L. AUTONNE

Sur les groupes commutatifs de quantités hypercomplexes

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 8-29

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__8_1>

SUR LES GROUPES COMMUTATIFS DE QUANTITÉS HYPERCOMPLEXES;

PAR M. LÉON AUTONNE.

INTRODUCTION.

Dans un groupe de quantités hypercomplexes, un nombre x sera dit *pseudo-nul* (terminologie de M. Cartan ; M. Frobenius dit *racine de zéro;* M. Peirce dit nombre *nilpotent*), lorsque, sans être nul lui-même, il aura une puissance nulle.

Un groupe est pseudo-nul, lorsqu'il ne contient que des nombres pseudo-nuls.

On ramène assez facilement la construction de tous les groupes commutatifs (à multiplication commutative) à celle des groupes (ε) commutatifs et pseudo-nuls.

Le présent travail est une contribution à la théorie des groupes (ε).

Au Chapitre I, j'expose ou je rappelle les démonstrations par lesquelles on ramène la construction d'un groupe commutatif à celle d'un groupe (ε).

Au Chapitre II, je définis pour la matrice d'un groupe (ε) une *forme réduite* ou simplifiée que voici.

Les m unités ε_α, $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m\}$ de (ε) sont soumises aux formules de multiplication

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma},$$

où $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$ est une constante réelle ou complexe. La matrice du groupe est

$$\mathrm{S}(x) = (s_{\alpha\beta}), \qquad s_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(x) = \sum_\gamma x_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Par un choix convenable de variables, la matrice $\mathrm{S}(x)$ prend la *forme réduite* $\{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, k;\ k \leqq m\}$:

$$\mathrm{S}(x) = \begin{Vmatrix} 0 & & & & & & \\ p_{21} & 0 & & & & & \\ p_{31} & p_{32} & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & . & & & & \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \cdots & p_{\lambda\mu} & \cdots & p_{\lambda,\lambda-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & . \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{k\mu} & \cdots & p_{k,\lambda-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

où $p_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu}(x)$ est un tableau à g_λ lignes et g_μ colonnes, formé d'éléments $s_{\alpha\beta}$;

$$m = g_1 + \ldots + g_\lambda + \ldots + g_k.$$

Rangeons les unités ε_α (les variables x_α) en systèmes $\mathcal{E}_\lambda$ (en systèmes $\mathfrak{X}_\lambda$) de la façon suivante, par exemple, pour les x_α. $\mathfrak{X}_1$ contiendra les g_1 premières x_α, $\mathfrak{X}_2$ les g_2 suivantes ; ... ; $\mathfrak{X}_k$ contiendra les g_k dernières. Nommons $\mathfrak{P}_\lambda$ le tableau

$$p_{\lambda 1} \quad p_{\lambda 2} \quad \cdots \quad p_{\lambda\mu} \quad \cdots \quad p_{\lambda,\lambda-1}.$$

Alors $\mathfrak{P}_\lambda$: 1° *ne dépend pas des variables de* $\mathfrak{X}_\lambda$, $\mathfrak{X}_{\lambda+1}, \ldots \mathfrak{X}_k$; 2° *contient chacune des variables de* $\mathfrak{X}_{\lambda-1}$; 3° *dépend des variables de* $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_{\lambda-2}$.

De plus, *le produit d'une unité de* $\mathcal{E}_\lambda$ *par une unité de* $\mathcal{E}_\mu$ *ne dépend que des unités de* $\mathcal{E}_\rho, \mathcal{E}_{\rho+1}, \ldots, \mathcal{E}_k$, *où* ρ *est le plus petit entier supérieur à la fois à* λ *et à* μ.

Si tous les entiers g_λ sont égaux à l'unité, le groupe (ε) a sa matrice de rang maximum $m-1$ (la réciproque est vraie). Alors la forme réduite est $\{ s_{\alpha\beta} = x_{\alpha-\beta},\ s_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \leqq \beta \}$:

$$S(x) = \begin{Vmatrix} 0 & & & & & \\ x_1 & 0 & & & & \\ x_2 & x_1 & 0 & & & \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & & & \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \ldots & x_2 & x_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Au Chapitre III est développé un procédé régulier de calcul, par lequel on passe d'un groupe m-aire (ε) à un groupe $(m+1)$-aire (ζ) (commutatif et pseudo-nul). (ζ) se nomme le *prolongement* de (ε).

Tous les groupes $(m+1)$*-aires commutatifs et pseudo-nuls s'obtiennent en prolongeant des groupes* (ε) *de forme réduite.*

Bien entendu, ne sont pas envisagés comme distincts deux groupes qui ne diffèrent que par le choix des variables.

Comme application, je prolonge le groupe m-aire (ε), de rang maximum $m-1$, construit ci-dessus.

Un pareil groupe n'admet que deux prolongements (ζ) :

1° (ζ) a le rang maximum m et est analogue à (ε) ;

2° La matrice de (ζ) s'obtient en ajoutant à la matrice de (ε) une $(m+1)^{\text{ième}}$ ligne et une $(m+1)^{\text{ième}}$ colonne, composées de zéros.

Un résumé des présentes recherches a paru dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (13 juin 1910).

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE.

I. Frobenius, *Theorie der hyperkomplexen Grössen* (*Sitzungsberichte de l'Académie de Berlin*, avril 1903).

II. Cartan, *Sur les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, t. XII, 1898; on consultera surtout les paragraphes IV à VII).

III. Autonne, *Sur la fonction monogène d'une variable hypercomplexe dans un groupe commutatif* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1909).

La notation (Index, II) ou (II, Index) désignera, par exemple, le travail de M. Cartan, marqué par le chiffre romain II de la liste ci-dessus.

Pour la théorie générale des nombres complexes, on renverra à l'article de M. Cartan dans l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (t. I, vol. I, fasc. 3, avril 1908, p. 392 à 443).

CHAPITRE I.

RÉDUCTION DU PROBLÈME.

1° Conservons les définitions et notations de mon précédent travail (III, Index) et rappelons quelques propriétés d'un groupe commutatif (ε), aux n fondamentaux $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Ces n unités se répartissent en k systèmes (G_λ) ($\lambda = 1, 2, \ldots, k$), de g_λ unités respectivement, avec $n = g_1 + \ldots + g_k$. (G_1) comprend les g_1 premières unités, (G_2) comprend les g_2 unités suivantes ; ... ; (G_k) contient les g_k dernières. Les g_λ unités de (G_λ) engendrent un groupe G_λ de quantités hypercomplexes, évidemment commutatif. Le produit d'une unité de (G_λ) par une unité de (G_μ), $\mu \neq \lambda$, est zéro.

Soient $x = x_1\varepsilon_1 + \ldots + x_n\varepsilon_n$, $y = y_1\varepsilon_1 + \ldots$ deux nombres de (ε). Désignons par X_λ et Y_λ ce que deviennent x et y quand on y biffe toutes les unités qui n'appartiennent pas à (G_λ). On a évidemment

$$x = \sum_\lambda X_\lambda, \qquad y = \sum_\lambda Y_\lambda.$$

Alors

$$xy = \sum_\lambda X_\lambda Y_\lambda.$$

La connaissance de (ε) est assurée par celle des groupes G_λ dont chacun est indépendant des autres.

2° Soit G, d'ordre $n = m + 1$, un quelconque des groupes G_λ. On peut toujours choisir les variables x de façon que la matrice $S_x = S(x)$ de G ait la forme suivante, les $n = m + 1$ unités étant $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$:

$$S_x = \begin{Vmatrix} x_0 & & & & & & \\ x_1 & x_0 & & & & & \\ x_2 & s_{21} & x_0 & & & & \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & & & & \\ x_\alpha & s_{\alpha 1} & s_{\alpha 2} & \cdots & s_{\alpha,\alpha-1} & x_0 & \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdot\cdot & \\ x_m & s_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & s_{m,m-1} & x_0 \end{Vmatrix},$$

$$s_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha\beta,\alpha-1} x_{\alpha-1} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \leqq \beta, \quad \alpha \leqq \gamma, \quad a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}.$$

$$|\rho E - S(x)| = (\rho - x_0)^{m+1}, \qquad E = n\text{-aire unité}; \qquad n = m + 1.$$

3° M. Cartan (II, Index, p. 21) appelle, dans un groupe de quantités hypercomplexes, *pseudo-nul* tout nombre x tel que

$$|\rho E - S(x)| = \rho^n.$$

Pour qu'un nombre, dans le cas actuel, soit pseudo-nul, il faut et il suffit que $x_0 = 0$.

Les m unités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ engendrent un groupe *pseudo-nul*, dans lequel les formules de multiplication sont $\{\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m\}$,

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Ce groupe a donc pour matrice la m-aire

$$\mathfrak{S}(x) = \begin{Vmatrix} 0 & & & & \\ s_{21} & 0 & & & \\ s_{31} & s_{32} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdot & & \\ s_{m1} & s_{m2} & \cdots & s_{m,m-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$s_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta 1} x_1 + \ldots + a_{\alpha\beta,\alpha-1} x_{\alpha-1},$$

$$a_{\alpha\gamma\beta} = a_{\alpha\beta\gamma} = 0 \qquad \text{pour} \qquad \alpha \leqq \beta, \quad \alpha \leqq \gamma.$$

Pour la démonstration de ce qui précède je renvoie au Chapitre I de mon travail précité (III, Index).

4° La connaissance de la matrice $S(x)$ assure celle de la matrice $S(x)$.

La construction de tous les groupes commutatifs se ramène donc à celle des groupes pseudo-nuls, dont la matrice a la nature de $S(x)$

Dorénavant, (ε) désignera un pareil groupe commutatif et pseudo-nul m-aire. (ζ) désignera le groupe ($m+1$)-aire dont $S(x)$ est la matrice.

5° Soit (I, Index, § 9) une matrice n-aire invertible

$$C=(c_{gk}), \qquad |C|\neq 0, \qquad c_{gk}=\text{const. scalaire}$$

$\{g, k=0, 1, \ldots, m\}$. Faisons un changement de fondamentaux en posant

$$\varepsilon_g=\sum_k \bar{\varepsilon}_k c_{kg} \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon=C'[\bar{\varepsilon}],$$

$C'=$ la transposée de C. De là

$$x=\sum_g \varepsilon_g x_g=\sum_g \bar{\varepsilon}_g \bar{x}_g$$

et

$$\bar{x}_g=\sum_k c_{gk} x_k, \qquad \bar{x}=C[x].$$

Alors [*loc. cit.*, formules (4)]

$$S(x)=C^{-1}\,\bar{S}(\bar{x})\,C,$$

les formules de multiplication étant

$$\bar{\varepsilon}_g\bar{\varepsilon}_k=\sum_h \bar{\varepsilon}_h \bar{a}_{hgk} \qquad (g, k, h=0, 1, \ldots, m).$$

$\bar{S}(\bar{x})$ est construit avec les $\bar{a}_{ghk}$ et les $\bar{x}$, comme $S(x)$ est construit avec les x et les a_{ghk}.

Le groupe ($\bar{\zeta}$), dont les $\overline{\varepsilon_g}$ sont les unités, est le *transformé par la collinéation* C du groupe (ζ). Ces deux groupes sont *semblables* et peuvent être considérés comme n'étant pas essentiellement distincts. Les propriétés communes à tous les groupes semblables, pour une catégorie donnée de collinéations, seront particulièrement intéressantes.

6° Montrons que la relation entre la matrice $S(x)$ $(m+1)$-aire du groupe (ζ) et la matrice m-aire $S(x)$ du groupe commutatif (ε) ne change pas quand on effectue une collinéation C, laquelle : 1° ne change pas l'unité ε_0 ; 2° soumet les unités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ à une collinéation m-aire D arbitraire.

Il suffit pour cela de remarquer que la relation mutuelle de S_x et de S_x a sa source dans les relations $\varepsilon_0^2 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_\alpha \varepsilon_0 = \varepsilon_\alpha$. Or, avec l'hypothèse faite sur la collinéation C, on aura, eu égard à 5°, $\overline{\varepsilon}_0^2 = \overline{\varepsilon}_0$, $\overline{\varepsilon}_\alpha \overline{\varepsilon}_0 = \overline{\varepsilon}_\alpha$ $\{\alpha = 1, 2, \ldots, m\}$.

Il sera donc licite de soumettre le groupe (ε) à une collinéation arbitraire m-aire quelconque.

7° Je ne considérerai plus que des groupes (ε) m-aires, commutatifs et pseudo-nuls, dont la matrice m-aire sera désignée par

$$S_x = S(x) = (s_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

$$s_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta}(x) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma, \qquad a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}.$$

8° La relation $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}$ montre qu'on a

$$s_{\alpha\beta}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial f_\alpha(x)}{\partial x_\beta},$$

$$f_\alpha(x) = \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} x_\beta x_\gamma.$$

La *quadratique* f_α n'est pas autre chose que la coordonnée $(x^2)_\alpha$ de la quantité hypercomplexe x^2. La collinéation D du 6° transforme donc les f_α de la même façon que les coordonnées x_α ; autrement dit (6°)

$$\overline{x} = D[x] \qquad \text{et} \qquad \overline{f}(\overline{x}) = D[f(x)].$$

La connaissance des m quadratiques f_α assure celle de la matrice S_x et du groupe (ε). On peut donc écrire sans ambiguïté

$$(\varepsilon) = (f_1, f_2, \ldots, f_\alpha, \ldots, f_m).$$

9° Soit un groupe m-aire non commutatif, aux formules de multiplication

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m);$$

prenons sa matrice $S(x) = (s_{\alpha\gamma})$, $s_{\alpha\gamma} = \sum_\beta x_\beta a_{\alpha\beta\gamma}$, et la matrice antistrophe (I, Index, 1[er] paragraphe)

$$T(y) = (t_{\alpha\beta}), \qquad t_{\alpha\beta} = t_{\alpha\beta}(y) = \sum_\gamma y_\gamma a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Comme la multiplication est associative, on a (*loc. cit.*)

$$S(x)\,T(y) = T(y)\,S(x).$$

Si le groupe est commutatif, les matrices S et T coïncident et la condition précédente se réduit à $S(x)S(y) = S(y)S(x)$. Par suite :

Les coefficients $a_{\alpha\beta\gamma}$ dans un groupe commutatif sont des constantes, réelles ou complexes, assujetties uniquement aux relations suivantes :

1° $$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta};$$

2° *Pour x et y quelconques, les deux matrices $S(x)$ et $S(y)$ sont échangeables.*

On a

$$\sum_\rho s_{\alpha\rho}(x)\,s_{\rho\beta}(y) = \sum_\rho s_{\alpha\rho}(y)\,s_{\rho\beta}(x),$$

$$\sum_{\rho\lambda\mu} a_{\alpha\rho\lambda} a_{\rho\beta\mu} x_\lambda y_\mu = \sum_{\rho\lambda\mu} a_{\alpha\rho\mu} a_{\rho\beta\lambda} x_\lambda y_\mu,$$

$$\sum_\rho a_{\alpha\rho\lambda} a_{\rho\beta\mu} = \sum_\rho a_{\alpha\rho\mu} a_{\rho\beta\lambda} \qquad (\rho, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m).$$

CHAPITRE II.

FORME RÉDUITE POUR LA MATRICE D'UN GROUPE COMMUTATIF (ε).

10° Soit un système Ω constitué par un nombre fini ou infini de fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots$ de m variables $x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots, x_m$. Supposons que dans les ω figurent, non pas les x_α, mais seulement $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r} \leqq m$, expressions linéairement indépendantes

$$\mathrm{T}_i = \sum_\alpha t_{i\alpha} x_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mathfrak{r};\ \alpha = 1, 2, \ldots, m),$$
$$t_{i\alpha} = \text{const.}$$

On dira avec M. Frobenius (I, Index, § 6) que $\mathfrak{r}$ est le *rang linéaire* du système Ω.

Le rang linéaire $\mathfrak{r}$ d'une matrice est celui du système Ω formé par ses éléments.

Le $\mathfrak{r}$ du groupe (ε) sera celui de la matrice $S(x)$.

11° Lemme. — *On a* $\mathfrak{r} < m$.

Une proposition de M. Cartan (II, Index, 35°) dit ceci : *Dans tout groupe pseudo-nul, il existe au moins un nombre* η, $\eta \neq 0$, *tel que, pour x quelconque*, $x\eta = 0$.

On a alors

$$0 = \sum_{\beta\gamma} a_{\alpha\beta\gamma} \eta_\gamma x_\beta = \sum_\beta x_\beta s_{\alpha\beta}(\eta),$$

et, comme x est quelconque, les m^2 équations $s_{\alpha\beta}(\eta) = 0$ doivent avoir au moins une solution où les η_γ ne sont pas tous nuls. Ces m^2 équations se réduisent à $\mathfrak{r}$ distinctes et l'on a $\mathfrak{r} < m$.

C. Q. F. D.

12° Les nombres η (I, Index, § 9) constituent dans (ε) un sous-groupe invariant $(\mathfrak{I}_1)$, d'ordre $m - \mathfrak{r}$. A son tour $(\mathfrak{I}_1)$ admettra comme complémentaire un groupe (θ_1), d'ordre $\mathfrak{r}$, homomorphe à (ε).

13° A la similitude près (5°), on peut supposer le groupe $(\mathfrak{I}_1)$ défini par les $\mathfrak{r} = h$ équations $x_1 = \ldots = x_h = 0$. Alors les éléments $s_{\alpha\beta}(x) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma$ de S_x ne contiennent que $x_1, x_2, \ldots, x_h$ et $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$ pour $\gamma > h$. Mais $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta} = 0$ et $s_{\alpha\gamma}(x) = 0$ pour $\gamma > h$. La matrice S_x a ses $m - h$ dernières colonnes composées de zéros :

$$S_x = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1(x) & 0 \\ \mathfrak{L}_1(x) & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} h \\ m-h \end{array} \\ \begin{array}{cc} \quad h & \quad m-h \end{array} & \end{array}$$

où $\mathfrak{F}_1(x)$ est une matrice h-aire, tandis que $\mathfrak{L}_1(x)$ est un tableau $(m-h,\ h)$-aire, c'est-à-dire à $m-h$ lignes et h colonnes.

14° On sait (I, Index, *loc. cit.*) que $\mathfrak{F}_1(x)$ est la matrice du groupe homomorphe (θ_1), aux h variables $x_1, \ldots, x_h$.

Comme $S(x)$ et $S'(y)$ sont échangeables, il en est de même de $\mathfrak{F}_1(x)$, $\mathfrak{F}_1(y)$, car

$$S(xy) = S(yx) = S(x)S(y) = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1(x)\mathfrak{F}_1(y) & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1(y)\mathfrak{F}_1(x) & 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe (θ_1) est donc commutatif. Son polynome caractéristique est ρ^h, puisqu'il doit diviser le polynome caractéristique $|\rho E - S(x)| = \rho^m$ de $S(x)$. Le groupe (θ_1) est par suite pseudo-nul.

15° (θ_1) a les mêmes propriétés que $(\varepsilon) = (\theta_0)$, et l'on peut raisonner sur (θ_1) comme on vient de le faire sur (θ_0). Soit $h_1 < h$ le rang linéaire de (θ_1). A la similitude près, on peut admettre que $\mathfrak{F}_1(x)$ ne dépend que de $x_1, \ldots, x_{h_1}$, et que par suite

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_2(x) & 0 \\ \mathfrak{L}_2(x) & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} h_1 \\ h-h_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} h_1 & \quad h-h_1 \end{matrix} & \end{array}$$

$\mathfrak{F}_2(x)$ est la matrice d'un groupe h_1-aire (θ_2), analogue à (θ_0) et (θ_1), homomorphe à (θ_0) et (θ_1). On raisonnera sur (θ_2) comme sur (θ_0) et (θ_1).

16° Procédant ainsi de proche en proche et changeant légèrement de notations, on obtiendra successivement :

Le groupe $(\theta_0) = (\varepsilon)$ d'ordre $h_0 = m$, de rang linéaire h_1, ayant pour matrice $S = \mathfrak{F}_0$;

Le groupe (θ_1) d'ordre h_1, de rang linéaire h_2, ayant pour matrice $\mathfrak{F}_1$; ...

Le groupe (θ_λ) d'ordre h_λ, de rang linéaire $h_{\lambda+1}$, ayant $\mathfrak{F}_\lambda$ pour matrice.

De plus, $h_0 > h_1 > \ldots > h_\lambda$.

On arrivera finalement à un groupe (θ_{k-1}) d'ordre h_{k-1} et de rang linéaire $h_k = 0$. La matrice $\mathfrak{F}_{k-1}$ sera donc $\equiv 0$, composée d'éléments nuls.

Posons

$$(\varepsilon) = (\theta_0) = (\eta_k), \qquad (\theta_1) = (\eta_{k-1}), \qquad \ldots,$$
$$(\theta_\lambda) = (\eta_{k-\lambda}), \qquad \ldots, \qquad (\theta_{k-1}) = (\eta_1).$$

Puis posons

$$S_\lambda = \mathfrak{F}_{k-\lambda},$$

d'où

$$S_1 \equiv 0, \qquad S_k = \mathfrak{F}_0 = S.$$

Le groupe (η_λ) aura S_λ pour matrice, $\mathfrak{r}_\lambda = h_{k-\lambda}$ pour ordre, $\mathfrak{r}_{\lambda-1} = h_{k-\lambda+1}$ pour rang linéaire.

On désignera par g_λ la différence positive

$$g_\lambda = h_{k-\lambda} - h_{k-\lambda+1} = \mathfrak{r}_\lambda - \mathfrak{r}_{\lambda-1};$$
$$\mathfrak{r}_\lambda = \mathfrak{r}_{\lambda-1} + g_\lambda = g_1 + \ldots + g_\lambda,$$
$$h_k = m = g_1 + \ldots + g_k.$$

L'indice λ prendra les valeurs

$$\lambda = 1, 2, \ldots, k.$$

17° Sous le bénéfice des explications et notations ci-dessus, on voit que la matrice $S(x)$ peut être mise sous la *forme réduite* ci-dessous, dont l'établissement est le but de toute la présente discussion :

$$S_x = \left\| \begin{array}{cccccccc} 0 & & & & & & & \\ p_{21} & 0 & & & & & & \\ p_{31} & p_{32} & 0 & & & & & \\ \ldots & \ldots & . & & & & & \\ p_{\lambda 1} & p_{\lambda 2} & \ldots & p_{\lambda\mu} & \ldots & p_{\lambda,\lambda-1} & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & & \\ p_{k1} & p_{k2} & \ldots & p_{k\mu} & \ldots & \ldots\ldots & p_{k,k-1} & 0 \end{array} \right\|$$

[formule (o)],

où $p_{\lambda\mu} = p_{\lambda\mu}(x)$ est un tableau à g_λ lignes et à g_μ colonnes empruntées à S_x, $\{\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, k\}$; $p_{\lambda\mu} \equiv 0$ pour $\lambda \leqq \mu$.

C'est l'expression simplifiée que nous avions en vue.

18° Reprenons dans le groupe (ε) les m unités ε_α [ou les m variables x_α; ou les m quadratiques (8°) $f_{\alpha k}$] et répartissons-les [puisque $m = \sum_{\lambda=1}^{k} g_\lambda$] en k systèmes $\mathcal{E}_\lambda$ (ou $\mathcal{X}_\lambda$; ou $\mathfrak{F}_\lambda$) de la façon suivante :

$\mathcal{E}_1$ (ou $\mathcal{X}_1$, ou $\mathcal{F}_1$) contiendra les g_1 premières ε_α (ou x_α, ou f_α); $\mathcal{E}_2$ (ou $\mathcal{X}_2$, ou $\mathcal{F}_2$) contiendra les g_2 suivantes ε_α (ou x_α, ou f_α); ...; enfin $\mathcal{E}_k$ (ou $\mathcal{X}_k$, ou $\mathcal{F}_k$) contiendra les g_k dernières ε_α (ou x_α, ou f_α).

On mettra en évidence les k entiers g_λ par la notation

$$(\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_{g_1}; x_{g_1+1}, \ldots, x_{g_1+g_2}; \ldots; \\ x_{g_1+\ldots+g_{\lambda-1}+1}, \ldots, x_{g_1+\ldots+g_\lambda}; \ldots, x_m \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, on séparera :

1° Par le point et virgule, les différents systèmes $\mathcal{X}_\lambda$;

2° Par la virgule, les différentes variables x_α d'un même système $\mathcal{X}_\lambda$.

19° Si l'on envisage le tableau $p_{\lambda\mu}$ comme une lettre unique, la formule (o) ci-dessus conduit à une matrice k-aire,

$$\mathrm{P} = \begin{Vmatrix} 0 & & \\ p_{21} & 0 & \ldots \\ \ldots & . & \ldots \end{Vmatrix}$$

que l'on nomme le *canevas* (III, Index) de la matrice m-aire S_x.

Nommons $\mathfrak{P}_\lambda$ le tableau (g_λ, m)-aire qui correspond à la $\lambda^{\text{ième}}$ ligne du canevas.

Supprimons dans le canevas P les $k - \lambda$ dernières lignes (c'est-à-dire dans S_x les tableaux $\mathfrak{P}_k, \mathfrak{P}_{k-1}, \ldots, \mathfrak{P}_{\lambda+1}$) et les $k - \lambda$ dernières colonnes. On aura une λ-aire P_λ qui sera le canevas de la matrice S_λ du groupe (η_λ) (16°), d'ordre $\mathfrak{r}_\lambda = g_1 + \ldots + g_\lambda$ et de rang linéaire $\mathfrak{r}_{\lambda-1}$, avec $\mathfrak{r}_1 = 0$.

Pour passer de $(\varepsilon) = (\eta_k)$ à (η_λ) il suffit de supprimer les unités des systèmes $\mathcal{E}_{\lambda+1}, \mathcal{E}_{\lambda+2}, \ldots, \mathcal{E}_k$.

Par construction, S_λ contient chacune des variables de $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{\lambda-1}$; $\mathrm{S}_{\lambda-1}$ ne contient que les variables de $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_{\lambda-2}$; donc le tableau $\mathfrak{P}_\lambda$ contient sûrement chacune des variables de $x_{\lambda-1}$.

20° Disons que l'entier α, pris dans la suite $1, 2, \ldots, m$ *appartient à l'indice* λ, pris dans la suite $1, 2, \ldots, k$ lorsque $|\mathfrak{r}_\lambda = g_1 + g_2 + \ldots + g_\lambda|$; on a

$$\mathfrak{r}_{\lambda-1} < \alpha \leqq \mathfrak{r}_\lambda.$$

Considérons le coefficient $a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta} \neq 0$, où les entiers α, β, γ appartiennent respectivement aux indices λ, μ, ν.

$s_{\alpha\beta}(x) = \sum_\gamma a_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma$ figure effectivement dans le tableau $p_{\lambda\mu}$ du canevas P de $S(x)$. On a $p_{\lambda\mu} = 0$ pour $\lambda \leqq \mu$, donc $\lambda > \mu$ et, de même, $\lambda > \nu$.

ε_β et ε_γ figurent respectivement dans les systèmes $\mathcal{E}_\mu$ et $\mathcal{E}_\nu$. On a la formule de multiplication

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma},$$

et $a_{\alpha\beta\gamma}$ ne peut être $\neq 0$ que si λ est supérieur à μ et à ν.

Donc « le produit d'une unité du système $\mathcal{E}_\mu$ par une unité de $\mathcal{E}_\nu$ ne dépend que des unités de $\mathcal{E}_\lambda, \ldots, \mathcal{E}_k$, où λ désigne les plus petit entier qui dépasse à la fois μ et ν ».

21° Prenons une matrice invertible $D = (d_{\alpha\beta})$, m-aire à coefficients constants. Admettons qu'elle possède pour canevas une matrice k-aire $Q = (q_{\lambda\mu})$, où $q_{\lambda\mu} =$ tableau (g_λ, g_μ)-aire, avec $q_{\lambda\mu} = 0$ pour $\mu > \lambda$.

On a

$$|Q| = |q_{11}| \ldots |q_{kk}| \neq 0.$$

On reconnaît par le calcul qu'en transformant $S(x)$ par la collinéation (5°) D, « la forme réduite subsiste comme telle, les entiers g_λ étant des invariants vis-à-vis de la transformation D ».

Je puis donc considérer les transformations D comme *indifférentes à la similitude près.*

22° L'analyse précédente (12° à 18°) montre que les nombres g_λ, ou, ce qui revient au même, les nombres $\mathfrak{r} = g_1 + \ldots + g_\lambda$ sont définis indépendamment du choix des variables x. En effet, le groupe $(\varepsilon) = (\theta_0) = (\eta_k)$, d'ordre $m = \mathfrak{r}_k$ et de rang linéaire $\mathfrak{r}_{k-1}$ admet le sous-groupe invariant $(\mathfrak{I}_1)$, formé par les nombres ζ tels que, pour x quelconque dans (η_k), $x\zeta = 0$. $(\mathfrak{I}_1)$ a pour groupe complémentaire dans (η_k) le groupe $(\theta_1) = (\eta_{k-1})$ d'ordre $\mathfrak{r}_{k-1}$ et de rang linéaire $\mathfrak{r}_{k-2}$. (θ_1) admet le sous-groupe invariant $(\mathfrak{I}_2)$ formé par les nombres $\zeta^{(1)}$ de (θ_1), tels que, pour $x^{(1)}$ quelconque dans (θ_1), on ait $x^{(1)}\zeta^{(1)} = 0$. $(\mathfrak{I}_2)$ a pour complémentaire dans (θ_1) le groupe $(\theta_2) = (\eta_{k-2})$ d'ordre $\mathfrak{r}_{k-2}$ et de rang linéaire $\mathfrak{r}_{k-3}$, et ainsi de suite.

23° Nous allons étudier les groupes (ε) où $g_1 = \ldots = g_k = 1$,

$k = m$. Alors (18°, *in fine*)

$$(\varepsilon) = (x_1; x_2; \ldots; x_\alpha, \ldots; x_m).$$

Les systèmes (18°) $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{X}_\alpha$, $\mathcal{F}_\alpha$ ne comprennent respectivement que ε_α, x_α et f_α. En vertu de 20°, on a

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_\rho a_{\rho\beta\gamma} + \varepsilon_{\rho+1} a_{\rho+1\beta\gamma} + \ldots + \varepsilon_m a_{m\beta\gamma},$$

où ρ est le plus petit entier supérieur à la fois à β et à γ.

Lemme. — *Pour x quelconque, on a $x^m \neq 0$.*

Un calcul simple montre qu'on a

$$x^\alpha = \varepsilon_\alpha \xi_\alpha + \varepsilon_{\alpha+1} \xi_{\alpha,\alpha+1} + \ldots + \varepsilon_m \xi_{\alpha m} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m;\ \xi_1 = x_1).$$

Dans le produit $x^{\alpha+1} \equiv x^\alpha x$ le terme $\varepsilon_{\alpha+1} \zeta_{\alpha+1}$ ne peut provenir que de l'expression

$$\varepsilon_\alpha \xi_\alpha \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} x_\beta \varepsilon_\beta = \xi_\alpha \sum_\beta x_\beta \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = \xi_\alpha \sum_\beta x_\beta [\varepsilon_{\alpha+1} a_{\alpha+1,\alpha\beta} + \varepsilon_{\alpha+2}(\ldots) + \ldots];$$

d'où

$$\xi_{\alpha+1} = \xi_\alpha \sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} a_{\alpha+1,\alpha\beta} x_\beta.$$

L'expression $f_{\alpha+1}$ ne dépend que des variables $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$, ainsi que $s_{\alpha+1,\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\gamma}$. Donc

$$\sum_{\beta=1}^{\beta=\alpha} a_{\alpha+1,\alpha\beta} x_\beta = s_{\alpha+1,\alpha}(x),$$

$$\xi_{\alpha+1} = \xi_\alpha s_{\alpha+1,\alpha};$$

et, par récurrence,

$$\xi_\alpha = s_{\alpha,\alpha-1} s_{\alpha-1,\alpha-2}, \ldots, s_{21} x_1,$$
$$\xi_m = s_{m,m-1}, \ldots, s_{21} x_1,$$
$$x^m = \varepsilon_m \xi_m.$$

Or, la quadratique f_α contient sûrement l'unique variable $x_{\alpha-1}$ du système $\mathcal{X}_{\alpha-1}$,

$$s_{\alpha,\alpha-1} = \frac{1}{2} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_{\alpha-1}} \neq 0.$$

Alors $\xi_\alpha \neq 0$ et $\xi_m \neq 0$, $x^m \neq 0$. C. Q. F. D.

On peut donc trouver dans le groupe (ε) un nombre

$$d = \varepsilon_1 d_1 + \ldots + \varepsilon_m d_m$$

tel que $d^m \neq 0$.

24° De ce que $s_{\alpha,\alpha-1}(x) \neq 0$ (23°) on conclut que le mineur $(m-1)$-aire

$$\begin{vmatrix} s_{21} & & & \\ s_{31} & s_{32} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ s_{m1} & \ldots & \ldots & s_{m,m-1} \end{vmatrix}$$

du déterminant $|S(x)|$ est $\neq 0$. La matrice S_x, qui n'est pas invertible, a donc le rang maximum $m-1$.

Si donc on prend dans (ε) le nombre d tel que $d^m \neq 0$ et si l'on pose $D = S_d$, l'équation de moindre degré à laquelle satisfait D est $D^m = 0$.

Lemme. — *Les m quantités $d, d^2, \ldots, d^m$ sont linéairement indépendantes.*

Autrement, on aurait

$$0 = l_1 d + l_2 d^2 + \ldots + l_m d^m = f(d),$$
$$f(u) = l_1 u + \ldots + l_m u^m, \qquad l_1, \ldots, l_m = \text{const.};$$
$$0 = S[f(d)] = f(D), \qquad f(u) = u^m \qquad \text{et} \qquad d^m = 0,$$

ce qui est absurde.

On a, par un calcul direct,

$$(1) \qquad d^\alpha = \sum_\beta \varepsilon_\beta d_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta, = 1, \ldots, m).$$

La matrice $(d_{\alpha\beta})$ est invertible, sans quoi on aurait entre les d^α au moins une relation linéaire et homogène. On peut résoudre, par rapport aux ε_β, les équations (1) et prendre pour les m unités de (ε) les m puissances $d, d^2, \ldots, d^m$. Les formules de multiplication deviennent $d^\beta d^\gamma = d^{\beta+\gamma}$.

25° Tout cela revient à faire, dans (ε), $\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \varepsilon_{\beta+\gamma}$.

Comme, en général,

$$\varepsilon_\beta \varepsilon_\gamma = \sum_\alpha \varepsilon_\alpha a_{\alpha\beta\gamma},$$

on a

$$\alpha_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta + \gamma, \\ 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta + \gamma, \end{cases}$$

$$s_{\alpha\beta} = x_{\alpha,\alpha-\beta}, \qquad f_\alpha = \sum_\beta x_\beta x_{\alpha-\beta} \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, \alpha - 1),$$

$$S(x) = \begin{Vmatrix} 0 & & & & & & \\ x_1 & 0 & & & & & \\ x_2 & x_1 & 0 & & & & \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot & & & & \\ x_{m-1} & x_{m-2} & \cdot & \ldots & x_2 & x_1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Telle est l'expression du groupe (ε) pour lequel tous les entiers g_λ sont égaux à 1.

On a vu que pour un pareil groupe la matrice $S(x)$ a son rang maximum $r = m - 1$ (24°).

La réciproque est vraie.

En effet, mettons $S(x)$ sous forme réduite. Dans le déterminant $|S(x)|$ l'unique mineur $(m-1)$-aire

$$\begin{vmatrix} s_{21} & & & \\ s_{31} & s_{32} & & \\ \ldots & \ldots & & \\ s_{m1} & s_{m2} & \ldots & s_{m,m-1} \end{vmatrix} = s_{21} s_{32} \ldots s_{m,m-1},$$

qui ne soit pas identiquement nul, doit être $\neq 0$, pour que r soit égal à $m - 1$.

Donc aucun des éléments de la diagonale de S_x, constituée par les expressions $s_{\alpha,\alpha-1}$, n'est zéro. Or, sur la forme réduite (17°), on s'assure immédiatement que cela est possible seulement si tous les g_λ sont égaux à l'unité.

26° On va maintenant exposer un procédé régulier de calcul qui permet de construire tous les groupes $(m+1)$-aires, dès qu'on connaît la forme réduite de tous les groupes m-aires.

CHAPITRE III.

PROLONGEMENT D'UN GROUPE.

27° Je dirai qu'un groupe $(m+1)$-aire (ζ) (commutatif et pseudo-nul) *a la forme* Z, si le produit $x\varepsilon_{m+1}$ de la dernière unité ε_{m+1} par un nombre quelconque x de (ζ) est zéro.

Tout groupe peut être mis sous la forme Z, car tout groupe peut acquérir la forme réduite, laquelle n'est qu'un cas particulier de la forme Z.

Un groupe conserve la forme Z après transformation par une collinéation (5°)

$$C = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & 1 \end{array} & \end{array},$$

laquelle, laissant ε_{m+1} fixe, transforme les m autres unités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ suivant la collinéation m-aire quelconque D.

28° Pour que $\varepsilon_{m+1} x = 0$ pour x quelconque, il faut et il suffit qu'on ait, $\mathcal{S}(x)$ étant la matrice de (ζ),

$$\mathcal{S}(\varepsilon_{m+1}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m+1),$$
$$0 = a_{\rho\sigma, m+1} = a_{\rho, m+1, \sigma}.$$

Alors, comme on le voit de suite :

1° x_{m+1} ne figure pas dans les éléments de $\mathcal{S}(x)$;
2° La dernière colonne de $\mathcal{S}(x)$ est formée de zéros.

La matrice $\mathcal{S}(x)$ de (ζ) est

$$\mathcal{S}(x) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} S(x) & 0 \\ \mathcal{L}(x) & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{cc} m & 1 \end{array} & \end{array}, \qquad S(x) = [s_{\alpha\beta}(x)],$$

où la matrice m-aire $S(x)$ ne dépend pas de x_{m+1}, tandis que $\mathcal{L}(x)$ est un tableau à une ligne et à m colonnes.

29° Raisonnons sur $S(x)$ comme nous avons raisonné au 14° sur la matrice $\mathcal{F}_1(x)$ et reportons-nous à des théories connues (Index, I, § 9). On voit immédiatement que $S(x)$ est la matrice d'un groupe m-aire (ε), aux m unités ε_α, homomorphe à (ζ).

Je dirai que le groupe (ζ) est le *prolongement* du groupe (ε), qu'on passe de (ε) à (ζ) par *prolongement*, qu'on obtient (ζ) en *prolongeant* (ε), etc.

30° (ζ) reste le prolongement de (ε), quand on transforme les deux groupes par les collinéations C et D du 27°. On peut choisir D de façon à mettre (ε) sous la forme réduite. D'ailleurs (27°)

tout groupe peut être mis sous la forme Z, et la présente discussion se résume dans la proposition suivante :

Tous les groupes $(m+1)$*-aires s'obtiennent, à la similitude près, en prolongeant tous les groupes m-aires, mis sous forme réduite.*

On construira ainsi, au moyen du prolongement, par récurrence, tous les groupes.

31° Voici comment on opérera le calcul effectif du groupe prolongé (ζ), le groupe (ε) étant supposé connu et pris sous forme réduite.

La matrice $\mathcal{S}(x)$ de (ζ) n'a à satisfaire qu'à la condition (9°) d'être échangeables à $\mathcal{S}(y)$, pour x et y quelconques. La matrice $S(x)$ de (ε) satisfait déjà à la condition d'être échangeable à $S(y)$. Il ne reste donc plus à écrire que les égalités

$$\sum_\rho s_{m+1,\rho}(x)\, s_{\rho\beta}(y) = \sum_\rho s_{m+1,\rho}(y)\, s_{\rho\beta}(x),$$

c'est-à-dire, identifiant le coefficient de $x_\lambda y_\mu$ de part et d'autre.

$$\text{(o)} \qquad \sum_\rho a_{m+1,\rho\lambda}\, a_{\rho\beta\mu} = \sum_\rho a_{m+1,\rho\mu}\, a_{\rho\beta\lambda},$$

où $\lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m$, tandis que $\rho = \beta+1, \ldots, m$, puisque $s_{m+1,m+1}(x) \equiv 0$ et que $s_{\rho\beta}(x) \equiv 0$, dans une forme réduite, pour $\rho \leqq \beta$.

Posons $a_{m+1,\rho\lambda} = b_{\rho\lambda}$. On aura

$$\text{(1)} \qquad \sum_\rho b_{\rho\lambda}\, a_{\rho\beta\mu} = \sum_\rho b_{\rho\mu}\, a_{\rho\beta\lambda}.$$

Dans ces égalités ne sont inconnus que les coefficients $b_{\rho\lambda}$ de la forme quadratique $f_{m+1}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

Nommons B la matrice m-aire symétrique $B = (b_{\rho\lambda})$, $b_{\rho\lambda} = b_{\lambda\rho}$.

On n'a plus qu'à résoudre, par rapport aux $\frac{1}{2}m(m+1)$ inconnues b, le système (1) de m^3 équations linéaires et homogènes, pour $\beta, \lambda, \mu = 1, 2, \ldots, m$.

32° Comme application de ce qui précède, je vais prolonger le groupe m-aire (ε), de rang maximum $m-1$, étudié déjà au Chapitre II.

$S(x)$ est sous forme réduite;

$$(\varepsilon) = (x_1; x_2; \ldots; x_{m-1}; x_m) \quad \text{et} \quad (\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, m),$$

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \alpha \neq \beta + \gamma, \\ 1 & \text{pour} \quad \alpha = \beta + \gamma. \end{cases}$$

Résolvons donc par rapport aux inconnues b le système des m^3 équations (31°) linéaires et homogènes, $\{\beta, \lambda, \mu, \rho, \sigma = 1, 2, \ldots, m\}$,

$$(0) \qquad \sum_{\rho} b_{\rho\lambda} a_{\rho\beta\mu} = \sum_{\sigma} b_{\sigma\mu} a_{\sigma\beta\lambda}.$$

33° Suivant le choix des entiers β, λ et μ on pourra répartir les m^3 équations (0) en trois sortes :

Première sorte : $\beta + \lambda \leqq m$, $\beta + \mu \leqq m$. — Alors on pourra faire dans le premier membre de (0) $\rho = \beta + \mu$, et dans le second $\sigma = \beta + \lambda$. Le premier membre se réduit à $b_{\lambda,\beta+\mu}$ et le second à $b_{\mu,\beta+\lambda}$ et

$$(1) \qquad b_{\lambda,\beta+\mu} = b_{\mu,\beta+\lambda}.$$

Deuxième sorte : $\beta + \mu > m$ (ou $\beta + \lambda > m$) avec $\beta + \lambda \leqq m$ (ou $\beta + \mu \leqq m$). — Alors dans le premier membre (dans le second membre) de (0), il n'existera pas de terme en $b_{\beta+\mu,\lambda}$ (ou en $b_{\beta+\lambda,\mu}$). Ce premier (second) membre se réduit à zéro; il viendra

$$(2) \qquad 0 = b_{\beta+\lambda,\mu} \qquad (\text{ou } b_{\beta+\mu,\lambda} = 0).$$

Troisième sorte : $\beta + \lambda > m$, $\beta + \mu > m$. — La relation (0) se réduit à une identité, tous les a qui y figurent étant nuls.

34° Reprenons la matrice inconnue $B = (b_{\alpha\beta})$ des b. Nommons-y *transversale* j la file d'éléments, tels que $\alpha + \beta = j$. Les transversales sont perpendiculaires à la diagonale principale et se répartissent en deux catégories :

Première catégorie : $j \leqq m + 1$. — La transversale a, avec la première colonne de B, un élément $b_{j-1,1}$ commun.

Deuxième catégorie : $j > m + 1$. — La transversale n'a pas d'élément commun avec la première colonne de B. Si on pose

$j = m + 1 + h$, la transversale j a, avec la dernière ligne de B, l'élément $b_{m,h+1}$ commun.

On voit que les relations (1) et (2) du 33° n'ont lieu qu'entre éléments d'une même transversale.

35° Supposons d'abord que la transversale considérée est de la première catégorie. Je dis que *tous les éléments de la transversale sont égaux.*

Sur la transversale, les divers éléments $b_{\lambda,j-\lambda} = b_{j-\lambda,\lambda}$ sont définis par les valeurs $\lambda = 1, 2, \ldots, j-1$ de l'indice λ.

Prenons à volonté deux éléments $b_{\beta+\lambda,\mu}$ et $b_{\beta+\mu,\lambda}$, avec λ et μ choisis à volonté. Pour qu'on ait la relation (1) du 33°

$$b_{\beta+\lambda,\mu} = b_{\beta+\mu,\lambda} \quad \text{ou} \quad b_{j-\mu,\mu} = b_{j-\lambda,\lambda} \quad (j = \lambda + \mu + \beta),$$

il suffit de montrer (33°) que

$$\beta + \lambda \leqq m, \quad \beta + \mu \leqq m \quad (j - \mu \leqq m, j - \lambda \leqq m).$$

Comme la transversale est de la première catégorie, on a $j \leqq m+1$, $j = m + 1 - h$, h non négatif.

Alors

$$m + 1 - h - \lambda \leqq m, \quad m + 1 - h - \mu \leqq m \quad (\lambda \geqq 1 - h, \mu \geqq 1 - h),$$

ce qui a toujours lieu.

On a donc, sur une transversale de première catégorie,

$$b_{j-\lambda,\lambda} = K_j.$$

36° Prenons une transversale de deuxième catégorie, $j > m+1$, $j = m + 1 + h$, h positif.

Les éléments $b_{j-\mu,\mu} = b_{\mu,j-\mu}$ de la transversale sont fournis par les valeurs $\mu = h + 1, h + 2, \ldots, m$ ou $\mu \geqq h + 1$.

Choisissons à volonté l'élément sur la transversale, c'est-à-dire l'indice μ. Pour obtenir la relation (2) du 33°

$$0 = b_{\beta+\lambda,\mu} = b_{j-\mu,\mu} \quad (j = \lambda + \mu + \beta),$$

il suffit d'avoir deux conditions satisfaites :

(I) $\quad \beta + \lambda = j - \mu \leqq m \quad$ ou $\quad m + 1 + h - \mu \leqq m \quad \mu \geqq 1 + h,$

ce qui a effectivement lieu ;

(II) $\quad \beta + \mu > m, \quad j - \lambda > m, \quad m + 1 + h - \lambda > m, \quad \lambda < 1 + h.$

Or

$$\lambda = j - \beta - \mu = m + 1 + h - \beta - \mu$$

et

$$m + 1 + h - \beta - \mu < 1 + h, \qquad \beta > m - \mu.$$

Comme on dispose de l'entier β, on peut satisfaire à cette dernière inégalité.

Donc :

Sur une transversale de deuxième catégorie, les éléments sont tous égaux à zéro.

37° La nature de la matrice m-aire $B = (b_{\alpha\beta})$ est maintenant connue. On a

$$K_j = b_{j-\beta,\beta} \quad \text{pour} \quad j \leqq m+1,$$
$$0 = b_{j-\beta,\beta} \quad \text{pour} \quad j > m+1.$$

Alors la quadratique

$$f_{m+1} = \sum_{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta$$

est

$$f_{m+1} = \sum_{j=2}^{j=m+1} K_j \sum_{\beta=1}^{\beta=j-1} x_\beta x_{j-\beta},$$

c'est-à-dire (25°)

$$f_{m+1} = K_2 f_2 + \ldots + K_m f_m + K_{m+1} \psi,$$
$$\psi = \sum_{\beta=1}^{\beta=m} x_\beta x_{m+1-\beta} \qquad \text{et} \qquad f_1 = 0.$$

Posons (5°) $\overline{x} = C[x]$, $\overline{x}_\alpha = x_\alpha \, (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$,

$$\overline{x}_{m+1} = x_{m+1} + \sum_\alpha c_\alpha x_\alpha.$$

Le groupe m-aire $(\mathcal{C})$ ne change pas. On a (5°)

$$\overline{f}_\alpha(\overline{x}) = f_\alpha(x) = f_\alpha(\overline{x}),$$
$$\overline{f}_{m+1}(\overline{x}) = f_{m+1}(x) + \sum_\alpha c_\alpha f_\alpha(\overline{x}) = K_{m+1}\,\psi(\overline{x}) + \sum_\alpha f_\alpha(\overline{x}) \left\{ K_\alpha + c_\alpha \right\}.$$

Or il est licite de choisir les c_α de façon que $c_\alpha + K_\alpha = 0$. Le groupe $(\overline{\zeta})$ est semblable à (ζ).

On peut donc, à la similitude près, faire simplement

$$f_{m+1} = K_{m+1}\psi.$$

38° Si $K_{m+1} \neq 0$, on peut supposer $K_{m+1} = 1$ et

$$f_{m+1} = x_1 x_m + x_2 x_{m-1} + \ldots,$$
$$s_{m+1,\beta} = x_{m+1-\beta}.$$

Le groupe (ζ) est, comme (ε), de rang maximum.

Si $K_{m+1} = 0$, il vient $f_{m+1} = 0$.

39° Toute la discussion se résume dans une proposition unique :

Le groupe de rang maximum et d'ordre m ne fournit, par prolongement et à la similitude près, que deux groupes $(m+1)$*-aires :*

le groupe de rang maximum;

le groupe dont la matrice s'obtient en ajoutant, à la matrice du groupe m-aire, une $(m+1)^{\text{ième}}$ *ligne et une* $(m+1)^{\text{ième}}$ *colonne, composées de zéros.*