BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

Sur les quantités complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 168-175
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__168_0>

SUR LES QUANTITÉS COMPLEXES;

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. Soient n symboles $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ou *unités principales*, qu'on assujettit à cette seule condition : la relation

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = 0,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des quantités réelles, entraîne $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$. On peut considérer la quantité

$$\omega_1 = \alpha_1^1 e_1 + \alpha_1^2 e_2 + \ldots + \alpha_1^n e_n$$

comme représentant un point $P_1(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_1^n)$ de l'espace à n dimensions ou le vecteur allant de l'origine à ce point : deux pareils points ne peuvent en effet coïncider que si leurs coordonnées coïncident.

Soient alors p pareils points $P_1, P_2, \ldots, P_p$,

$$\omega_1 = \alpha_1^1 e_1 + \ldots + \alpha_1^n e_n, \qquad \ldots, \qquad \omega_p = \alpha_p^1 e_1 + \ldots + \alpha_p^n e_n,$$

et l'ensemble des points Q,

$$\Omega = m_1 \omega_1 + \ldots + m_p \omega_p = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n,$$

où $m_1, m_2, \ldots, m_p$ prennent toutes les valeurs *entières* possibles, positives ou négatives. Par extension du cas où $n = 2$, j'appellerai *périodes* les quantités $\omega_1, \ldots, \omega_p$; les points Q seront les *points-périodes*. Je supposerai que les périodes $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont indépendantes, c'est-à-dire ne sont liées par aucune relation linéaire à coefficients entiers; sinon, en effet, on pourrait, pour définir tous les points Q, remplacer ces périodes par d'autres $\omega'_1, \ldots, \omega'_{p'}$, en nombre moindre et indépendantes [1].

Si l'on peut toujours trouver un système de valeurs de $m_1, \ldots, m_p$ tel qu'un des points Q soit aussi voisin qu'on veut de tout

(1) JORDAN, *Cours imprimé d'Analyse*, Paris, Gauthier-Villars, t. II, 1883, p. 325, ou t. II, 2e édition, 1894, p. 323.

point $y_1, \ldots, y_n$ de l'espace à n dimensions, c'est-à-dire que

$$(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2 < \varepsilon,$$

si petit que soit ε, je dirai que les points Q *remplissent ou recouvrent tout l'espace*. Une propriété analogue pourra avoir lieu pour une multiplicité plane de cet espace.

Je me propose ici de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doivent satisfaire les coordonnées des points $P_1, P_2, \ldots, P_p$ pour que les points Q remplissent l'espace (théorème du § III). J'ai déjà indiqué la solution de cette question pour $n = 2$ (cas des imaginaires ordinaires) dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens* ([1]).

II. Lemme I. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les points-périodes remplissent tout l'espace (au sens indiqué plus haut), c'est qu'on puisse trouver, si petit que soit le nombre positif* α, *n systèmes* $\varepsilon_1^q, \varepsilon_2^q, \ldots, \varepsilon_n^q$ *ou* R_q $(q = 1, 2, \ldots, n)$ *de valeurs*

$$(1)\qquad \varepsilon_1^q = m_1^q \alpha_1^1 + \ldots + m_p^q \alpha_p^1, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_n^q = m_1^q \alpha_1^n + \ldots + m_p^q \alpha_p^n,$$

dont les modules soient tous plus petits que α, *et dont le déterminant n'est pas nul. Ces circonstances ne peuvent d'ailleurs se présenter que si* $p > n$.

La condition est nécessaire : en effet, si elle n'a plus lieu dès que $\alpha \leqq \beta$ (β assez petit, mais fixe), n quelconques des systèmes

$$(2)\qquad \varepsilon_1 = m_1 \alpha_1^1 + \ldots + m_p \alpha_p^1, \qquad \ldots, \qquad \varepsilon_n = m_1 \alpha_1^n + \ldots + m_p \alpha_p^n,$$

avec

$$(3)\qquad |\varepsilon_1| < \alpha, \qquad \ldots, \qquad |\varepsilon_n| < \alpha,$$

sont tels que leur déterminant d est nul. Autrement dit, tous ces systèmes satisfont à une même relation linéaire ou, si l'on veut, tous les points Q correspondants sont dans un même plan Π. Soit une droite D qui ne soit pas dans ce plan, et est déterminée par

---

([1]) 1908, p. 197, question 3437. *Voir* encore, en réponse à cette question, un résumé de la présente Note dans le même journal, 1909, p. 23.

deux points-périodes Q' et Q'' ou Ω' et Ω'' : $\Omega' - \Omega''$ représente aussi un point-période de coordonnées $\varepsilon'_1, \ldots, \varepsilon'_n$ et l'une de ces n quantités est $\geqq \beta$. Dès lors, soit un point-période Q' dans le plan Π ou dans un plan parallèle ; tout point-période non contenu dans ce plan est à une distance $\geqq \beta$ de Q', et les points-périodes ne remplissent pas tout l'espace. Il en résulte en particulier que si les points-périodes du plan Π remplissent ce plan, et si, par suite, les points-périodes remplissent une série de plans parallèles au plan Π, tous les points-périodes sont situés dans une série de plans parallèles à Π et équidistants qu'ils remplissent.

Il reste à voir que la condition est suffisante : si elle a lieu, et si

$$\Omega_q = \varepsilon_1^q e_1 + \ldots + \varepsilon_n^q e_n \qquad (q = 1, 2, \ldots, n),$$

l'ensemble des points

$$M_1 \Omega_1 + \ldots + M_n \Omega_n, \tag{4}$$

où $M_1, \ldots, M_n$ prennent toutes les valeurs entières possibles, forme dans l'espace complexe à n dimensions les sommets d'un système de parallélépipèdes dont les côtés $\sqrt{(\varepsilon_1^q)^2 + \ldots + (\varepsilon_n^q)^2}$ sont aussi petits qu'on veut, ce qui suffit à établir la propriété géométriquement au moins pour $n \leqq 3$. Analytiquement, soient le point

$$y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n,$$

et la différence

$$\begin{aligned} &M_1 \Omega_1 + \ldots + M_n \Omega_n - (y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n) \\ &\quad = e_1(M_1 \varepsilon_1^1 + \ldots + M_n \varepsilon_1^n - y_1) + \ldots + e_n(M_1 \varepsilon_n^1 + \ldots + M_n \varepsilon_n^n - y_n); \end{aligned}$$

on peut trouver n quantités $N_1, \ldots, N_n$ telles que

$$N_1 \varepsilon_1^1 + \ldots + N_n \varepsilon_1^n - y_1 = 0, \quad \ldots, \quad N_1 \varepsilon_n^1 + \ldots + N_n \varepsilon_n^n - y_n = 0,$$

puisque le déterminant des ε_r^q est $\neq 0$. Si l'on prend alors pour $M_1, \ldots, M_n$ les entiers positifs ou négatifs les plus voisins de $N_1, \ldots, N_n$ respectivement, on a

$$|M_1 \varepsilon_q^1 + \ldots + M_n \varepsilon_q^n - y_q| = |(M_1 - N_1)\varepsilon_q^1 + \ldots + (M_n - N_n)\varepsilon_q^n| < n\alpha,$$

et, par suite, les points (4) remplissent tout l'espace.

Il y a toutefois à vérifier que, si les points-périodes remplissent tout l'espace, $p > n$.

Quand $p < n$, il est bien évident que les quantités (1) sont liées, quel que soit q, par une même relation linéaire. Quand $p = n$, la même circonstance se présente si le déterminant Δ des α_i^j est nul. Si ce déterminant est $\neq 0$, les points Q forment les sommets de parallélépipèdes des périodes dont les côtés sont finis ; ces sommets ne remplissent donc pas tout l'espace. On peut le vérifier analytiquement : les différences des coordonnées de deux sommets distincts sont alors de la forme (1), et si $|\varepsilon_1^q|, \ldots, |\varepsilon_n^q|$, qui ne sont pas tous nuls, pouvaient être à la fois $< \alpha$, les équations (1) permettraient de tirer $m_1^q, \ldots, m_n^q$ entiers et non tous nuls, en fonction linéaire et homogène à coefficients fixes de $\varepsilon_1^q, \ldots, \varepsilon_n^q$, ce qui conduit à un résultat absurde.

Lemme II. — *On peut toujours trouver une infinité de systèmes d'entiers $m_1, \ldots, m_n, m_s$ non tous nuls ($s = n+1, \ldots,$ ou p) tels que les quantités*

$$(5)\quad \varepsilon_1 = m_1\alpha_1^1 + \ldots + m_n\alpha_n^1 + m_s\alpha_s^1, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n = m_1\alpha_1^n + \ldots + m_n\alpha_n^n + m_s\alpha_s^n$$

aient leurs modules $< \alpha$, si petit que soit le nombre fixe positif α, sans être identiquement nulles.

Le raisonnement n'est qu'une extension du raisonnement analogue pour le cas où $n = 2$, sans modification essentielle ([1]). Je ne le reproduis pas.

Ici d'ailleurs, lorsque le déterminant des $\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^n$ est $\neq 0$, et que $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$ sont tous $< \alpha$ sans être tous nuls, on doit supposer $m_s \neq 0$; en effet, si $m_s = 0$ quand α est très petit, les $|\varepsilon_1|, \ldots, |\varepsilon_n|$ ne peuvent avoir leur module très petit sans que les entiers $m_1, \ldots, m_n$ soient nuls : par suite $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ seraient nuls.

III. Soient le Tableau

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_1^1, & \ldots, & \alpha_p^1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \alpha_1^n, & \ldots, & \alpha_p^n, \end{array} \right.$$

à n lignes et p colonnes ($p > n$), le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^n \end{vmatrix},$$

([1]) Jordan, *loc. cit.*

et Δ_i^j ce que devient Δ quand on y remplace la $i^{\text{ième}}$ colonne par la $j^{\text{ième}}$ du Tableau (6).

Si tous les déterminants à n lignes et p colonnes du Tableau (6) sont nuls, il existe une même relation linéaire homogène entre les coordonnées $\alpha_r^1, \ldots, \alpha_r^n$ des points $\omega_r (r = 1, 2, \ldots, p)$; tous les points-périodes Q ou Ω satisfont à cette relation, c'est-à-dire sont dans un même plan : ces points ne remplissent donc pas tout l'espace.

Je vais maintenant établir cette propriété qui est le but de la présente Note :

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que les points-périodes Ω ne remplissent pas tout l'espace à n dimensions, c'est, ou bien que tous les déterminants d'ordre n du Tableau* (6) *soient nuls, ou bien si l'un d'eux, Δ par exemple, est $\neq 0$, qu'il existe entre Δ et les Δ_i^j $p-n$ relations*

$$C_1 \Delta_1^s + \ldots + C_n \Delta_n^s = C_s \Delta \qquad (s = n+1, n+2, \ldots, p), \tag{7}$$

à coefficients rationnels (*ou, si l'on veut, entiers*), $C_1, \ldots, C_n, C_s$ *non tous nuls.*

D'après ce qui précède, il ne reste à traiter que le cas où $\Delta \neq 0$.

Les équations (1), où l'on supprime l'indice q, donnent, si on les résout par rapport à $m_1, \ldots, m_n$,

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta m_1 = \eta_1 - (m_{n+1}\Delta_1^{n+1} + m_{n+2}\Delta_1^{n+2} + \ldots + m_p \Delta_1^p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Delta m_n = \eta_n - (m_{n+1}\Delta_n^{n+1} + \ldots + m_p \Delta_n^p), \end{array}\right. \tag{8}$$

où

$$\eta_r = \delta_r^1 \varepsilon_1 + \ldots + \delta_r^n \varepsilon_n, \tag{9}$$

$$\Delta = \delta_r^1 \alpha_r^1 + \ldots + \delta_r^n \alpha_r^n, \tag{10}$$

étant le développement du déterminant Δ suivant les éléments de la $r^{\text{ième}}$ colonne. De même,

$$\Delta = \delta_1^r \alpha_1^r + \ldots + \delta_n^r \alpha_n^r \tag{11}$$

est le développement de Δ suivant les éléments de la $r^{\text{ième}}$ ligne. Les égalités (9) et (11) donnent réciproquement

$$\Delta \varepsilon_1 = \alpha_1^1 \eta_1 + \ldots + \alpha_n^1 \eta_n, \qquad \ldots, \qquad \Delta \varepsilon_n = \alpha_1^n \eta_1 + \ldots + \alpha_n^n \eta_n, \tag{12}$$

puisque $\delta_1^r \alpha_1^s + \ldots + \delta_n^r \alpha_n^s = 0$ pour $r \neq s$. Il en résulte que, si l'on a

$$(13) \qquad |\varepsilon_1|, \ \ldots, \ |\varepsilon_n| \quad \text{tous} \quad < \alpha,$$

$|\eta_1|, \ldots, |\eta_n|$ sont tous $< \alpha'$ (α et α' étant simultanément aussi petits qu'on veut); et réciproquement.

Je dis que la condition énoncée au théorème est suffisante. En effet, si elle a lieu, j'additionne les égalités (8) multipliées respectivement par $C_1, \ldots, C_n$ ($C_1, \ldots, C_p$ étant choisis entiers) :

$$\begin{aligned} &\Delta(C_1 m_1 + \ldots + C_n m_n) \\ &\quad = C_1 \eta_1 + \ldots + C_n \eta_n - m_{n+1}(C_1 \Delta_1^{n+1} + \ldots + C_n \Delta_n^{n+1}) - \ldots \\ &\qquad - m_p(C_1 \Delta_1^p + \ldots + C_n \Delta_n^p), \end{aligned}$$

et, d'après (7),

$$(14) \quad \Delta(C_1 m_1 + \ldots + C_n m_n + C_{n+1} m_{n+1} + \ldots + C_p m_p) = C_1 \eta_1 + \ldots + C_n \eta_n.$$

D'après (8) et (12), on n'a pas simultanément $m_1, \ldots, m_n, \ldots, m_p$ nuls sans que $\eta_1, \ldots, \eta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ soient nuls. Si l'on suppose que (13) a lieu, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ n'étant pas tous nuls, dans le premier membre de (14), la parenthèse est alors un nombre entier; le second membre a son module aussi petit qu'on veut, quand α est assez petit, et l'on doit avoir

$$C_1 \eta_1 + \ldots + C_n \eta_n = 0,$$

ou encore, d'après (9),

$$C_1(\delta_1^1 \varepsilon_1 + \ldots + \delta_1^n \varepsilon_n) + \ldots + C_n(\delta_n^1 \varepsilon_1 + \ldots + \delta_n^n \varepsilon_n) = 0,$$

ou

$$(15) \qquad \varepsilon_1(C_1 \delta_1^1 + \ldots + C_n \delta_n^1) + \ldots + \varepsilon_n(C_1 \delta_1^n + \ldots + C_n \delta_n^n) = 0.$$

D'après (7), $C_1, \ldots, C_n$ ne sont pas tous nuls, puisque $\Delta \neq 0$; alors les coefficients de $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ dans (15) ne sont pas non plus tous nuls, puisque le déterminant des quantités $\delta_1^1, \ldots, \delta_n^1, \ldots, \delta_n^n$ n'est pas nul, d'après (9) et (12). Les points $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ satisfaisant à (13) sont dans un même plan, et la condition du théorème est bien suffisante, d'après le lemme I et sa démonstration.

Il reste à prouver que la condition énoncée au théorème est nécessaire. Je suppose donc que les $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ satisfaisant à (13) et non tous nuls soient tous liés, d'après le lemme I, par une même relation linéaire,

$$(16)\qquad A_1\varepsilon_1+\ldots+A_n\varepsilon_n=0.$$

D'après (12),

$$(A_1\alpha_1^1+\ldots+A_n\alpha_1^n)\eta_1+\ldots+(A_1\alpha_n^1+\ldots+A_n\alpha_n^n)\eta_n=0,$$

et, si

$$E_1=A_1\alpha_1^1+\ldots+A_n\alpha_1^n,\qquad\ldots,\qquad E_n=A_1\alpha_n^1+\ldots+A_n\alpha_n^n,$$

$E_1, \ldots, E_n$ ne sont pas tous nuls, puisque $\Delta\neq 0$, et

$$(17)\qquad E_1\eta_1+\ldots+E_n\eta_n=0.$$

Si l'on substitue les valeurs de $\eta_1, \ldots, \eta_n$ tirées de (8), et si l'on pose

$$(18)\qquad H_s=E_1\Delta_1^s+\ldots+E_n\Delta_n^s,$$

on a

$$(19)\qquad \Delta(E_1m_1+\ldots+E_nm_n)+m_{n+1}H_{n+1}+\ldots+m_pH_p=0.$$

Je considère l'ensemble des relations (19) pour les points-périodes satisfaisant à (13) : d'abord il n'y a pas p de ces points tels que le déterminant des nombres $m_1, \ldots, m_p$ correspondants soit $\neq 0$, puisque $E_1, \ldots, E_n$ ne sont pas tous nuls. Je suppose qu'on puisse en trouver $p-k$ et non $p-k+1$ $(k\geqq 1)$, tels que les déterminants d'ordre $p-k$ du Tableau de leurs coefficients $m_1, \ldots, m_p$ ne soient pas tous nuls. Si l'on prend arbitrairement $k-1$ autres de ces points, et un $p^{\text{ième}}$ qu'on laisse indéterminé, les $p-k$ premières des équations

$$(20)\qquad x_1m_1^1+\ldots+x_pm_p^1=0,\qquad\ldots,\qquad x_1m_1^p+\ldots+x_pm_p^p=0,$$

dont les coefficients sont les valeurs corrélatives de $m_1, \ldots, m_p$ pour ces p points, pourront se résoudre par rapport à $p-k$ $(k\geqq 1)$ des quantités $x_1, \ldots, x_p$, les autres restant arbitraires, et ces valeurs de $x_1, \ldots, x_p$ seront solutions des p équations : $p-k$ des quantités $x_1, \ldots, x_p$ s'expriment en fonction linéaire homogène des k autres. Donnant à ces k quantités des valeurs rationnelles non toutes nulles, $x_1, \ldots, x_p$ sont rationnels et ne dépendent que des $p-k$ premiers points-périodes; la dernière équation (20) montre alors qu'il existe, entre les coefficients $m_1, \ldots, m_p$ de tous les points-périodes satisfaisant à (13), au moins une même relation linéaire homogène à coefficients rationnels non tous nuls, par suite une relation analogue à coefficients entiers non tous nuls

$$B_1 m_1 + \ldots + B_p m_p = 0. \tag{21}$$

Si l'on y substitue les valeurs de $m_1, \ldots, m_n$ tirées de (8), on a

$$\Delta(B_{n+1} m_{n+1} + \ldots + B_p m_p) + B_1(\eta_1 - m_{n+1}\Delta_1^{n+1} - \ldots - m_p \Delta_1^p) + \ldots \\ + B_n(\eta_n - m_{n+1}\Delta_n^{n+1} - \ldots - m_p \Delta_n^p) = 0,$$

ou

$$B_1\eta_1 + \ldots + B_n\eta_n = m_{n+1}(B_1\Delta_1^{n+1} + \ldots + B_n\Delta_n^{n+1} - B_{n+1}\Delta) + \ldots \\ + m_p \quad (B_1\Delta_1^p \quad + \ldots + B_n\Delta_n^p \quad - B_p \quad \Delta). \tag{22}$$

Je prends pour le point-période un de ceux pour lesquels, d'après le lemme II, (13) ayant lieu, les $m_{n+1}, \ldots, m_p$ sont tous nuls, sauf m_s. Pour ce point,

$$B_1\eta_1 + \ldots + B_n\eta_n = m_s(B_1\Delta_1^s + \ldots + B_n\Delta_n^s - B_s\Delta).$$

Le premier membre ayant son module aussi petit qu'on veut, et m_s étant entier $\neq 0$, il faut

$$B_1\Delta_1^s + \ldots + B_n\Delta_n^s - B_s\Delta = 0 \qquad (s = n+1, \ldots, p).$$

Ces relations sont de la forme (7), et, d'après (22), on a

$$B_1\eta_1 + \ldots + B_n\eta_n = 0,$$

où $B_1, \ldots, B_n$ ne sont pas tous nuls, puisque $\Delta \neq 0$, sans quoi tous les B_s et $B_1, \ldots, B_n$ seraient nuls, contrairement à ce qu'on a vu. C. Q. F. D.