L. ZORETTI

Un théorème de la théorie des ensembles

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 116-119
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__116_0>

UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES;

PAR M. L. ZORETTI.

On peut se proposer de rechercher dans quels cas l'ensemble limite d'un ensemble continu variable est lui-même continu. Soit E_n le continu variable (je suppose qu'il y en a une infinité dénombrable); un cas très simple est celui où chaque E_n contient tous les suivants. Il y a alors un ensemble commun à tous les E_n, et il est continu.

Quand les E_n n'ont pas de points communs, la question est plus délicate. J'en ai étudié un cas dans ma Thèse et suis arrivé au résultat suivant : ***S'il existe un point a qui est limite pour*** tous *les* E_n, ***l'ensemble limite est continu.***

J'ai montré aussi que l'existence d'un point limite pour tous les E_n, c'est-à-dire tel que dans un cercle de centre a il y ait des points de tous les E_n à partir d'une certaine valeur de n, semblait essentielle pour permettre d'énoncer un théorème général. Ce sont des recherches sur la théorie des fonctions analytiques qui m'avaient conduit à cet énoncé. Des recherches analogues m'ont conduit depuis à me poser la question qui fait l'objet de cette Note.

Quand un ensemble continu E_n a pour limite un continu, il n'existe pas forcément de point qui soit limite pour *tous* les E_n, comme le montre l'exemple suivant :

Prenons pour ensemble E_n l'ensemble des points de coordonnées x, y définies par les égalités ou inégalités suivantes :

$$
\begin{array}{ll}
y = \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{3n} < x < \dfrac{2}{3n}, \\
y = \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{3n}, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
y = \dfrac{1}{n}, & \dfrac{p}{n} + \dfrac{1}{3n} \leqq x \leqq \dfrac{p}{n} + \dfrac{2}{3n} \qquad (p \leqq n-1).
\end{array}
$$

En d'autres termes, sur chaque droite d'ordonnée $\frac{1}{n}$ nous divisons le segment 0-1 en n parties égales et nous prenons pour former un ensemble E_n le tiers moyen de chaque segment. Sur chaque droite nous aurons n ensembles E_n, tous continus. L'ensemble limite est le segment o-1 de l'axe des x, et il n'y a aucun point sur Ox qui soit limite de tous les E_n.

La question que je me pose sera la suivante : Caractériser les cas où l'on peut affirmer l'existence de points limites par tous les E_n, et notamment les cas où l'ensemble limite de tous les E_n est continu lui-même. La question est étroitement liée à la suivante : Peut-on prendre parmi les E_n un ensemble (dénombrable) d'ensembles (c'est-à-dire une infinité de valeurs de n) de telle façon que l'ensemble limite reste continu et que ses points soient limites pour *tous* les nouveaux E_n. L'exemple précédent montre que ce cas n'est pas le cas général. Dans cet exemple, on peut même choisir *des* E_n de façon que l'ensemble limite ne soit pas continu.

Je dis que le choix précédent est toujours possible dès qu'il existe *un* point a limite pour tous les E_n.

Je le démontre d'abord dans le cas particulier où l'ensemble limite E (qui est continu) est ce que j'appelle un continu *irréductible* entre deux points a et b, c'est-à-dire un ensemble tel qu'on ne puisse pas en extraire une *portion* continue contenant a et b. Prenons alors ceux des ensembles E_n qui ont b pour limite; il est facile de les déterminer (et même d'une infinité de façons). Leur ensemble limite sera un *continu* contenant a et b, c'est-à-dire sera E lui-même. De plus, tout point de E est limite pour tous les nouveaux E_n, car, si l'on pouvait trouver une infinité de valeurs de n indéfiniment croissantes telles que les E_n correspondants s'écartent du point c, ces E_n auraient un ensemble limite continu ne contenant pas c et contenant a et b. Il y aurait donc une *portion* de E continue contenant a et b, ce qui est contraire à l'hypothèse.

J'arrive au cas général où E est quelconque (continu) et je remarque d'abord que, quelle que soit la façon de choisir *des* valeurs de n croissant indéfiniment, les ensembles E_n ainsi extraits auront toujours un ensemble limite continu, puisque a sera toujours limite pour tous les E_n.

Supposons les E_n et E bornés; traçons un carré contenant E, et nous aurons dans la suite à diviser ce carré C en p^2 carrés égaux, C_p, par des parallèles aux côtés; j'appellerai ces carrés C_p ceux de la $p^{\text{ième}}$ subdivision. Donnons-nous également une suite de nombres positifs ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$ $\left(\text{par exemple } \varepsilon_n = \frac{1}{n}\right)$.

Deux cas se présentent : ou bien tous les points de E sont limites de tous les E_n, alors le théorème est établi ; ou bien il y a au moins un point b_1 (intérieur à C_1) qui n'est pas limite pour tous les E_n. Traçons un cercle de centre b_1 et de rayon ε_1 ; considérons uniquement ceux des ensembles E_n qui ont des points dans ce cercle, et parmi ces ensembles (en nombre infini) choisissons-en une infinité dénombrable de façon que b_1 soit limite pour tous : la chose est évidemment possible. J'appelle les nouveaux ensembles les E'_n. Leur ensemble limite est continu (portion de E) et deux points a et b_1 sont limites pour tous les E'_n. Soit E_1 cet ensemble limite.

Ou bien tous les points de E_1 sont limites pour tous les E'_n, ou bien on peut trouver des points de E_1 qui ne sont pas limites de tous les E'_n. L'ensemble de ces derniers points pénètre à l'intérieur d'un certain nombre, fini, de carrés C_2. Soient γ_2 ces carrés. Prenons, parmi les points de E_1 qui ne sont pas limites de tous les E'_n, un point b_2 intérieur à un des γ_2. Traçons un cercle de rayon ε_2 et de centre b_2. Considérons ceux des E'_n (il y en a une infinité) qui pénètrent dans ce cercle et choisissons-en parmi eux une infinité telle que b_2 soit limite pour tous. Soient E^2_n leur ensemble, E_2 l'ensemble limite. Il est continu, contient a_1, b_1 et b_2, et ces trois points sont limites pour tous les E^2_n. Alors ou bien tout point de E_2 est limite de tous les E^2_n, ou bien il y a des points F_2 de E_2 qui ne sont pas limites de tous les E^2_n. Si ces points ne sortent pas du carré γ_2 où nous avons pris b_2, nous passerons à la troisième subdivision C_3, nous prendrons les carrés γ_3 de cette subdivision qui contiennent les points non limites de tous les E^2_n, nous choisirons un point b_3 dans un des γ_3 ; si au contraire des points de F_2 sont dans un autre carré γ_2 que celui qui contient b_2, nous prendrons b_3 dans un de ces carrés γ_2. Dans les deux cas, nous tracerons un cercle de centre b_3 de rayon ε_3. Nous excluons les ensembles E^2_n qui ne pénètrent pas dans ce cercle, et nous prenons parmi les ensembles conservés ceux qui tendent tous vers b_3, soient E^3_n et ainsi de suite.

En général, nous ne passerons à la considération des carrés γ_p pris parmi les C_p de la $p^{\text{ième}}$ subdivision que lorsque parmi les points F_q (non limites de tous les E^q_n) de E_q il n'y en aura plus dans un carré γ_{p-1} qui n'aurait pas déjà été utilisé.

Alors en continuant indéfiniment, ou bien la première hypothèse se présentera pour un E_q (tous les points en seront limites de tous les E_n^q), ou bien c'est indéfiniment la seconde hypothèse qui se présentera. Dans le premier cas, le théorème est démontré.

Dans le second, prenons les ensembles E_n dans l'ordre où on les trouve E_1, E_2, ... jusqu'à ce que nous trouvions pour la première fois un ensemble E'_n (que je puis appeler E'_1); prenons les ensembles E'_1, E'_2, ... jusqu'à trouver un E_n^2, soit E_1^2. Prenons E_1^2, E_2^2, ... jusqu'au premier E_n^3, soit E_1^3, et ainsi de suite. Je définis ainsi une infinité dénombrable d'ensembles G_m pris parmi les E_n. Leur ensemble limite est un continu G qui contient la partie commune à tous les E_q (cette partie commune comprend au moins a et b_1, et par suite ne se réduit pas à un point). Je dis que tous les points de G sont limites de tous les G_m. En effet, un point de G, ou bien appartient à l'une des portions d'un des E_q qui est limite de tous les E_n^q, alors il sera limite de tous les F_m qui pour m assez grand sont pris parmi les E_q; ou bien notre point μ de G_m n'est pas un tel point, alors à chaque subdivision en carrés C_p il appartient à un des γ_p. Il est donc limite de points b_p; je veux dire qu'il y a une infinité de valeurs de p indéfiniment croissantes (mais non toutes) telles que notre point soit infiniment voisin des b_p correspondants. En tout cas, il est impossible de supposer une infinité de valeurs de m telles que F_m ne pénètre pas dans un cercle O de centre μ, car dans ce cercle, quel qu'il soit, entrent *des* points b_p pour lesquels ε_p est assez petit pour que le cercle de centre b_p et de rayon ε_p soit intérieur à O; et comme, pour m assez grand, F_m pénètre dans ce cercle quel que soit m, il pénètre également dans O.

Dans tous les cas, nous aurons donc bien formé une suite F_m prise parmi les E_n dont l'ensemble limite sera continu et dont tous les points limites sont limites pour tous les F_m.

On comprend que cela puisse avoir un certain intérêt si l'on réfléchit que l'ensemble limite sera invariable si, au lieu de prendre tous les F_m, on en prend quelques-uns seulement (une infinité, bien entendu).