'existence d'un système de trois fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ satisfaisant aux conditions énoncées.

3. Il y a, comme on voit, deux points essentiels dans la démonstration. D'une part, la forme quadratique $\mathcal{F}$ peut se décomposer en un produit de deux facteurs

$$\mathcal{F} = d\mathrm{U}\,d\mathrm{V},$$

U et V étant des fonctions régulières dans tout le plan (u, v). La démonstration est immédiate lorsqu'on a $\mathrm{E} = \mathrm{G} = 0$, car le coefficient F est alors nécessairement le produit d'une fonction de u par une fonction de v.

Supposons que E ne soit pas identiquement nul; nous pouvons écrire $\mathcal{F}$ sous la forme

$$\mathcal{F} = [\mathrm{E}\,du + (\mathrm{F}+\mathrm{H})\,dv]\left(du + \frac{\mathrm{F}-\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\,dv\right), \qquad \mathrm{H} = \sqrt{\mathrm{F}^2 - \mathrm{EG}}.$$

D'après le théorème de M. Weingarten, il existe un facteur intégrant λ pour l'expression $du + \frac{\mathrm{F}-\mathrm{H}}{\mathrm{E}}\,dv$, tel que $\frac{1}{\lambda}$ soit un facteur intégrant pour $\mathrm{E}\,du + (\mathrm{F}+\mathrm{H})\,dv$. On obtient ainsi, pour déterminer λ, les deux équations

$$(11) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{H}-\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\dfrac{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial u}}{\mathrm{E}} + \dfrac{1}{\mathrm{H}}\dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial u} - \dfrac{1}{2\mathrm{H}}\dfrac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}, \\[2ex] \dfrac{1}{\lambda}\dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{H}-\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\dfrac{\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}}{\mathrm{E}} + \dfrac{1}{2\mathrm{H}}\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}. \end{cases}$$

Nous sommes assurés, *a priori,* que ces équations sont compatibles, d'après le théorème de M. Weingarten, et λ s'obtient par une quadrature :

$$(12) \qquad \lambda = \mathrm{C}e^{\int_{(u_0,v_0)}^{(u,v)} \frac{1}{2}\frac{\mathrm{H}-\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\frac{d\mathrm{E}}{\mathrm{E}} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}du - \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial v}du + \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial u}dv}$$

On voit que λ est une fonction régulière de (u, v) tant qu'on n'atteint pas un système de valeurs de u et de v qui annule E. Si l'on a

$$\mathrm{E}(u, v) = 0,$$

ce système de valeurs annule $\mathrm{H}-\mathrm{F}$ ou $\mathrm{H}+\mathrm{F}$; si l'on a à la fois

$$\mathrm{E} = 0, \qquad \mathrm{H} = \mathrm{F},$$

pour un système de valeurs de u et de v, le quotient $\frac{\mathrm{H}-\mathrm{F}}{\mathrm{E}}$ est une fonction régulière dans le voisinage, d'après l'identité

$$\frac{\mathrm{H}-\mathrm{F}}{\mathrm{E}} = \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}+\mathrm{F}},$$

et, par suite, le facteur $\lambda(u, v)$ est une fonction régulière dans le voisinage de ce système de valeurs, et ne s'annulant pas.

Il n'y a plus qu'à étudier la forme du facteur $\lambda(u, v)$ dans le voisinage d'un système de valeurs de u et de v, satisfaisant aux deux relations

$$E = 0, \qquad H = -F.$$

Nous pouvons écrire

$$\frac{H - F}{2HE} = \frac{2H - (H + F)}{2HE} = \frac{1}{E} + P(u, v),$$

la fonction $P(u, v)$ étant régulière, et, dans le voisinage du point considéré, la fonction $\lambda(u, v)$ est de la forme

$$\lambda(u, v) = E(u, v)\,Q(u, v),$$

$Q(u, v)$ étant une fonction régulière qui est différente de zéro en ce point. En résumé, *le facteur intégrant* λ *est une fonction régulière dans tout le plan, qui ne s'annule que pour les systèmes de valeurs de* u *et de* v *qui satisfont aux deux relations* $E = 0$, $F + H = 0$; *dans le voisinage de l'un de ces systèmes de valeurs,* λ *est de la forme* $E(u, v)\,Q(u, v)$, $Q(u, v)$ *étant une fonction régulière qui ne s'annule pas en ce point.*

Il suit de là que les coefficients

$$\lambda(u, v), \quad \frac{F - H}{E}\lambda(u, v), \quad \frac{E}{\lambda(u, v)}, \quad \frac{F + H}{\lambda(u, v)}$$

sont des fonctions régulières dans tout le plan, et par conséquent la forme $\mathcal{F}$ est bien le produit de deux différentielles $dU\,dV$, les fonctions U et V étant régulières dans tout le plan.

4. Un autre point essentiel tient à ce fait que deux lignes asymptotiques de systèmes différents se rencontrent toujours en un point, et en un seul, et par conséquent décomposent la surface tout entière en un réseau de mailles analogue au réseau formé dans le plan par les parallèles aux deux axes de coordonnées. S'il n'en était pas ainsi, il pourrait arriver que l'aire de la portion de surface limitée par quatre segments de lignes asymptotiques soit toujours inférieure à un nombre fixe, tandis que l'aire de la surface tout entière est infinie. Supposons, par exemple, que les coordonnées x,

y, z d'un point d'une surface soient des fonctions régulières des deux variables indépendantes u, v, dans tout le plan (u, v), et qu'on ait obtenu pour l'équation différentielle des lignes asymptotiques de cette surface l'équation

$$[(1 + u^2)\,dv - uv\,du]\,[(1 + v^2)\,du - uv\,dv] = 0.$$

Les lignes asymptotiques des deux systèmes ont pour images des branches d'hyperbole

$$\frac{v}{\sqrt{1 + u^2}} = \alpha, \qquad \frac{u}{\sqrt{1 + v^2}} = \beta.$$

Si l'on prend α et β pour nouveaux paramètres, on a inversement

$$u = \beta\,\frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2\beta^2}}, \qquad v = \alpha\,\frac{\sqrt{1 + \beta^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2\beta^2}}.$$

Ces valeurs ne sont réelles que si l'on a

$$\alpha^2\beta^2 < 1.$$

Les points du plan (α, β) auxquels correspond un point réel de la surface sont situés dans la région R limitée par quatre branches égales d'hyperbole, et les lignes asymptotiques sont représentées par des segments de droites parallèles à l'un des axes. Soit $M\,d\alpha\,d\beta$ l'élément d'aire de la surface considérée avec les variables (α, β); on conçoit parfaitement que l'intégrale double $\int\int M\,d\alpha\,d\beta$, étendue à un rectangle de la région R, limité par des parallèles aux axes, reste plus petite qu'un nombre fixe, tandis que la même intégrale, étendue à la région R tout entière, est infinie. Tel serait le cas si l'on avait $M = 1$.

Remarquons, en terminant, que l'hypothèse de l'analycité des fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ n'est pas indispensable. Il suffit de supposer que ces fonctions sont continues et admettent des dérivées continues jusqu'au troisième ordre.