BULLETIN DE LA S. M. F.

BIOCHE

Sur les surfaces desmiques du quatrième ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 163-167
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__163_1>

SUR LES SURFACES DESMIQUES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. CH. BIOCHE.

I. — PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

1. Je vais d'abord énoncer des propriétés fondamentales données par M. Stephanos [1] et M. G. Humbert [2]; j'étudierai ensuite les coniques existant sur une surface desmique.

On dit que trois tétraèdres forment un *système desmique* s'ils constituent trois surfaces appartenant à un faisceau linéaire de surfaces du quatrième ordre. La condition nécessaire et suffisante pour que deux tétraèdres puissent faire partie d'un système desmique est qu'ils soient homologiques de quatre façons différentes; les plans d'homologie sont les faces du troisième tétraèdre.

Les tétraèdres se coupent deux à deux suivant seize *droites desmiques* qui constituent la base du faisceau linéaire de surfaces

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. III, 1879.
(2) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1891.

du quatrième ordre; ces droites se coupent quatre par quatre en douze *points desmiques*.

Par chaque point desmique A passent quatre droites contenant chacune deux points desmiques autres que A; les trois points desmiques qui ne sont pas sur ces droites forment avec A les sommets d'un tétraèdre conjugué par rapport à toutes les quadriques qui passent par les huit autres points desmiques.

2. Pour se faire une idée d'un système desmique, il suffit d'en considérer un cas particulier, dont d'ailleurs tout système desmique n'est qu'un transformé par homographie.

Les douze arêtes d'un cube et les quatre diagonales forment le système de droites desmiques en question; les tétraèdres desmiques sont formés chacun par deux faces parallèles du cube et les deux plans menés par les diagonales de ces faces.

Chacun des tétraèdres formés, soit par le centre et les points à l'infini sur les axes quaternaires du cube, soit par quatre sommets du cube, tels qu'il n'y en ait pas deux sur une même arête, est conjugué par rapport à toutes les quadriques du réseau ayant pour points de base les sommets des autres tétraèdres.

3. On appelle *surface desmique du quatrième ordre* toute surface pouvant faire partie d'un faisceau linéaire contenant trois tétraèdres desmiques. Les douze points desmiques sont des points doubles de la surface, car par chacun de ces points passent quatre droites de la surface, non situées dans un même plan.

Si l'on prend pour tétraèdre de référence l'un des tétraèdres signalés à la fin du paragraphe précédent, l'équation d'un faisceau de surfaces desmiques peut s'écrire

$$\lambda(x^2y^2+z^2t^2)+\mu(x^2z^2+y^2t^2)+\nu(x^2t^2+y^2z^2)=0,$$

λ, μ, ν étant liés par la relation

$$\lambda+\mu+\nu=0.$$

Le long d'une droite desmique trois des coordonnées ont la même valeur absolue.

II. — Les seize coniques d'une surface desmique.

4. Il est facile de voir que le plan tangent en un point d'une droite desmique ne varie pas lorsque le point de contact décrit cette droite. Par exemple, le long de la droite

$$y = z = t,$$

le plan tangent a pour équation

$$\lambda y + \mu z + \nu t = 0.$$

Ce fait, qui explique pourquoi la transformée par polaires réciproques (qui est une transformée homographique de la surface des centres de courbure d'un ellipsoïde) n'a pas de droites, peut se déduire de propriétés générales.

1° On peut remarquer que, lorsque des surfaces forment un faisceau linéaire, les plans tangents à quatre surfaces en un des points de la ligne de base forment un faisceau dont le rapport anharmonique a une valeur indépendante du point considéré; car les plans tangents correspondent homographiquement aux valeurs du paramètre variable qui déterminent les surfaces correspondantes. De sorte que, pour une surface desmique, le plan tangent en un point d'une droite desmique a un rapport anharmonique déterminé avec les faces des trois tétraèdres du faisceau qui contiennent cette droite.

2° On peut remarquer que chaque droite desmique contient trois points doubles; or, si une surface du $m^{\text{ième}}$ ordre contient une droite sur laquelle il y a $m - 1$ points doubles, cette surface est touchée par un plan fixe tout le long de cette droite.

5. Le plan tangent à une surface desmique le long d'une droite desmique, coupant la surface suivant cette droite qui compte pour deux, coupe en outre la surface suivant une conique. *Il y a donc seize coniques sur la surface.*

Une surface desmique est déterminée sans ambiguïté lorsqu'on connaît les 16 droites desmiques et le plan tangent le long de l'une d'elles. Il est facile de construire les autres plans tangents; car, si l'on considère, par exemple, le point double $y = z = t = 0$, les plans tangents le long des droites qui passent par ce point sont tangents au cône

$$\lambda y^2 + \mu z^2 + \nu t^2 = 0,$$

et les plans tangents suivant deux droites D et D′, passant par ce point, se coupent sur la face du trièdre

$$y = 0, \qquad z = 0, \qquad t = 0,$$

qui est opposée à l'arête située dans le plan DD′.

Comme le plan tangent le long de D est tangent aux trois cônes correspondant aux points desmiques situés sur D, on a de proche en proche les plans tangents le long des différentes droites.

6. Soit D une droite desmique, soit P le plan tangent le long de cette droite. Par chacun des points doubles situés sur D passent trois droites desmiques autres que D; donc neuf droites desmiques. Il y a par suite six droites desmiques ne rencontrant pas D.

Le plan P coupe ces six droites en des points situés sur la conique qui complète l'intersection de la surface et de P. Si la droite D est $y = z = t$, les six droites qui ne rencontrent pas D sont sur la quadrique d'équation

$$x^2 + yz + yt + zt = 0,$$

qui peut être définie comme contenant les neuf points doubles non situés sur D.

L'équation de cette quadrique ne contient plus de paramètre variable; donc, *lorsqu'on passe d'une surface du faisceau à une autre, la conique correspondant à une droite* D *décrit la quadrique contenant les droites qui ne rencontrent pas* D.

7. Il est facile de constater que les coniques correspondant à deux droites desmiques qui passent par un même point double se coupent en deux points; car la droite d'intersection des plans des coniques passe par le point double et coupe la surface en deux points situés sur les coniques.

On déduit facilement de là que quatre coniques correspondant à quatre droites qui se rencontrent sont sur une même quadrique. Ces droites peuvent soit se couper en un point double, soit être dans un même plan.

Les coniques correspondant aux droites qui passent par le point double $y = z = t = 0$ sont sur la quadrique ayant pour équation

$$\lambda\mu\nu x^2 + \lambda^3 y^2 + \mu^3 z^2 + \nu^3 t^2 = 0.$$

Les coniques qui correspondent aux droites situées dans le plan $z - t = 0$ sont sur la quadrique ayant pour équation

$$\lambda^2(x^2 + y^2 + 2zt) + \mu\nu(z - t)^2 = 0.$$

Comme il y a douze points doubles par chacun desquels passent quatre droites et douze plans dans chacun desquels il y a quatre droites, on obtient *vingt-quatre quadriques dont chacune coupe la surface desmique considérée suivant quatre coniques.*

8. Chaque conique rencontre évidemment en deux points chacune des neuf coniques dont les plans sont tangents à la surface le long des neuf droites desmiques sur lesquelles la conique ne s'appuie pas et qui, par suite, rencontrent la droite située dans le plan de cette conique.

Il résulte de ce qui précède que par une conique C, tracée sur une surface desmique, il passe sept quadriques ne coupant cette surface que suivant des droites et des coniques, savoir :

1° Une quadrique coupant suivant C et suivant les six droites desmiques ne rencontrant pas celle qui est située dans le plan de C;

2° Six quadriques coupant suivant C et suivant trois autres coniques.

Une discussion très simple montre que, par deux coniques C et C′ dont les plans passent par des droites desmiques se rencontrant, il passe deux des six quadriques dont il vient d'être question. Les plans des coniques de la surface desmique situées sur l'une de ces quadriques passent par des droites desmiques concourant en un point; les plans des coniques situées sur l'autre quadrique passent par des droites desmiques situées dans un même plan.