BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DENJOY

Sur les systèmes complets de fractions

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 175-222

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__175_1>

SUR LES SYSTÈMES COMPLETS DE FRACTIONS;

PAR M. ARNAUD DENJOY.

M. Hurwitz a le premier (¹) déduit de la théorie des fractions continues le théorème suivant :

Si, autour de chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$, *on forme l'intervalle* $\frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ à $\frac{p}{q} + \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$, *tout nombre irrationnel est inté-*

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XXXIX.

rieur à une infinité de ces intervalles. Quelque petit que soit le nombre positif α, il existe des nombres irrationnels (¹) *qui ne sont intérieurs qu'à un nombre limité d'intervalles :*

$$\frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5+\alpha q^2}} \text{ à } \frac{p}{q} + \frac{1}{\sqrt{5+\alpha q^2}}.$$

Appelons avec M. Borel (²) *intervalle canonique attaché à la* FRACTION $\frac{p}{q}$, l'intervalle $\frac{p}{q} - \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$ à $\frac{p}{q} + \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}$.

Nous désignerons souvent cet intervalle par la notation $\mathrm{I}\left(\frac{p}{q}\right)$.

Si l'on exige que la fraction $\frac{p}{q}$ soit irréductible, un nombre rationnel ne peut être intérieur qu'à un nombre fini d'intervalles canoniques. En effet, pour que $\frac{r}{s}$ soit intérieur à l'intervalle canonique de $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q}$ étant irréductible, il faut d'abord $q\sqrt{5} < s$ (avec la solution supplémentaire $q = s$, $p = r$), ce qui limite le nombre des valeurs de q.

Mais, dans des questions d'approximation par des fractions de dénominateurs donnés ou compris entre certaines limites, il est naturel de ne pas s'astreindre à utiliser uniquement des fractions irréductibles. Si l'on convient de considérer comme non identiques deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$, même dans le cas où elles sont égales, tant qu'on n'a pas simultanément $p = p'$, $q = q'$; si l'on remarque de plus que la définition de l'intervalle canonique d'une fraction ne suppose pas l'irréductibilité de cette fraction, alors un nombre rationnel quelconque coïncide avec une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ *distinctes* formellement, sinon par leurs valeurs, donc est le centre d'une infinité d'intervalles canoniques différents.

Donc, moyennant ces précisions, tout nombre, rationnel ou irrationnel, est intérieur à une infinité d'intervalles canoniques.

(¹) Si α est suffisamment petit, ces nombres sont tous de la forme $\frac{\mathrm{A}u+\mathrm{B}}{\mathrm{C}u+\mathrm{D}}$, avec $\mathrm{AD}-\mathrm{BC} = \pm 1$, $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(²) *Journal de Mathématiques*, 3ᵉ série, t. IX, 1903; *Leçons sur la croissance*, p. 143 et suiv.

Rappelons la terminologie employée par M. Borel (*loc. cit.*) et que nous adopterons dans cette Note.

Nous dirons que deux fractions (réductibles ou non) sont *adjacentes*, si leurs intervalles canoniques ont une partie commune. La condition nécessaire est suffisante pour que les deux fractions $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ soient adjacentes est évidemment :

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right| < \left(\frac{1}{q^2}+\frac{1}{s^2}\right)\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

L'égalité entre les deux membres étant impossible, deux intervalles canoniques peuvent être complètement extérieurs l'un à l'autre, ou avoir une partie commune, mais ne peuvent en aucun cas être juxtaposés.

Si l'on a la relation :

$$\left|\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right| = \frac{1}{qs},$$

la condition nécessaire et suffisante pour que les deux fractions soient adjacentes est, si $s > q$,

$$\frac{s}{q} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Enfin, nous dirons qu'un nombre α est *normalement approché* par une fraction $\frac{p}{q}$, si α appartient à l'intervalle canonique de $\frac{p}{q}$.

Puisque tout nombre, rationnel ou irrationnel, est intérieur à une infinité d'intervalles canoniques distincts, il résulte d'un théorème de M. Borel (¹) qu'*il est possible de choisir, parmi les intervalles canoniques relatifs à toutes les fractions* (réductibles ou non), *certains d'entre eux, en nombre limité, recouvrant entièrement le segment* $0-1$, *et de plus d'effectuer ce choix d'une infinité de manières distinctes.*

Il faut entendre par là qu'il est possible de définir une infinité de systèmes d'intervalles canoniques $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ tels que : 1° quel que soit n, S_n est formé par la réunion d'un nombre limité d'intervalles canoniques ; 2° quel que soit n, tout point du

(¹) *Thèse* (note finale) et *Leçons sur la théorie des fonctions*, Chap. III.

segment o — 1, extrémités comprises, est intérieur à un au moins des intervalles qui constituent S_n; 3° quels que soient n et n', aucun des intervalles canoniques qui composent S_n ne coïncide avec un de ceux qui composent $S_{n'}$.

Nous appellerons *système complet de fractions*, pour l'intervalle $a\,b$, tout système d'un nombre fini de fractions dont les intervalles canoniques recouvrent entièrement l'intervalle ab. Nous dirons aussi que ces intervalles canoniques forment un système complet sur ab, et nous désignerons par la même lettre indifféremment un système complet de fractions ou le système complet des intervalles canoniques correspondant à ces fractions.

Il est évident qu'on saura former une infinité de systèmes complets S_1, S_2, ..., S_n, ... *distincts*, dès qu'on saura former un système complet S dont les fractions aient un dénominateur supérieur à un nombre donné quelconque A et évaluer la limite supérieure $\varphi(A)$ des dénominateurs des fractions de S. En effet, il suffira alors de choisir une suite indéfinie de nombres A_1, A_2, ..., A_n, ..., tels que $A_{n+1} > \varphi(A_n)$ et de prendre pour S_n un système complet dont les fractions aient leurs dénominateurs compris entre A_n et A_{n+1}.

M. Borel (*loc. cit.*) a résolu ce problème en prouvant qu'on peut toujours prendre $\varphi(A) = 15\,A^2$, si A surpasse 10.

Le théorème de M. Borel est donc le suivant :

Les fractions dont les dénominateurs sont compris entre A *et* $15\,A^2$ *forment* (si A surpasse 10) *un système complet pour tout intervalle.*

Je me propose dans cette Note de préciser le théorème de M. Borel. Ce théorème est imparfaitement précis ([1]) en ceci qu'il nous fournit un système *surabondamment complet.* J'entends par là qu'il est possible de supprimer certaines fractions, sans que le système cesse d'être complet ; ou encore qu'il existe au moins un intervalle canonique du système dont aucun point ne lui appartient en propre. En fait, la plupart des intervalles sont dans ce cas.

D'un autre point de vue, un même point appartient en général à

([1]) M. Borel signale cette imperfection du système complet qu'il propose. Voir *Journal de Mathématiques*, p. 342, note ([2]).

plusieurs intervalles canoniques du système. Mais, le nombre de ces intervalles varie avec le point choisi, sans que le théorème de M. Borel nous renseigne sur cette variation.

Je détermine dans cette Note *un système* STRICTEMENT *complet*, j'entends par là un système dont il n'est pas possible de supprimer aucun intervalle sans que le système cesse de recouvrir entièrement le segment o — 1. Voici en quoi réside l'intérêt de cette détermination.

On sait comment s'établit la notion de répartition d'un ensemble infini, s'il est dénombrable. Ayant adopté un ordre d'énumération pour les éléments de cet ensemble, on examine la répartition des n premiers, et l'on recherche les caractères limites de cette répartition quand n croît indéfiniment.

S'il s'agit des fractions, il est particulièrement intéressant de les classer dans l'ordre des dénominateurs croissants. Nous appellerons *hauteur* d'une fraction la valeur de son dénominateur. Il y a entre o et 1, l'un et l'autre inclus, $h+1$ fractions de hauteur h, savoir :

$$\frac{0}{h}, \frac{1}{h}, \ldots, \frac{h-1}{h}, \frac{h}{h}.$$

On éclaire d'une vive lumière la répartition des nombres rationnels inférieurs à une hauteur donnée en déterminant, comme nous le faisons dans cette Note, sur le segment o — 1, *le système* STRICTEMENT COMPLET LE PLUS SIMPLE *dont toutes les fractions ont une hauteur au moins égale à un entier* A. (Nous appellerons *hauteur d'un système de fractions* la plus petite valeur des hauteurs de ces fractions.)

Ce système Σ est caractérisé par les propriétés suivantes : d'une part, d'après le sens attribué aux mots *strictement complet*, la suppression d'un seul des intervalles canoniques qui le composent le rend incomplet, c'est-à-dire met à découvert une portion du segment o — 1, en sorte que tout intervalle du système comprend une partie qu'il est seul à recouvrir. D'autre part, il est plus simple que tout autre système S de hauteur supérieur à Σ, au sens suivant : ou bien S contient toutes les fractions de Σ, ou bien pour toute fraction φ de Σ n'appartenant pas à S, il y a un intervalle i, tel que tout point de i soit normalement approché par φ et non pas par une fraction de S plus simple que φ. En général, même, la fraction la plus basse de hauteur supérieure à $A-1$ approchant un nombre α quelconque situé dans l'intervalle $0-1$, fera partie de Σ.

Relativement à la répartition des nombres rationnels, cette étude confirme l'idée suivante qui m'avait servi de guide :

Les nombres sont d'autant mieux isolés que leur définition est plus simple. D'une façon précise, supposons qu'un nombre α ne soit approché normalement par aucune fraction $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ $(\mu_1 Q > A-1)$ égale à une fraction irréductible $\frac{P}{Q}$ de hauteur inférieure à A. Alors, pour l'approcher normalement par des fractions de hauteur supérieure à $A-1$, il faudra prendre des fractions d'autant plus hautes que la fraction $\frac{P}{Q}$ la plus voisine de α sera plus simple (moins haute) et que α en sera plus proche.

Il est naturel de mesurer l'*isolement* de $\frac{P}{Q}$ (ou la difficulté d'approcher $\frac{P}{Q}$) par la hauteur des fractions approchant normalement les nombres voisins de $\frac{P}{Q}$, ou plus nettement, par l'ordre d'infinitude de cette hauteur relativement à A.

Moyennant cette convention, parmi les nombres rationnels, les nombres entiers sont les mieux isolés, les nombres $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots,$ sont moins bien isolés que $0, 1$, mais le sont mieux que $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots.$ Ceux-ci le sont mieux que $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \ldots,$ etc.

La détermination du système strictement complet le plus simple reposera sur le lemme suivant :

Lemme. — *Si $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$ sont deux fractions telles que*

$$|PQ' - QP'| = 1,$$

les fractions

$$\ldots, \quad F_\lambda = \frac{\lambda P + P'}{\lambda Q + Q'}, \quad F_{\lambda+\frac{1}{2}} = \frac{\overline{2\lambda+1}\,P + 2P'}{\overline{2\lambda+1}\,Q + 2Q'},$$
$$F_{\lambda+1} = \frac{(\lambda+1)P + P'}{(\lambda+1)Q + Q'}, \quad \ldots,$$

où $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$, et *qui sont ainsi rangées par ordre de grandeurs* (décroissantes ou croissantes, suivant les cas) *forment une suite telle que* DEUX FRACTIONS CONSÉCUTIVES SONT ADJACENTES, SANS QUE DEUX FRACTIONS NON CONSÉCUTIVES LE SOIENT, *si* $\frac{Q'}{Q} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Si $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *la propriété subsiste à la condition de supprimer la seconde fraction* $F_{\frac{3}{2}} = \frac{3P+2P'}{3Q+2Q'}$.

1° Les fractions $\frac{\lambda P + P'}{\lambda Q + Q'}$, $\frac{(\lambda+1)P+P'}{(\lambda+1)Q+Q'}$, sont non adjacentes, sauf, pour $\lambda = 1$, $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Si $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ désignent ces deux fractions, on a

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a'}{b'}\right| = \frac{N}{bb'},$$

N étant égal à la valeur absolue du déterminant

$$\begin{vmatrix} \lambda P + P' & \lambda Q + Q' \\ (\lambda+1)P + P' & (\lambda+1)Q + Q' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ \lambda+1 & 1 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Or, la condition pour que deux fractions $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ dont la différence est $\pm \frac{1}{bb'}$ soient adjacentes, est, si $b' > b$:

$$\frac{b'}{b} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Cette condition nous donne :

$$\frac{(\lambda+1)Q + Q'}{\lambda Q + Q'} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ou

$$\lambda + \frac{Q'}{Q} < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ceci ne peut avoir lieu que si

$$\lambda = 1, \ \frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2° Les fractions $\frac{(2\lambda+1)P+2P'}{(2\lambda+1)Q+2Q'}$, $\frac{(2\lambda+3)P+2P'}{(2\lambda+3)P+2Q'}$ ne sont jamais adjacentes.

Le déterminant

$$\begin{vmatrix} (2\lambda+1)P+2P' & (2\lambda+3)P+2P' \\ (2\lambda+1)Q+2Q' & (2\lambda+3)Q+2Q' \end{vmatrix}$$

est égal à

$$\begin{vmatrix} P & P' \\ Q & Q' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 2\lambda+1 & 2 \\ 2\lambda+3 & 2 \end{vmatrix} = \pm 4.$$

Or, la condition pour qu'on ait

$$\frac{4}{bb'} < \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b'^2}\right)$$

est

$$\frac{b'}{b} > 2\sqrt{5}+\sqrt{19}.$$

Mais il est manifeste que

$$\frac{(2\lambda+3)Q+2Q'}{(2\lambda+1)Q+2Q'} < \frac{5}{3} < 2\sqrt{5}+\sqrt{19}.$$

3° Les fractions F_λ, $F_{\lambda+\frac{1}{2}}$ sont toujours adjacentes, On se rend compte immédiatement que la différence de ces deux fractions est toujours égale à l'inverse du produit de leurs dénominateurs. Tout revient donc à démontrer l'inégalité

$$\frac{(2\lambda+1)Q+2Q'}{\lambda Q+Q'} > \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

Or, ceci est évident, le premier membre étant supérieur à 2, qui est la seconde réduite par excès, de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Les réduites de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ sont $1, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$.

4° Les fractions $F_{\lambda+\frac{1}{2}}$, $F_{\lambda+1}$, sont adjacentes, sauf si $\lambda=1$,

$$\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Nous devons, comme dans le cas précédent, examiner l'exactitude de l'inégalité :

$$\frac{(2\lambda+1)Q+2Q'}{(\lambda+1)Q+Q'} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Elle se ramène à

$$\lambda + \frac{Q'}{Q} > \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Elle est vérifiée quel que soit λ, sauf si

$$\lambda = 1, \quad \frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Réunissons ces résultats.

1^{er} *Cas :* $\frac{Q'}{Q} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. — Dans la suite énoncée, $F_1, F_{1+\frac{1}{2}}, F_2, \ldots, F_\lambda, F_{\lambda+\frac{1}{2}}, \ldots$, chacune des fractions est adjacente à chacune de ses voisines immédiates. Deux fractions séparées par une autre seulement ne sont pas adjacentes. Il suit immédiatement de ceci que deux fractions séparées par plusieurs autres ne sont pas adjacentes.

Soient d'abord deux fractions F et F''' séparées par deux autres F' et F'' et par ces deux seulement. Supposons par exemple $F < F' < F'' < F'''$. Soient I, I', I'', I''' les intervalles canoniques correspondants. I'' est tout entier à droite de I puisque I'' et I ne sont pas adjacents et que le centre de I'' est à droite du centre de I. De même I' est tout entier à gauche de I'''. I' et I'' ont une partie commune i puisque F' et F'' sont adjacentes. Donc, i est tout entier à droite de I comme appartenant à I'', et tout entier à gauche de I''', comme appartenant à I'. Donc inversement I est entièrement à gauche de i et I''' est à droite de i. Donc I et I''' (ou F et F''') ne sont pas adjacents.

Si l'on envisage maintenant deux fractions F, $F^{(n)}$ de la suite, séparées par trois autres au moins, $F^{(n)}$ étant la $n^{\text{ième}}$ fraction après F, désignons par F'' la fraction dont le rang surpasse de deux unités celui de F et par $F^{(n-2)}$ celle dont le rang est inférieur de deux unités à celui de $F^{(n)}$. Supposons, pour fixer les idées, $F < F^{(n)}$. Puisqu'il y a au moins trois fractions de la suite entre F' et $F^{(n)}$, ou bien $F'' = F^{(n-2)}$, ou bien $F'' < F^{(n-2)}$. Dans le premier cas, la fraction F'' n'est adjacente ni à F, ni à $F^{(n)}$ dont elle n'est séparée que par une fraction et par suite les intervalles canoniques de F et de F'' n'ont pas de partie commune, puisqu'ils sont séparés par l'intervalle canonique de F'. Donc F et $F^{(n)}$ ne sont pas adjacents dans ce cas.

Dans le second cas, l'intervalle canonique de F a à sa droite la fraction F''. Celui de $F^{(n)}$ a à sa gauche la fraction $F^{(n-2)}$. Donc, l'intervalle de F'' à $F^{(n-2)}$ sépare les intervalles canoniques de F et de $F^{(n)}$. Ces deux fractions ne sont donc pas adjacentes.

Le théorème se trouve être entièrement démontré pour le cas

$$\frac{Q'}{Q} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

2e *Cas* : $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. — La fraction F_1 est adjacente à F_2. La fraction $F_{\frac{3}{2}}$ n'est pas adjacente à F_2 mais elle l'est à F_1. En désignant par I_μ l'intervalle canonique de F_μ, l'intervalle canonique $I_{\frac{3}{2}}$ est donc entièrement intérieur à l'intervalle I_1. Nous retrancherons, comme il est dit dans l'énoncé du lemme, la fraction $F_{\frac{3}{2}}$ de la suite. Cela fait, dans la suite restante, deux fractions consécutives sont adjacentes, deux fractions séparées par une autre et une seulement ne sont pas adjacentes ([1]). On déduit de là, comme dans le premier cas, que deux fractions non consécutives de la suite ne sont pas adjacentes.

Le lemme est donc établi dans tous les cas.

Dans une suite F_μ, $F_{\mu+\frac{1}{2}}$, ..., nous placerons entre parenthèses le second terme de la suite quand il devra être supprimé si

$$\mu = 1, \quad \frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Donnons quelques applications du lemme :

([1]) Pour fonder cette affirmation, il faut cependant prouver que $F_{\frac{5}{2}}$ n'est pas adjacent à F_1. La différence $|F_{\frac{5}{2}} - F_1|$ est égale à trois fois l'inverse du produit des dénominateurs des deux fractions. Il suffit de montrer que le rapport des dénominateurs $\frac{5Q+2Q'}{Q+Q'}$ est inférieur à α', plus grande racine de l'équation :

$$3 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \text{ ou } \alpha^2 - 3\sqrt{5}\,\alpha + 1 = 0.$$

Or, le rapport des dénominateurs est inférieur à 5 qui est lui-même inférieur à α'. Donc F_5 n'est pas adjacent à F_2.

1° Les fractions $\frac{P}{Q} = \frac{1}{0}$, $\frac{P'}{Q'} = \frac{0}{1}$ nous donnent une suite multiple de $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{1},\quad \frac{3}{2},\quad \frac{2}{1},\quad \frac{5}{2},\quad \ldots,\quad n,\quad n+\frac{1}{2},\quad \ldots.$$

2° Faisons $\frac{P}{Q} = \frac{0}{1}$, $\frac{P'}{Q'} = \frac{1}{0}$. Dans la suite obtenue conformément à l'énoncé du lemme :

$$\frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{5},\quad \ldots,\quad \frac{1}{n},\quad \frac{2}{2n+1},\quad \ldots,$$

deux fractions consécutives sont adjacentes. Deux fractions non consécutives sont non adjacentes. Nous avons supprimé la fraction $\frac{2}{3} = \frac{2}{2n+1}$, correspondant à $n = 1$, parce que nous sommes ici dans le cas $\frac{Q'}{Q} = 0 < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Les intervalles canoniques I de ces fractions recouvrent le segment 0 à $1 + \frac{1}{\sqrt{5}}$. Tout point intérieur à ce segment est intérieur à un intervalle I au moins. La suppression d'un seul intervalle I laisse à découvert une partie du segment 0 à 1. (Ceci va être démontré ci-dessous.)

3° Au couple $\frac{P}{Q} = \frac{1}{1}$, $\frac{P'}{Q'} = \frac{0}{1}$ correspond la suite

$$\frac{1}{2},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{5}{7},\quad \ldots,\quad \frac{n}{n+1},\quad \frac{2n+1}{2n+3},\quad \ldots$$

qui est la symétrique de la précédente $\left(\text{après suppression du terme } \frac{0}{1}\right)$ relativement au nombre $\frac{1}{2}$.

Les intervalles canoniques des fractions de la suite définie dans l'énoncé du lemme jouissent de cette propriété que chacun d'eux possède une partie qu'il est seul à recouvrir.

Soit en effet I′ l'un d'eux. Soient I l'intervalle précédant immédiatement I′, I″ l'intervalle suivant immédiatement I′. I et I″ ne sont pas adjacents. Ils sont donc entièrement extérieurs l'un à l'autre. Ils enferment entre eux un intervalle $\alpha\beta$. I′ est adjacent à I et à I″. Il empiète sur ces deux intervalles. Donc, il contient $\alpha\beta$. $\alpha\beta$ n'appartient ni à I ni à I″. Il n'appartient à aucun autre intervalle canonique de la suite. Car, aucun n'empiète sur I'. Donc, $\alpha\beta$ appartient en propre à I'.

Pour la première fraction F_1, l'extrémité α de l'intervalle précédant I_1 peut être remplacée par le point F_1 lui-même; car on vérifie immédiatement que F_1 est extérieur à $I_{\frac{3}{2}}$.

Les intervalles canoniques de la suite du lemme forment un domaine d'un seul tenant constitué par les points intérieurs à un certain segment AB. CD étant un segment quelconque dont les extrémités sont intérieures à AB, sans appartenir à un même intervalle de la suite, les fractions comprises entre F_γ et F_δ, inclusivement, si F_γ est la fraction la plus voisine de D qui approche normalement C, et si F_δ est la fraction la plus voisine de C qui approche normalement D, forment un système strictement complet pour CD.

Nous allons maintenant montrer que la suite énoncée dans le lemme nous fournit le système complet le plus simple parmi ceux qui satisfont à certaines conditions dont le détail sera donné plus loin.

Nous aurons besoin, pour établir ce point, de rappeler quelques principes de la théorie des fractions continues, et plus spécialement les particularités relatives au développement des nombres rationnels.

Selon l'usage, nous représenterons par la notation $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ l'expression

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n + \ddots}}} \tag{1}$$

Dans ce qui suit, les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, appelés *quotients incomplets*, désignent toujours des entiers positifs (le premier cependant pouvant être nul). Nous désignerons toutefois par $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha)$ ce que devient l'expression $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ quand on y remplace a_n par un nombre quelconque α.

On montre que l'expression $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ tend vers une limite x quand n croît indéfiniment. Cette limite est, par définition, la valeur de l'expression (1). Inversement, on montre que tout nombre positif donné arbitrairement x est égal à une expression de la forme (1). Ceci étant admis, il est évident que a_0 est la partie entière de x; si $x = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$, a_1 est la partie entière de α_1; si $\alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}$, a_2 est la partie entière de α_2, etc.... Si

$$\alpha_i = a_i + \frac{1}{\alpha_{i+1}},$$

a_{i+1} est la partie entière de α_{i+1}. Si x est irrationnel, la détermination des quotients incomplets a_i se poursuit donc indéfiniment, sans qu'aucune ambiguïté ne l'arrête. Car α_i n'est jamais entier.

Si x est rationnel et égal à la fraction irréductible $\frac{P}{Q}$, la théorie du plus grand commun diviseur appliquée à P et à Q montre que l'on trouve une valeur n de i, telle que α_n soit entier, α_{n-1} ne l'étant pas.

Puisque α_{n-1} n'est pas entier, α_n est un entier a au moins égal à 2. On peut alors choisir ou bien $a_n = a - 1$, $a_{n+1} = 1$, ou bien $a_n = a$. $\frac{P}{Q}$ a deux développements possibles :

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a) \quad \text{et} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a - 1, 1).$$

L'un est caractérisé par ce fait que le dernier quotient incomplet est l'unité, l'autre par ce fait que son dernier quotient incomplet est au moins égal à 2.

L'expression (1) montre qu'on a, quel que soit x :

$$(2) \qquad x = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i + \theta_i),$$

avec $0 \leqq \theta_i \leqq 1$. θ_i est l'inverse de α_{i+1} qui est appelé un *quotient complet*.

Toute fraction $\frac{P_i}{Q_i} = (a_0, a_1, \ldots, a_i)$ est appelée une réduite de x.

L'expression (1) montre que

$$\frac{P_{i+m}}{Q_{i+m}} = (a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+m}) = \left(a_0, \ldots, a_{i-1}, a_i + \frac{p_{i,m}}{q_{i,m}}\right),$$

$\frac{p_{i,m}}{q_{i,m}}$ désignant la réduite d'indice m de θ_i. Une réduite se présente naturellement dans le calcul et est toujours supposée mise sous forme irréductible.

On a les relations fondamentales :

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} P_i = a_i P_{i-1} + P_{i-2}, \qquad Q_i = a_i Q_{i-1} + Q_{i-2}, \\ \qquad P_i Q_{i-1} - P_{i-1} Q_i = (-1)^{i-1}. \end{array}\right.$$

On a aussi :

$$P_{i+m} = (q_{i,m} a_i + p_{i,m}) P_{i-1} + q_{i,m} P_{i-2},$$
$$Q_{i+m} = (q_{i,m} a_i + p_{i,m}) Q_{i-1} + q_{i,m} Q_{i-2}.$$

Il résulte de là que toute réduite dont l'indice est au moins i est égale à

$$R = \frac{(qa_i + p)P_{i-1} + qQ_{i-1}}{(qa_i + p)P_{i-1} + qQ_{i-1}},$$

$\frac{p}{q}$ étant une réduite de θ_i, et réciproquement. Donc, dans l'expression de R, $\frac{p}{q}$ désigne une fraction irréductible, comprise entre o et 1, inclusivement.

La dernière des relations (3) sert en particulier à montrer que deux réduites consécutives de x approchent x en sens inverse, les réduites d'indices pairs par défaut, les réduites d'indice impair par excès. Il y a parfois lieu d'introduire avant la réduite $\frac{P_0}{Q_0} = \frac{a_0}{1}$, les réduites fictives $\frac{0}{1} = \frac{P_{-2}}{Q_{-2}}$ et $\frac{1}{0} = \frac{P_{-1}}{Q_{-1}}$ qui peuvent figurer dans les relations (3).

Nous aurons surtout à utiliser les remarques suivantes :

1° *Un nombre rationnel a deux réduites pénultièmes possibles, qui l'approchent en sens inverse.*

En effet, le nombre rationnel $\frac{P}{Q}$ peut être développé en fraction continue de deux façons différentes. On a, a étant au moins égal à 2,

$$\frac{P}{Q} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a) = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a-1, 1).$$

Au premier développement correspond la réduite pénultième $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$. Au second correspond la réduite pénultième $\frac{P'_n}{Q'_n} = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a-1)$. Comme dans le second développement $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P'_n}{Q'_n}$ sont deux réduites consécutives de $\frac{P}{Q}$, ces deux fractions approchent $\frac{P}{Q}$ en sens inverse. D'ailleurs on a :

$$\frac{P}{Q} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{QQ_{n-1}} \quad \text{et} \quad \frac{P}{Q} - \frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{(-1)^n}{QQ'_n}.$$

Selon que l'on veut une réduite pénultième de $\frac{P}{Q}$ l'approchant par défaut ou par excès, on prendra le développement de $\frac{P}{Q}$ avec un nombre pair, ou avec un nombre impair de quotients incomplets.

Nous désignerons par $\frac{P'}{Q'}$ indifféremment l'une ou l'autre des deux réduites pénultièmes de $\frac{P}{Q}$.

2° $\frac{P'}{Q'}$ *étant l'une des deux réduites pénultièmes de* $\frac{P}{Q}$, *si l'équation* $\alpha = \frac{Px + P'}{Qx + Q'}$ *a pour racine un nombre* x *supérieur à un*, α *admet pour réduites* $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$ *et toutes les réduites de* $\frac{P}{Q}$ *précédant celle-ci. Si* $x = \lambda_0 + \theta$, λ_0 *étant entier avec* $0 < \theta < 1$, *la réduite qui suit* $\frac{P}{Q}$ est $\frac{P\lambda_0 + P'}{Q\lambda_0 + Q'}$. *Si* $x = \lambda_0$, *la réduite qui suit* $\frac{P}{Q}$ *est au choix* $\alpha = \frac{P\lambda_0 + P'}{Q\lambda_0 + Q'}$ ou $\frac{P(\lambda_0 - 1) + P'}{Q(\lambda_0 - 1) + Q'}$.

Il suffit, pour établir cette proposition, de remarquer que, si le développement de $\frac{P}{Q}$ donnant pour réduite pénultième $\frac{P'}{Q'}$ est $(a_0, a_1, \ldots, b'', b', b)$, l'expression

$$\beta = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \ddots + \cfrac{1}{b'' + \cfrac{1}{b' + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{\lambda_0 + \theta}}}}}$$

ne diffère pas de α. En effet, posons

$$\frac{P''}{Q''} = (a_0, a_1, \ldots, b'').$$

D'après $\frac{P}{Q} = \frac{bP' + P''}{bQ' + Q''}$, puisque β se déduit de $\frac{P}{Q}$ en remplaçant b par $b + \frac{1}{\lambda_0 + \theta}$, on a

$$\beta = \frac{\left(b + \frac{1}{\lambda_0 + \theta}\right) P' + P''}{\left(b + \frac{1}{\lambda_0 + \theta}\right) Q' + Q''} = \frac{(\lambda_0 + \theta) P + P'}{(\lambda_0 + \theta) Q + Q'} = \alpha.$$

Or, l'expression de β montre que $a_0, a_1, \ldots, b'', b', b$ sont les premiers quotients incomplets de α. Cela démontre que α admet pour réduites $\frac{P}{Q}$, $\frac{P'}{Q'}$, et toutes celles qui précèdent $\frac{P'}{Q'}$ dans le développement de $\frac{P}{Q}$. De plus, si θ diffère de zéro et de un, λ_0 est le premier quotient incomplet venant après b. Si $\theta = 0$, ce quotient est au choix λ_0 ou $\lambda_0 - 1$. L'énoncé se trouve être entièrement justifié.

Remarquons encore que, si $0 < \theta < 1$, toutes les réduites de α consécutives à $\frac{P}{Q}$ seront de la forme $\frac{(q\lambda_0 + p) P + qP'}{(q\lambda_0 + p) Q + qQ'}$, $\frac{p}{q}$ étant une fraction irréductible comprise entre 0 et 1, inclusivement [en l'espèce une réduite quelconque de θ (*voir* p. 188)]. *Cette conclusion est exacte même si* $\theta = 1$, car les réduites consécutives à $\frac{P}{Q}$ sont bien obtenues en faisant $q = 1$, et $p = 0$ ou $p = 1$.

3° *Un nombre ne peut être normalement approché que par ses réduites, ou par des fractions égales à ses réduites.*

Remarquons d'abord que si une fraction réductible $\frac{p}{q}$ approche normalement un nombre α, il en est *a fortiori* de même de la fraction irréductible $\frac{P}{Q}$ égale à $\frac{p}{q}$ $\Big($et aussi de tous les équimultiples de $\frac{P}{Q}$ plus simples que $\frac{p}{q}\Big)$.

Soit donc $\frac{P}{Q}$ une fraction irréductible telle que

$$\left|\frac{P}{Q} - \alpha\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,Q^2}.$$

Je vais montrer que $\frac{P}{Q}$ est une réduite de α.

Tout d'abord, si $\frac{P}{Q} = \alpha$, $\frac{P}{Q}$ est bien une réduite, la dernière, de α.

Supposons maintenant $\frac{P}{Q} \neq \alpha$. Soit alors $\frac{P'}{Q'}$ la réduite pénultième de $\frac{P}{Q}$ approchée de $\frac{P}{Q}$ dans le même sens que α. On a :

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'} + \frac{\varepsilon}{QQ'} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon^2 = 1$$

et

$$\frac{P}{Q} = \alpha + \frac{\theta\varepsilon}{\sqrt{5}Q^2} \qquad \text{avec} \qquad 0 < \theta < 1.$$

Or, déterminons x par l'équation

$$\alpha = \frac{Px + P'}{Qx + Q'};$$

on trouve

$$\frac{P}{Q} - \alpha = \frac{\varepsilon}{Q(Qx + Q')},$$

et par suite

$$\frac{Qx + Q'}{Q} = \frac{\sqrt{5}}{\theta}.$$

Donc

$$x > \sqrt{5} - \frac{Q'}{Q} > 1.$$

D'après la remarque précédente, $\frac{P}{Q}$ est une réduite de α.

La démonstration prouve même que, si une fraction irréductible $\frac{P}{Q}$ approche un nombre α de moins de $\frac{1}{2Q^2}$, $\frac{P}{Q}$ est une réduite de α. Mais le théorème ne serait plus vrai si le coefficient 2 était remplacé par $2 - \eta$ (η positif).

4° *Si les quatre nombres positifs entiers* P, Q, P', Q' *satisfont à la relation* $PQ' - QP' = \varepsilon$, *avec* $\varepsilon^2 = 1$, *et si* $Q' < Q$, $\frac{P'}{Q'}$ *est l'une des réduites pénultièmes de* $\frac{P}{Q}$.

En effet, soit $\frac{P^1}{Q^1}$ la réduite pénultième de $\frac{P}{Q}$ approchant $\frac{P}{Q}$ dans le même sens que $\frac{P'}{Q'}$.

On a

$$PQ^1 - QP^1 = \varepsilon.$$

Donc,

$$(Q' - Q^1)P = (P' - P^1)Q.$$

Q n'est pas nul, d'après $Q' < Q$. Q étant premier avec P (si P n'est pas nul) doit diviser $|Q' - Q^1|$. Mais Q, étant supérieur à Q' et à Q^1, ne peut diviser leur différence, si elle n'est pas nulle. Donc

$$Q' - Q^1 = P' - P^1 = 0.$$

Donc, $\frac{P'}{Q'}$ coïncide avec $\frac{P^1}{Q^1}$ et, par suite, c'est l'une des réduites pénultièmes de $\frac{P}{Q}$.

Si l'on avait $P = 0$, Q serait nécessairement égal à 1, la forme irréductible du nombre rationnel 0 étant $\frac{0}{1}$. D'après $Q' < Q$, $Q' = 0$ et d'après

$$|PQ' - QP'| = 1, \qquad P' = 1.$$

Or, le développement de 0 en fraction continue se borne à la fraction $\frac{0}{1}$ dont la précédente réduite est la réduite fictive

$$\frac{P_{-1}}{Q_{-1}} = \frac{1}{0}.$$

La proposition est donc établie sans aucun cas d'exception.

Nous pouvons maintenant démontrer, au sujet de la suite énoncée dans le lemme, la proposition que nous avions en vue sur la simplicité de cette suite.

Supposons $Q' < Q$. Considérons l'intervalle $I(\mu)$ compris entre $F_\mu = \frac{\mu P + P'}{\mu Q + Q'}$ (μ entier positif) et $\frac{P}{Q}$. Nous allons montrer que, *si* α *est un nombre compris dans l'intervalle* $I(\mu)$, *la fraction* LA PLUS SIMPLE (de plus faible hauteur) : 1° *comprise dans le même intervalle* $I(\mu)$; 2° *distincte de* $\frac{P}{Q}$, *mais pouvant coïncider avec* F_μ; 3° *approchant normalement* α, *appartient à la suite* $F_\mu, F_{\mu+\frac{1}{2}}, \ldots, F_{\mu+\frac{k}{2}}, \ldots$ (k entier) $\left(\text{la fraction } F_{\mu+\frac{1}{2}} \text{ devant être supprimée si } \mu = 1, \frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

Tout nombre α compris entre l'intervalle $I(\mu)$, pouvant coïncider avec F_μ, mais non avec $\frac{P}{Q}$ est de la forme $\alpha = \frac{Px+P'}{Qx+Q'}$, avec $x \geqq \mu$.

Une fraction, satisfaisant aux mêmes conditions que α, sera de la même forme avec la condition supplémentaire que x soit rationnel. La fraction F_μ sera la plus simple de toutes.

1° Si $\alpha = F_\mu$, F_μ étant la fraction la plus simple de l'intervalle $I(\mu)$, il est bien prouvé que la fraction la plus simple située dans $I(\mu)$, sauf en $\frac{P}{Q}$ et approchant normalement α, est dans la suite proposée.

2° α est compris entre F_μ et $\frac{P}{Q}$. Soit $x = a + \theta$, θ étant *positif*, mais inférieur *ou égal* à un. On a $x > \mu$. α est compris entre F_a et F_{a+1} ou coïncide avec F_{a+1}. Donc, il est approché normalement par l'une des trois fractions F_a, $F_{a+\frac{1}{2}}$, F_{a+1}. On sait que les nombres rationnels u approchant normalement α sont tous parmi ses réduites (*remarque* 3°).

Soit R la réduite de α située dans l'intervalle $I(\mu)$, et la plus simple approchant normalement α.

D'après les hypothèses $|PQ' - QP'| = 1$, $Q' < Q$, $\frac{P'}{Q'}$ est une réduite pénultième de $\frac{P}{Q}$ (*remarque* 4°). Puisque R est une réduite plus haute que $\frac{P}{Q}$, on a (*remarque* 2°) même si $\theta = 1$,

$$R = \frac{(qa+p)P + qP'}{(qa+p)Q + qQ'}.$$

$\frac{p}{q}$ étant l'une des réduites de θ, c'est-à-dire une fraction irréductible au plus égale à un. Cela étant, nous avons le choix entre deux hypothèses seulement.

Ou bien, comme nous l'avons annoncé, R est l'une des fractions F_a, $F_{a+\frac{1}{2}}$, F_{a+1}, ou bien, seconde hypothèse, R ne coïncide avec aucune de ces trois fractions, et puisque l'une d'elles approche normalement α, R a ses termes plus simples que la plus compliquée d'entre elles, soit $F_{a+\frac{1}{2}}$. Ces deux conséquences simultanées de la dernière hypothèse conduisent à une contradiction. Car, si $R \neq F_a$, on n'a pas $p = 0$, mais $p \geqq 1$. Si $R \neq F_{a+1}$, on n'a pas $p = 1$, $q = 1$. Donc $1 \leqq p < q$ $\Big($l'égalité $p = q$ étant exclue, puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible et différent de $1\Big)$. Si $R \neq F_{a+\frac{1}{2}}$, on n'a pas $p = 1$, $q = 2$. Donc, ou bien $p = 1$, $q \geqq 3$, ou bien $2 \leqq p < q$. L'expression de R la plus simple possible correspondrait donc à $p = 1$, $q = 3$. Ce serait $\frac{(3a+1)P + 3P'}{(3a+1)Q + 3Q'}$, fraction plus compliquée que $F_{a+\frac{1}{2}}$. Donc, R ne peut pas être à la fois distinct de F_a, $F_{a+\frac{1}{2}}$, F_{a+1}, et plus simple que celle de ces fractions qui approche normalement α. Donc, R coïncide avec l'une de ces fractions (¹). C. Q. F. D.

Pour construire le système strictement complet le plus simple, de hauteur supérieure à $A - 1$, recouvrant le segment $0 - 1$, nous décomposerons ce segment en un certain nombre d'autres sur chacun desquels nous pourrons établir une suite de fractions conforme à celle énoncée dans le lemme. Cette décomposition du segment $0 - 1$ reposera sur quelques notions que nous allons développer.

Soit $\frac{P}{Q}$ une fraction *irréductible* inférieure à un. Nous appellerons *domaine* de $\frac{P}{Q}$ *relativement* à $Q + 1$, ou simplement *domaine* de $\frac{P}{Q}$ l'ensemble des nombres pour lesquels $\frac{P}{Q}$ est une réduite de leur développement en fraction continue. Déterminons ce domaine.

Les nombres admettant $\frac{P}{Q}$ pour réduite, auront pour réduite précédant celle-là, l'une des deux réduites pénultièmes de $\frac{P}{Q}$,

(¹) Le raisonnement paraît être en défaut, si F_{a+1} n'appartient pas à la suite, ce qui a lieu si $\mu = 1$, $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et pour $a = 1$. Le raisonnement montre que, si α est compris entre F_1 et F_2, R coïncide avee F_1, $F_{\frac{3}{2}}$ ou F_2. Mais R ne peut pas coïncider avec $F_{\frac{3}{2}}$. Car, l'intervalle $I_{\frac{3}{2}}$ est entièrement inclus dans I_1. Donc, tout nombre normalement approché par $F_{\frac{3}{2}}$ l''est aussi par F_1. La fraction la plus simple approchant α ne peut donc pas être $F_{\frac{3}{2}}$. Donc, R coïncide avec F_1 ou avec F_2 qui sont dans la suite.

fractions qne nous désignons par $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et par $\frac{P'_n}{Q'_n}$. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre admette les deux réduites successives $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P}{Q}$ est qu'il soit de la forme $\frac{xP+P_{n-1}}{xQ+Q_{n-1}}$ avec $x \geqq 1$. Pour qu'un nombre admette les deux réduites successives $\frac{P'_n}{Q'_n}$ et $\frac{P}{Q}$, il faut et il suffit qu'il soit de la forme $\frac{x'P+P'_n}{x'Q+Q'_n}$ avec $x' \geqq 1$.

Les nombres correspondant à toutes les valeurs de x et de x', au moins égales à un, couvrent respectivement les segments

$$\frac{P}{Q} \quad \text{à} \quad \frac{P+P_{n-1}}{Q+Q_{n-1}} = \frac{P}{Q} + \frac{(-1)^n}{Q(Q+Q_{n-1})}$$

et

$$\frac{P}{Q} \quad \text{à} \quad \frac{P+P'_n}{Q+Q'_n} = \frac{P}{Q} + \frac{(-1)^n}{Q(Q+Q'_n)}.$$

Le domaine de $\frac{P}{Q}$ se compose donc de deux segments séparés par $\frac{P}{Q}$ et juxtaposés.

Soit maintenant A *un entier supérieur à* Q. Nous appellerons *domaine de la fraction* $\frac{P}{Q}$ *relativement à* A, l'ensemble des nombres tels que $\frac{P}{Q}$ soit la dernière de leurs réduites de dénominateur inférieur à A.

Donc, pour un nombre α appartenant au domaine considéré, si $\frac{P_{n+1}}{Q_{n-1}}$ est la réduite qui suit $\frac{P}{Q}$, on a

$$Q < A \leqq Q_{n+1}.$$

Nous désignerons ce domaine par la notation $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$. Déterminons-le. Il se compose, comme le domaine $\left(\frac{P}{Q}, Q+1\right)$ défini en premier lieu, de deux parties correspondant respectivement à chacune des réduites pénultièmes de $\frac{P}{Q}$. Soient $\frac{P'}{Q'}$ la réduite de α qui précède $\frac{P}{Q}$ et a_{n+1} le quotient incomplet qui fait passer de $\frac{P}{Q}$ à $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$. Le nombre α est égal à $\frac{(a_{n+1}+\theta)P+P'}{(a_{n+1}+\theta)Q+Q'}$, θ étant un nombre compris entre zéro et un, ***inclusivement.*** Soit μ le nombre entier tel que

$$\mu Q + Q' \geqq A > (\mu - 1)Q + Q'.$$

Nous écrirons ceci ([1])

$$\mu = E'\left(\frac{A - Q'}{Q}\right).$$

La condition $Q < A \leqq Q_{n+1}$ équivaut, d'après $Q_{n+1} = a_{n+1}Q + Q'$, à $a_{n+1} \geqq \mu$. Mais alors, $a_{n+1} + \theta$ est un nombre quelconque supérieur ou égal à μ. Donc, l'intervalle de $\frac{P}{Q}$ à $\frac{\mu P + P'}{\mu Q + Q'}$ comprend tous les nombres appartenant au domaine $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$ et situés entre $\frac{P}{Q}$ et $\frac{P'}{Q'}$.

$\frac{P'}{Q'}$ désigne soit $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, soit $\frac{P'_n}{Q'_n}$. Posons

$$\mu' = E'\left(\frac{A - Q_{n-1}}{Q}\right), \qquad \mu'' = E'\left(\frac{A - Q'_n}{Q}\right).$$

Le domaine $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$ va de

$$\frac{\mu' P + P_{n-1}}{\mu' Q + Q_{n-1}} \quad \text{à} \quad \frac{\mu'' P + P'_n}{\mu'' Q + Q'_n}.$$

μ_1 désignant le quotient à une unité près par excès de A par Q, soit $E'\left(\frac{A}{Q}\right)$, on a, d'après

$$Q_{n-1} < Q'_n < Q < A,$$

si $\frac{A}{Q}$ est entier

$$\mu_1 = \mu' = \mu'' = \frac{A}{Q};$$

si $\frac{A}{Q}$ n'est pas entier

$$\mu_1 \geqq \mu' \geqq \mu'' \geqq \mu_1 - 1.$$

([1]) Nous désignerons par $E(x)$ et par $E'(x)$ les valeurs de x à une unité près respectivement par défaut et par excès. Si x est entier, on a

$$E(x) = E'(x) = x.$$

Si x n'est pas entier, on a $E'(x) = E(x) + 1$ et $E(x) < x < E'(x)$.

Enfin, tandis que μ peut être égal à un, μ_1 *est toujours au moins égal à* 2.

Nous donnons plus loin la détermination effective des domaines $\left(\frac{P}{Q}, 5\right)$ pour toutes les fractions irréductibles $\frac{P}{Q}$ dont le dénominateur est inférieur à 5.

Examinons le mode de répartition des domaines $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$.

Chacun des nombres du segment zéro-un possède au moins une réduite de hauteur inférieure à A, savoir $\frac{0}{1}$. Celle-ci est d'ailleurs la seule si le second quotient incomplet a_1 surpasse $A - 1$. Donc, chaque nombre du segment zéro-un appartient au domaine (relatif à A) d'au moins une fraction de dénominateur inférieur à A. Donc, ces domaines (au sens large, extrémités incluses), recouvrent tout le segment zéro-un.

Dans quel cas la dernière réduite R, moins haute que A d'un nombre α, peut-elle être indéterminée? D'abord, α ne sera pas irrationnel. Sinon, son développement serait unique. R serait bien déterminé. Soit donc $\alpha = \frac{G}{K}$. α n'a que deux développements. Donc, R, mal déterminé, a deux acceptions et deux seulement R′ et R″. Il y a un développement de α dans lequel la plus haute de ces deux réduites, soit R′, ne figure pas. R′ est donc la plus haute des deux réduites pénultièmes de $\frac{G}{K}$. D'ailleurs, d'après $R = R'$ dans le développement qui contient R′, on a $R' < A$ et $K > A - 1$. Donc, $\frac{G}{K}$ est de hauteur supérieure à $A - 1$ et ses deux réduites pénultièmes sont moins hautes que A.

Deux domaines ne peuvent pas avoir un intervalle commun; car, parmi les nombres de cet intervalle commun, il y en aurait d'irrationnels. Comme les domaines recouvrent tout le segment zéro-un, chacun est juxtaposé à un domaine situé à sa droite et à un domaine situé à sa gauche. Les extrémités communes sont des points $\frac{G}{K}$ admettant au choix, pour dernière réduite de dénominateur inférieur à A, deux fractions $\frac{P}{Q}$ et $\frac{M}{N}$. Cette ambiguïté prouve que $\frac{P}{Q}$ et $\frac{M}{N}$ sont les deux réduites pénultièmes possibles de $\frac{G}{K}$.

Tous les nombres compris entre $\frac{P}{Q}$ et $\frac{G}{K}$ appartiennent à $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$. Il n'y a donc aucune fraction de hauteur inférieure à A entre $\frac{P}{Q}$ et $\frac{G}{K}$ (car, s'il y en avait une, sa dernière réduite de hauteur inférieure à A serait elle-même et non pas $\frac{P}{Q}$). De même, il n'y a aucune de ces fractions entre $\frac{G}{K}$ et $\frac{M}{N}$. Donc, parmi les fractions de hauteur inférieure à A, $\frac{P}{Q}$ et $\frac{M}{N}$ sont deux fractions consécutives.

$\frac{G}{K}$ est parmi les fractions dont la hauteur surpasse $A - 1$ et dont les deux réduites pénultièmes ont leurs hauteurs inférieures à A. Parmi ces fractions, il n'y en a aucune différant de $\frac{G}{K}$ et située entre $\frac{P}{Q}$ et $\frac{M}{N}$; car, s'il y en avait une, elle appartiendrait à un et un seul des deux domaines $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$, $\left(\frac{M}{N}, A\right)$. Sa dernière réduite de hauteur inférieure à A serait bien déterminée. Or, d'après notre hypothèse, chacune de ses réduites pénultièmes peut être prise pour telle.

Donc, si nous désignons génériquement par $\frac{P}{Q}$ une fraction irréductible de hauteur inférieure à A, par $\frac{G}{K}$ une fraction irréductible de hauteur supérieure à $A - 1$, mais dont les deux réduites pénultièmes sont de hauteur inférieure à A :

Entre deux fractions $\frac{P}{Q}$ consécutives il y a une fraction $\frac{G}{K}$ et une seule. Donc, réciproquement, entre deux fractions $\frac{G}{K}$, il y a une fraction $\frac{P}{Q}$ et une seule. En résumé, *les fractions* $\frac{P}{Q}$ *alternent avec les fractions* $\frac{G}{K}$.

Il est facile, sachant que $\frac{G}{K}$ est l'une des frontières du domaine $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$ de trouver l'autre frontière $\frac{M}{N}$ dont $\frac{G}{K}$ limite le domaine. En effet, $\frac{G}{K}$ ayant pour réduites pénultièmes $\frac{P}{Q}$ et $\frac{M}{N}$, on a

$$G = P + M, \qquad K = Q + N;$$

donc

$$\frac{M}{N} = \frac{G-P}{K-Q} = \frac{(\mu-1)P+P'}{(\mu-1)Q+Q'}.$$

Il résulte des expressions de G et de K par les formules précédentes qu'un et un seul des nombres μ relatifs à $\frac{M}{N}$ et à $\frac{P}{Q}$ respectivement, et concernant la frontière commune $\frac{G}{K}$ de leurs domaines est égal à un, l'autre surpassant un. La vérification est facile.

Nous allons démontrer une propriété essentielle des fractions $\frac{G}{K}$ et des fractions $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ qui sont les plus simples équimultiples de $\frac{P}{Q}$ dont la hauteur surpasse $A-1$. μ_1 est égal à $E'\left(\frac{A}{Q}\right)$. Nous désignerons génériquement par φ une fraction identique (terme à terme) à une fraction $\frac{G}{K}$ ou à une fraction $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$.

Deux fractions φ quelconques sont non adjacentes.

Pour établir ce fait, il suffit évidemment de prouver que deux fractions φ voisines sont non adjacentes. Soient $\frac{G}{K}$ et $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ ces deux fractions φ.

$\frac{P'}{Q'}$ étant une réduite pénultième de $\frac{P}{Q}$, nous avons

$$\frac{G}{K} = \frac{\mu P + P'}{\mu Q + Q'} \qquad \text{avec} \qquad \mu = E'\left(\frac{A-Q'}{Q}\right).$$

Nous voulons prouver que

$$\left|\frac{G}{K} - \frac{P}{Q}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{K^2} + \frac{1}{\mu_1^2 Q^2}\right).$$

Le premier membre est égal à $\frac{1}{KQ}$. L'inégalité s'écrit

$$\left(\frac{K}{Q}\right)^2 - \sqrt{5}\,\mu_1^2\,\frac{K}{Q} + \mu_1^2 < 0.$$

Il faut prouver que $\frac{K}{Q}$ est compris entre les racines de l'équation

$$(4) \qquad \alpha^2 - \sqrt{5}\,\mu_1^2\,\alpha + \mu_1^2 = 0.$$

D'après les inégalités

$$(\mu_1 - 1)Q < A \leqq \mu Q + Q' < A + Q \leqq (\mu_1 + 1)Q,$$

on a

$$\mu_1 - 1 < \frac{\mu Q + Q'}{Q} = \frac{K}{Q} < \mu_1 + 1$$

et, d'après $\mu_1 \geqq 2$,

$$\frac{\mu_1}{2} < \frac{K}{Q} < 2\mu_1.$$

$\frac{K}{Q}$ sera certainement compris entre les racines de l'équation (4) s'il en est de même de $\frac{\mu_1}{2}$ et de $2\mu_1$. Or, le résultat de substitution du nombre positif x dans le premier membre de (4) a le signe de $x + \frac{\mu_1^2}{x} - \mu_1^2\sqrt{5}$. D'après $\mu_1 \geqq 2$, il sera certainement négatif si

$$x + \frac{\mu_1^2}{x} - 2\mu_1\sqrt{5} < 0.$$

Or, si $x = \frac{\mu_1}{2}$ ou $x = 2\mu_1$, le premier membre de cette expression devient $\mu_1\left(2 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{5}\right)$ qui est négatif. (Le résultat de substitution de $x = 4\mu_1$ ou de $x = \frac{\mu_1}{4}$ serait lui aussi négatif. Nous rappellerons cette remarque par la suite.) Donc, $\frac{\mu_1}{2}$, $2\mu_1$ et par suite $\frac{K}{Q}$ sont compris entre les racines de l'équation (4). Donc, deux fractions φ consécutives sur le segment zéro-un sont non adjacentes.

A fortiori deux fractions φ non consécutives sont non adjacentes. Car, soient φ_1 et φ_n ces deux fractions. Si l'on forme successivement les intervalles canoniques de la fraction φ_1, des fractions intermédiaires à φ_1 et à φ_n, et enfin de la fraction φ_n, aucun de ces intervalles n'atteint le suivant. Le premier n'atteint donc pas le dernier. Donc, deux fractions quelconques φ sont non adjacentes.

Des conséquences importances se déduisent de la proposition précédente.

D'abord, si nous remplaçons un nombre quelconque de fractions $\frac{G}{K}$ par des fractions équimultiples, et un nombre quelconque de fractions $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ par des fractions $\frac{\lambda P}{\lambda Q}$, avec $\lambda > \mu_1$, nous diminuons l'intervalle canonique des fractions modifiées et, par suite, les nouvelles fractions obtenues sont deux à deux non adjacentes. *A fortiori*, un nombre égal à une fraction φ quelconque n'est approché normalement par aucune fraction égale (ou identique) à une autre fraction φ, et ayant une hauteur supérieure à $A - 1$.

Cela étant, je dis qu'*un nombre égal à une fraction* φ *ne peut être approché normalement par une fraction de hauteur supérieure à* $A - 1$, *que si cette fraction coïncide avec lui.*

En effet, soit (φ) le nombre à approcher, égal à une fraction φ, donc un nombre de la forme $\frac{P}{Q}$ ou $\frac{G}{K}$ indifféremment. Les nombres (φ) sont caractérisés par cette propriété que chacune de leurs réduites, non égale à φ, a une hauteur inférieure à A. Si une fraction $\frac{p}{q}$ approche normalement (φ), $\frac{p}{q}$ est égal à une réduite $\frac{p'}{q'}$ de (φ). Mais, si $\frac{p}{q}$ n'est pas égal à φ, $\frac{p'}{q'}$ est de hauteur inférieure à A. Or, nous savons que les équimultiples de hauteur supérieure à $A - 1$ d'une fraction $\frac{p'}{q'}$, moins haute que A, n'approchent normalement aucune fraction φ ne coïncidant pas avec $\frac{p'}{q'}$. Si donc (φ) est normalement approché par $\frac{p}{q}$, on a $\varphi = \frac{p}{q}$. C. Q. F. D.

Il suit de là que tout système complet de hauteur supérieure à $A - 1$ devra contenir au moins une fraction égale à chacun des nombres φ. Le plus simple, s'il en existe un, contiendra chacune des fractions $\frac{G}{K}$ et des fractions $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Mais, les intervalles canoniques de deux fractions φ consécutives laissent entre eux un vide qu'il s'agit de recouvrir.

Nous devrons compléter le système avec des fractions différentes des fractions φ. Soit F l'une d'elles. F n'approche normalement aucune des fractions φ. Donc, l'intervalle canonique de F est entièrement compris entre les deux fractions φ, savoir φ_1 et φ_2, qui avoisinent immédiatement F de part et d'autre. Si donc F approche normalement un nombre α, α est compris entre φ_1 et φ_2.

Donc, inversement, si le nombre α est approché par une fraction $F \neq \varphi$, F est compris entre les mêmes fractions φ'_1 et φ'_2 que α. D'ailleurs, aucune fraction φ, distincte de φ'_1 et de φ'_2, n'approche normalement α, puisque l'intervalle canonique de cette fraction n'atteint même pas ceux de φ'_1 ni de φ'_2.

Donc et en résumé, quel que soit α, situé sur le segment $\varphi'_1\varphi'_2$, φ'_1 et φ'_2 étant deux fractions φ *consécutives*, α *ne peut être normalement approché par une fraction de hauteur supérieure à* A — 1, *que si cette fraction est située sur le même segment* $\varphi'_1\varphi'_2$ (extrémités comprises).

Soit donc S un système complet quelconque de hauteur supérieure à A — 1 et relatif au segment 0,1. Les points φ divisent le segment 0,1 en un certain nombre de segments. Sur chacun de ces segments (extrémités comprises), limité par deux points φ consécutifs, savoir φ_1 et φ_2, le système S possède un certain nombre de fractions. Elles forment un système *s*. Nous nous trouvons avoir décomposé S en un certain nombre de systèmes *s* qui, d'après la conclusion précédente, jouissent des propriétés suivantes :

1° Aucune fraction de S n'appartenant pas à *s* n'approche normalement un nombre du segment $\varphi_1\varphi_2$ (extrémités comprises);

2° Le système *s* est complet sur $\varphi_1\varphi_2$;

3° Sauf les fractions égales à φ_1 et à φ_2, aucune fraction de *s* n'approche normalement un nombre extérieur à $\varphi_1\varphi_2$.

C'est dire que la construction de chacun des système *s* est indépendante de la construction des autres, si l'on s'est donné une fois pour toutes les fractions de S qui doivent coïncider avec les fractions φ.

En particulier, pour construire le système Σ, le plus simple parmi les systèmes de hauteur supérieure à A — 1, d'une part, nous devrons choisir pour chaque fraction φ, une fraction la plus simple possible coïncidant avec φ : ce sera la fraction φ elle-même, $\frac{G}{K}$ ou $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ suivant les cas; d'autre part, sur chaque segment $\varphi_1\varphi_2$, nous devons former le système σ le plus simple parmi les systèmes *s*, dont les fractions extrêmes sont φ_1 et φ_2.

L'une des fractions φ_1 et φ_2 étant identique à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, l'autre l'est à $\frac{G}{K} = \frac{\mu P + P'}{\mu Q + Q'}$, $\frac{P'}{Q'}$ étant l'une des réduites pénultièmes de $\frac{P}{Q}$ et μ étant égal à $E'\left(\frac{A - Q'}{Q}\right)$.

Formons la suite des fractions irréductibles F_λ égales à $\frac{\lambda P + P'}{\lambda Q + Q'}$, λ procédant suivant les multiples entiers de $\frac{1}{2}$ (si λ est entier, F_λ est identique à $\frac{\lambda P + P'}{\lambda Q + Q'}$; si λ est fractionnaire, F_λ est identique à $\frac{2\lambda P + 2P'}{2\lambda Q + 2Q'}$), la première valeur de λ étant μ. Nous supprimons dans la suite la fraction $F_{\frac{3}{2}}$, si $\mu = 1$ et $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Nous prolongeons la suite F_λ, qui tend vers $\frac{P}{Q}$, jusqu'à la première fraction de cette suite F_h, qui est adjacente à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Nous avons remarqué, incidemment, que si λ est entier, et si $\frac{\lambda Q + Q'}{Q} < 4\mu_1$, F_λ n'est pas adjacent à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. La condition sera certainement vérifiée si

$$\lambda \leqq 4\mu_1 - 1.$$

h est donc supérieur à 7, d'après $\mu_1 \geqq 2$. D'après $\mu_1 \geqq \mu$, on voit que, si $\lambda \leqq \mu + 5$, F_λ n'est pas adjacent à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Donc, h est supérieur à $\mu + 5$.

Ainsi, $F_{h-\frac{1}{2}}$ est dans la suite, d'après $h > 2$, et n'est pas adjacent à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, F_h est adjacent à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$.

Je dis que *le système strictement complet σ, le plus simple relatif à $\varphi_1 \varphi_2$ et constitué par des fractions de ce segment de hauteurs supérieures à $A - 1$, est constitué par la suite finie* $F_\mu, \ldots, F_{h-\frac{1}{2}}, F_h$ *augmentée de* $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. (Le second terme doit être supprimé dans le cas maintes fois indiqué.)

1° *Le système σ est complet.* — En effet, dans la suite $F_\mu, \ldots, F_{h-\frac{1}{2}}, F_h$, l'intervalle canonique de chacune de ces fractions empiète sur celui de la suivante. Donc, le segment F_μ à F_h est entièrement recouvert par ces intervalles. De plus, l'intervalle canonique de $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ empiète sur celui de F_h. Donc, le système des intervalles canoniques de σ recouvre le segment constitué par la réunion des deux segments F_μ à F_h et F_h à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, c'est-à-dire le segment $\varphi_1\varphi_2$ total.

2° *Le système σ est strictement complet.* — Il faut montrer que l'intervalle canonique de chacune des fractions du système contient une partie *intérieure à* $\varphi_1\varphi_2$ qui lui appartient en propre.

a. Ceci est évident pour les fractions $F_{\mu+\frac{1}{2}}, F_{\mu+1}, \ldots, F_{h-\frac{1}{2}}$ (la première devant être supprimée, si elle n'appartient pas à σ). En effet, l'intervalle canonique I_λ de chacune de ces fractions F_λ est entièrement compris dans le segment $\varphi_1\varphi_2$. En second lieu, quel que soit k supérieur à 1 $\left(\text{mais peut-être différent de } \frac{3}{2}\right)$, l'intervalle I_k contient une portion i_k qui n'appartient, si $\lambda \neq k$, à l'intervalle canonique I_λ d'aucune fraction F_λ de la suite

$$F_1, \ldots, F_\mu, \ldots, F_{h-\frac{1}{2}}, F_h, \ldots, F_{h+\frac{m}{2}}, \ldots,$$

ni, *a fortiori*, à l'intervalle canonique d'aucune fraction de la suite partielle $F_\mu, \ldots, F_h$. Enfin, si k est inférieur à h, l'intervalle I_k n'est pas atteint par l'intervalle canonique de $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Donc, la portion i_k appartient en propre à I_k et est située sur $\varphi_1\varphi_2$.

b. Considérons la portion i_h qui appartient à I_h et n'appartient pas à I_λ, si $\lambda \neq h$. D'après $h > 2$, les extrémités de i_h appartiennent l'une à $I_{h-\frac{1}{2}}$, l'autre à $I_{h+\frac{1}{2}}$. i_h ne peut pas être entièrement compris dans $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$, sans quoi $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ serait adjacent à $F_{h-\frac{1}{2}}$. Donc, i_h contient une portion i'_h, qui n'appartient pas à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ et, par suite, appartient en propre à I_h dans le système σ.

c. F_μ n'est adjacent, dans le système σ, qu'à $F_{\mu+\frac{1}{2}}$ (ou à $F_{\mu+1}$, si $F_{\mu+\frac{1}{2}}$ n'est pas dans σ). D'ailleurs, $F_{\mu+\frac{1}{2}}$ (ou $F_{\mu+1}$) n'approche pas normalement F_μ, en sorte que F_μ est extérieur à l'intervalle canonique $I_{\mu+\frac{1}{2}}$ (ou $I_{\mu+1}$). Donc, l'intervalle i'_μ, compris entre la fraction F_μ et l'intervalle $I_{\mu+\frac{1}{2}}$ (ou $I_{\mu+1}$), appartient en propre à I_μ, et cet *intervalle est situé sur* $\varphi_1\varphi_2$.

d. De même $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ n'est adjacent, dans le système σ, qu'à F_h et n'est pas approché normalement par F_h. Donc, l'intervalle $i'\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$, compris entre I_h et $\frac{P}{Q}$, appartient en propre à $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$ et *il est situé sur* $\varphi_1\varphi_2$.

3° *Il n'y a pas de système s plus simple que* σ.

Désignons par $F(\alpha, A)$ la fraction la plus simple satisfaisant aux conditions d'être plus haute que $A - 1$ et d'approcher normalement α. Nous allons montrer qu'à chaque fraction F de σ on peut attacher un intervalle $j(F)$, pour tous les points α duquel elle est identique à la fraction $F(\alpha, A)$.

D'abord, toute fraction de hauteur supérieure à $A - 1$ et approchant normalement un nombre α du segment $\varphi_1\varphi_2$ est, nous l'avons dit plusieurs fois, située sur $\varphi_1\varphi_2$.

Nous rappellerons que, si $\alpha \neq \frac{P}{Q}$, la fraction la plus simple, approchant normalement α, située sur $\varphi_1\varphi_2$, *inégale à* $\frac{P}{Q}$, appartient à la suite F_μ, $\left(F_{\mu+\frac{1}{2}}\right)$, ... prolongée indéfiniment. D'autre part, la fraction la plus simple de hauteur supérieure à $A - 1$ et coïncidant avec $\frac{P}{Q}$ est $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. D'ailleurs, son intervalle canonique englobe celui de toutes les fractions moins simples coïncidant avec $\frac{P}{Q}$. Donc la fraction $F(\alpha, A)$, relative à un nombre quelconque situé sur le segment $\varphi_1\varphi_2$ (extrémités comprises), est dans la suite des fractions Φ,

$$\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}, \quad F_\mu, \quad \left(F_{\mu+\frac{1}{2}}\right), \quad \ldots, \quad F_\lambda, \quad \ldots,$$

où λ croît indéfiniment par valeurs multiples de $\frac{1}{2}$.

Remarquons enfin que la fraction $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, d'après $\mu \leqq \mu_1 \leqq \mu + 1$, est ou bien plus simple que F_μ, si $\mu_1 = \mu$, ou bien plus simple que toutes les fractions $F_{\mu+\frac{1}{2}}$, $F_{\mu+1}$, ..., qui viennent après μ.

a. L'intervalle $j\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$ sera la partie de $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$ située sur $\varphi_1 \varphi_2$. En effet, soit α un nombre intérieur à ce segment. Il est approché normalement par $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Donc, $F(\alpha, A)$ coïncide ou bien avec $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, ou bien avec F_μ, puisque F_μ est la seule fraction de $\varphi_1 \varphi_2$ pouvant être plus simple que $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Mais α ne peut pas être approché normalement par F_μ, puisqu'il l'est par $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Donc, $F(\alpha, A) \equiv \frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$.

b. Si $\mu \leqq k \leqq h$, l'intervalle I_k possède sur $\varphi_1 \varphi_2$ une portion i''_k (savoir i_k ou i'_h ou I'_μ selon les valeurs de k : *voir* plus haut), qui n'appartient à aucun intervalle $I(\Phi)$ si $\Phi \not\equiv F_k$. Si donc α appartient à i''_k, la seule fraction Φ approchant normalement α est F_k. Comme $F'(\alpha, A)$ appartient à la suite Φ, $F(\alpha, A) \equiv F_k$. Donc, $j(F_k)$ existe quel que soit $k = \mu, \ldots, h$. C'est i''_k.

Cela étant, considérons un système s complet sur $\varphi_1 \varphi_2$, et de hauteur σ supérieure à $A - 1$. Supposons que s n'est pas identique à σ. Je dis que s n'est pas plus simple que σ.

En effet, ou bien toutes les fractions de σ appartiennent à s, qui en possède encore au moins une autre. Alors, s n'est pas plus simple que σ. Ou bien une fraction au moins F de σ n'appartient pas à s. Désignons par $F(\alpha, s)$ et par $F(\alpha, \sigma)$ les fractions appartenant respectivement à s ou à σ, et qui sont les plus simples approchant normalement α.

Je dis qu'il est possible de choisir α de telle sorte que $F(\alpha, \sigma)$ soit plus simple que $F(\alpha, s)$. En effet, il suffit pour cela de prendre pour α un point quelconque de $j(F)$; car F est la fraction $F(\alpha, A)$ la plus simple, de hauteur supérieure à A, approchant normalement α. Donc, d'une part, $F(\alpha, \sigma) \equiv F$. D'autre part, comme F n'appartient pas à s, $F(\alpha, s)$ est plus haute que F. Donc, s n'est pas plus simple que σ.

4° Enfin, *en général, la fraction* $F(\alpha, A)$ *appartient à* σ *quel que soit* α.

En effet, nous avons vu que cette fraction appartient à la suite des fractions Φ,

$$F_\mu, \quad \ldots, \quad F_{h-\frac{1}{2}}, \quad F_h, \quad F_{h+\frac{1}{2}}, \quad \ldots, \quad F_\lambda, \quad \ldots, \quad \frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}.$$

Si donc $F(\alpha, A)$ n'appartient pas à σ, c'est que $F(\alpha, A) = F(\lambda)$, avec $\lambda \geqq h + \frac{1}{2}$. Je dis que λ ne peut pas surpasser $h + \frac{1}{2}$; car, si λ surpasse $h + \frac{1}{2}$, I_λ appartient entièrement à $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$, parce que F_λ est compris entre les deux fractions adjacentes F_h et $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ et n'est pas adjacent à la première. Donc, tout nombre normalement approché par F_λ, l'est aussi par $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Or, cette dernière fraction est plus simple que F_λ, dès que λ surpasse μ. Il est donc impossible qu'on ait $F(\alpha, A) = F_\lambda$.

Reste donc le cas où

$$F(\alpha, A) = F_{h+\frac{1}{2}}.$$

a. Je dis que ce cas est impossible si h est entier. En effet, la fraction $F_{h+\frac{1}{2}}$ est moins simple que F_h, et d'ailleurs aussi que $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Or, tout nombre α approché normalement par $F_{h+\frac{1}{2}}$ l'est aussi soit par F_h, soit par $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, parce que ces deux dernières fractions sont adjacentes et que $F_{h+\frac{1}{2}}$ est compris entre elles, sans que $I_{h+\frac{1}{2}}$ contienne ni $I_{h-\frac{1}{2}}$ ni $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$. Donc,

$$F(\alpha, A) \not\equiv F_{h+\frac{1}{2}}.$$

b. Supposons h non entier. Alors, $F_{h+\frac{1}{2}}$ est plus simple que F_h. Si $I_{h+\frac{1}{2}}$ contient une portion $j''_{h+\frac{1}{2}}$ extérieure à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, cette portion appartient à I_h puisque F_h et $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ sont adjacents. Elle n'appartient pas à I_k, si $k \leqq h - \frac{1}{2}$, puisque I_k et $I_{h+\frac{1}{2}}$ ne sont pas adjacents. Donc, si α appartient à $j''_{h+\frac{1}{2}}$: d'une part, la seule fraction de σ

approchant normalement α est F_h ; d'autre part, la fraction $F(\alpha, A)$ est non pas F_h, mais $F_{h+\frac{1}{2}}$.

En résumé, sauf le cas doublement particulier où h est fractionnaire et où $j''_{h+\frac{1}{2}}$ existe, σ contient la fraction $F(\alpha, A)$, quel que soit α sur $\varphi_1 \varphi_2$. Si le cas exceptionnel est réalisé, σ contient $F(\alpha, A)$, sauf si α appartient à $j'_{h+\frac{1}{2}}$. Nous déterminerons, plus loin, dans quelles conditions l'exception se produit.

Reprenons la définition du système Σ.

$\frac{P}{Q}$ étant une fraction irréductible de dénominateur inférieur à A, ayant pour réduites pénultièmes $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P'_n}{Q'_n}$, soient

$$\mu_1 = E'\left(\frac{A}{Q}\right), \qquad \mu' = E'\left(\frac{A - Q_{n-1}}{Q}\right), \qquad \mu'' = E'\left(\frac{A - Q'_n}{Q}\right) ;$$

1° *Les suites de fractions*

$$\frac{\mu' P + P_{n-1}}{\mu' Q + Q_{n-1}}, \quad \left(\frac{(2\mu' + 1)P + 2P_{n-1}}{(2\mu' + 1)Q + 2Q_{n-1}}\right),$$
$$\frac{(\mu' + 1)P + P_{n-1}}{(\mu' + 1)Q + Q_{n-1}}, \quad \ldots; \quad \frac{\mu'' P + P'_n}{\mu'' Q + Q'_n}, \quad \left(\frac{(2\mu'' + 1)P + 2P'_n}{(2\mu'' + 1)Q + 2Q'_n}\right), \quad \ldots,$$

prolongées chacune inclusivement jusqu'à la première fraction adjacente à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$; 2° *les fractions* $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ *constituent, si on les forme pour toutes les fractions* $\frac{P}{Q}$ *irréductibles de dénominateurs inférieurs à* A, *un système complet pour le segment* 0 — 1, *le plus simple formé avec des fractions de dénominateurs supérieurs à* A — 1.

Déterminons, pour le système σ, l'indice h de la fraction adjacente à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Dans la suite F_λ, la première fraction d'indice entier adjacente à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ est F_ν, si ν est le plus petit entier satisfaisant à l'inégalité

$$\left|\frac{\nu P + P'}{\nu Q + Q'} - \frac{P}{Q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{(\nu Q + Q')^2} + \frac{1}{\mu_1^2 Q^2}\right];$$

d'où

$$\frac{\nu Q + Q'}{Q} > \alpha',$$

si α' est la plus grande racine de l'équation

$$(4) \qquad \alpha^2 - \sqrt{5}\,\mu_1^2\alpha + \mu_1^2 = 0.$$

On a

$$\alpha' = \frac{\sqrt{5}}{2}\mu_1^2 + \frac{1}{2}\sqrt{5\mu_1^4 - 4\mu_1^2} = \sqrt{5}\,\mu_1^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\theta}{8\mu_1^2} \ (^1) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Donc

$$\nu = E'\left(\alpha' - \frac{Q'}{Q}\right).$$

$\alpha' - \frac{Q'}{Q}$ n'est d'ailleurs jamais un entier.

Le plus petit indice non entier de fraction F_λ adjacente à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$ est le plus petit nombre $\nu_0 + \frac{1}{2}$, tel que

$$\frac{(2\nu_0 + 1)Q + 2Q'}{Q} > \beta',$$

β' étant la plus grande racine de

$$\beta^2 - 2\sqrt{5}\,\mu_1^2\beta + \mu_1^2 = 0,$$

on a

$$\beta' = 2\sqrt{5}\,\mu_1^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{\theta_0}{80\mu_1^2} \qquad (0 < \theta_0 < 1).$$

Donc

$$\nu_0 = E'\left(\frac{\beta' - 1}{2} - \frac{Q'}{Q}\right).$$

On a manifestement

$$\frac{\beta' - 1}{2} < \alpha',$$

et d'ailleurs,

$$\omega = \alpha' - \frac{\beta' - 1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{4\sqrt{5}} + \frac{\theta}{10\mu_1^2} - \frac{\theta_0}{160\mu_1^2} < 1.$$

Donc on a, comme il fallait s'y attendre, ou bien $\nu = \nu_0$, ou bien $\nu_0 = \nu - 1$. Dans le premiers cas, $h = \nu$. Dans le second cas, $h = \nu_0 + \frac{1}{2}$.

---

(1) Par la formule du binome arrêtée au troisième terme, et en remarquant que μ est au moins égal à 2.

Dans les deux cas, la fraction F_λ la plus haute de σ correspond à $\lambda = \nu - \frac{1}{2}$.

Enfin, on est dans le cas d'exception où la fraction $F(\alpha, A)$ n'appartient pas à σ pour certains points α de $\varphi_1 \varphi_2$: 1° si

$$h = \nu_0 + \frac{1}{2},$$

donc si $\nu_0 = \nu - 1$; 2° si $j''_{h+\frac{1}{2}}$ existe, donc si l'intervalle $I_{h+\frac{1}{2}} = I_\nu$ n'est pas entièrement inclus dans $I\left(\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}\right)$. On a alors

$$\left|\frac{\nu P + P'}{\nu Q + Q'} - \frac{P}{Q}\right| > \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{1}{\mu_1^2 Q^2} - \frac{1}{(\nu Q + Q')^2}\right].$$

Donc $\nu + \frac{Q'}{Q}$ doit être supérieur à la plus grande racine γ' de l'équation

$$\gamma^2 - \sqrt{5}\,\mu_1^2 \gamma - \mu_1^2 = 0.$$

On a

$$\gamma' = \sqrt{5}\,\mu_1^2 + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\theta'}{5\sqrt{5}\,\mu_1^2} \qquad (0 < \theta' < 1).$$

Le cas d'exception se produit si ν surpasse $\gamma' - \frac{Q'}{Q}$. D'après

$$\gamma' > \alpha',$$

la condition nécessaire et suffisante déterminant ce cas est donc la double inégalité

$$E'\left(\alpha' - \frac{Q'}{Q}\right) = E'\left(\frac{\beta'+1}{2} - \frac{Q'}{Q}\right) = E'\left(\gamma' - \frac{Q'}{Q}\right),$$

ν étant la valeur commune de ces trois nombres.

On a visiblement

$$\gamma' - \frac{\beta'+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-2}{4} - \frac{\theta'}{10\,\mu_1^2} + \frac{\theta_0}{160\,\mu_1^4} > 0.$$

Le cas exceptionnel sera donc réalisé si $\alpha' - \frac{Q'}{Q}$ et $\gamma' - \frac{Q'}{Q}$ sont compris entre les deux mêmes entiers consécutifs. Ceci n'est pas, *a priori*, impossible; car $\gamma' - \alpha'$ est très sensiblement égal à $\frac{2}{\sqrt{5}}$, qui est voisin de $\frac{8}{9}$ et inférieur à 1. Il est même évident que le cas d'exception se produira lorsque Q sera assez grand pour qu'il y ait au moins une valeur de $\frac{Q'}{Q}$ dans tout intervalle de longueur

$$1-(\gamma'-\alpha')$$

compris entre 0 et 1. On sait que Q' peut prendre toutes les valeurs inférieures à Q et premières avec Q.

Désignons par μ', h', ν', ν'_0 d'une part, μ'', h'', ν'', ν''_0 d'autre part, les valeurs de μ, h, ν, ν_0, quand $\frac{P'}{Q'}$ coïncide respectivement avec $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ou avec $\frac{P'_n}{Q'_n}$, par σ' et par σ'', les deux systèmes σ correspondants. Nous avons déjà obtenu les relations

$$\mu_1 \geqq \mu' \geqq \mu'' \geqq \mu_1 - 1,$$

$\frac{Q'_{n-1}}{Q}$ étant inférieur à $\frac{1}{2}$ et, *a fortiori*, à $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Si $\mu'=1$, la fraction $F_{\mu'+\frac{1}{2}}$ ne figure pas dans le système σ'. D'après $\mu' \geqq \mu''$, on a alors $\mu''=1$. La fraction $E_{\mu''+\frac{1}{2}}$ ne figurera pas dans σ'', si

$$\frac{Q'_n}{Q} < \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ce qui est compatible avec

$$\frac{Q'_n}{Q} > \frac{1}{2}.$$

Cherchons les rapports de grandeurs de ν', ν'_0 ; ν'', ν''_0. Si nous posons

$$e' = \alpha' - \frac{Q_{n-1}}{Q}, \qquad e'_0 = \frac{\beta'-1}{2} - \frac{Q_{n-1}}{Q},$$
$$e'' = \alpha' - \frac{Q'_n}{Q'}, \qquad e''_0 = \frac{\beta'-1}{2} - \frac{Q'_n}{Q},$$

ν', ν'_0 ; ν'', ν''_0 sont respectivement les valeurs à une unité près par excès de e', e'_0 ; e'', e''_0. Or, posons

$$\alpha' - \frac{\beta'-1}{2} = \omega, \qquad \frac{Q'_n - Q_{n-1}}{Q} = \lambda;$$

ω, avons-nous vu, est positif quel que soit μ $\left(\text{et voisin de } \frac{1}{5}\right)$.

λ, compris entre o et 1, peut être, *a priori*, arbitrairement voisin de ces limites. On a

$$e' = e'_0 + \omega = e'' + \lambda = e''_0 + \omega + \lambda.$$

Ceci nous montre d'abord que des quatre nombres e, e' est le plus grand, e''_0 est le plus petit, les deux nombres intermédiaires e'_0 et e'' étant situés dans un ordre relatif de grandeurs, variable selon la position de λ relativement à ω.

L'excès de e' sur e''_0 peut surpasser l'unité. Il n'est donc pas impossible, *a priori*, que $\nu' = \nu''_0 + 2$. Mais les termes moyens e'_0 et e'' diffèrent des termes extrêmes de moins d'une unité. Donc on a, dans ce cas,

$$\nu''_0 + 1 = \nu'' = \nu'_0 = \nu' - 1,$$

$$h' = \nu'_0 + \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad h'' = \nu''_0 + \frac{1}{2}.$$

En dehors de ce cas, on peut avoir $\nu''_0 + 1 = \nu''$, ν'_0 et ν'' étant égaux soit à ν' soit à ν''_0. h' est toujours au moins égal à h''.

Si $\nu'' = \nu''_0$; $\nu'_0 = \nu'$, on a

$$h' = h'' = \nu'.$$

Si $\nu'' = \nu''_0$, on a

$$h' = h'' + \frac{1}{2}.$$

Si $\nu'' = \nu'$; $\nu''_0 = \nu'_0$

$$h' = h'' = \nu' - \frac{1}{2}.$$

Enfin, on peut avoir

$$\nu' = \nu'_0 = \nu'' = \nu''_0 = h' = h''.$$

Nous allons construire le système de fractions qui vient d'être décrit pour le cas particulier $A = 5$.

A priori, si le système Σ cherché comprend une fraction $\frac{a}{b}$, il contient la fraction complémentaire relativement à 1, $\frac{b-a}{b}$. Il suffit pour le voir de remarquer que, si $\frac{a}{b}$ jouit, relativement à un nombre α, des propriétés d'approximation qui caractérisent le système Σ, $\frac{b-a}{b}$ jouit de ces mêmes propriétés relativement à $1 - \alpha$. On pourrait également constater la symétrie des couples de fractions $\left(\frac{P}{Q}, \frac{P'}{Q'}\right)$ relativement au nombre $\frac{1}{2}$. Nous n'envisagerons donc que les fractions $\frac{P}{Q}$ et $\frac{G}{K}$ au plus égales à $\frac{1}{2}$. Les fractions $\frac{P}{Q}$ irréductibles, n'excédant pas $\frac{1}{2}$ et de hauteur inférieure à 5, sont les suivantes

$$\frac{P}{Q} = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}.$$

Nous allons calculer les réduites pénultièmes $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P'_n}{Q'_n}$ des fractions $\frac{P}{Q}$, les nombres μ', ν', ν'_0, h' relatifs aux premières; μ'', ν'', ν''_0, h'' relatifs aux secondes.

Les nombres $\mu_1 = E'\left(\frac{5}{Q}\right)$ sont

$$\mu_1 = 5,\ 2,\ 2,\ 3.$$

Les réduites $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ correspondent aux développements avec un dernier quotient incomplet supérieur à un. Ces développements sont

$$\ldots,\ (0, 4),\ (0, 3),\ (0, 2);$$

d'où les réduites pénultièmes

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \ldots, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}, \frac{0}{1}.$$

Les valeurs de μ', déduites de la formule $\mu' = E'\left(\frac{5 - Q_{n-1}}{Q}\right)$, sont

$$\mu' = \ldots,\ 1,\ 2,\ 2.$$

Les fractions $\frac{G}{K} = \frac{\mu' P + P_{n-1}}{\mu' Q + Q_{n-1}}$ sont donc les suivantes

$$\frac{G}{K} = \ldots, \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5}.$$

Les segments $\varphi_1 \varphi_2$, auxquels nous appliquons la construction du système σ, sont donc

$$\frac{1}{5} \text{ à } \frac{1}{4}, \qquad \frac{2}{7} \text{ à } \frac{1}{3}, \qquad \frac{2}{5} \text{ à } \frac{1}{2}.$$

Les nombres ν' sont égaux à $E'\left(\alpha' - \frac{Q_{n-1}}{Q}\right)$, α' dépendant de μ_1;

d'après la formule

$$\alpha = \sqrt{5}\,\mu_1^2 - \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{\theta}{8\mu_1^2} = \mu_1^2 \times 2,2360 - 0,4472 - \frac{\theta}{8\mu_1^2},$$

ces nombres sont donc

$$\nu' = \ldots,\ 9,\ 9,\ 20.$$

Les nombres ν'_0 sont égaux à $E'\left(\frac{\beta'-1}{2} - \frac{Q_{n-1}}{Q}\right)$ avec

$$\frac{\beta'-1}{2} = \sqrt{5}\,\mu_1^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{5}} - \frac{\theta_0}{160\mu_1^2} = \mu_1^2 \times 2,2360 - 0,6118 - \frac{\theta_0}{160\mu_1^2}.$$

Ce sont

$$\nu'_0 = \ldots,\ 9,\ 8,\ 20.$$

Les valeurs de h' sont

$$h' = \ldots,\ 9,\ \frac{17}{2},\ 20.$$

On constate enfin que $E'\left(\gamma' - \frac{1}{3}\right) = 10$, en sorte que le cas d'exception n'est réalisé sur aucun domaine.

Les suites de fractions $\frac{\lambda P + P_{n-1}}{\lambda Q + Q_{n-1}}$, où λ procède par multiples entiers de $\frac{1}{2}$, inclusivement à partir de μ', jusqu'à h', sont donc celles-ci :

$\frac{\lambda}{4\lambda+1}$	de	$\lambda = 1$ à $\lambda = 9$	pour l'intervalle	$\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{4}$	(17 fractions),
$\frac{\lambda}{3\lambda+1}$	»	$\lambda = 2$ à $\lambda = \frac{17}{2}$	»	$\frac{2}{7}$ à $\frac{1}{3}$	(14 »),
$\frac{\lambda}{2\lambda+1}$	»	$\lambda = 2$ à $\lambda = 20$	»	$\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{2}$	(37 »).

Dans la première série, la fraction $\frac{3}{14}$ correspondant à $\lambda = \frac{3}{2}$ doit être supprimée.

Cherchons maintenant les nombres μ'' et h'' pour les réduites pénultièmes $\frac{P'_n}{Q'_n}$. Nous avons pour o la suite de réduites $\frac{1}{0}$, $\frac{0}{1}$, ce qui nous donne la réduite pénultième positive $\frac{1}{0}$. La réduite pénultième $\frac{P'_n}{Q'_n}$, correspondant à $\frac{1}{2}$, détermine la portion du domaine $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$ située à droite de $\frac{1}{2}$. Nous ne la considérerons pas. Les développements des fractions

$$\frac{P}{Q} = \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}$$

terminés (sauf le premier) par le quotient incomplet un, sont

$$(0), \quad (0, 3, 1), \quad (0, 2, 1).$$

D'où les réduites pénultièmes :

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{2}$$

et le tableau de nombres

$$\mu'' = E'\left(\frac{5 - Q'_n}{Q}\right) = 5, 1, 1;$$

$$\frac{\mu'' P + P'_n}{\mu'' Q + Q'_n} = \frac{1}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{5},$$

$$\nu'' = E'\left(\alpha' - \frac{Q'_n}{Q}\right) = 55, 8, 8,$$

$$\nu''_0 = E'\left(\frac{\beta' - 1}{2} - \frac{Q'_n}{Q}\right) = 55, 8, 8,$$

$$h'' = 55, 8, 8.$$

D'où les suites de fractions

$\frac{1}{\lambda}$	de	$\lambda = 5$ à $\lambda = 55$	pour l'intervalle	0 à $\frac{1}{5}$	(101 fractions),
$\frac{\lambda + 1}{4\lambda + 3}$	»	$\lambda = 1$ à $\lambda = 8$	»	$\frac{1}{4}$ à $\frac{2}{7}$	(15 »),
$\frac{\lambda + 1}{3\lambda + 2}$	»	$\lambda = 1$ à $\lambda = 8$	»	$\frac{1}{3}$ à $\frac{2}{5}$	(15 »).

Le cas $\frac{Q'}{Q} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ne se présentant pas avec $\mu'' = 1$, il n'y a pas de fractions à supprimer dans cette liste.

Réunissons les résultats. Nous avons énoncé successivement 67, puis 131 fractions. Les trois fractions $\frac{G}{K}$ ont été comptées deux fois. Restent 195 fractions distinctes. Ajoutons-leur les fractions complémentaires relativement à 1, puis les 7 fractions

$$\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q} = \frac{0}{5}, \frac{2}{8}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{5}.$$

Nous obtenons, rangées par ordre de grandeurs croissantes, 397 fractions qui forment le système Σ :

$$\mathbf{\tfrac{0}{5}}.\ \frac{1}{55},\ \frac{2}{109},\ \frac{1}{54},\ \frac{2}{107},\ \frac{1}{53},\ \frac{2}{105},\ \frac{1}{52},\ \frac{2}{103},\ \frac{1}{51},\ \frac{2}{101},\ \frac{1}{50},\ \frac{2}{99},\ \ldots,\ \frac{1}{11},\ \frac{2}{21},$$

$$\frac{1}{10},\ \frac{2}{19},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{17},\ \frac{1}{8},\ \frac{2}{15},\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{13},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{11};\ \mathbf{\tfrac{1}{5}};\ \frac{2}{9},\ \frac{5}{22},\ \frac{3}{13},\ \frac{7}{30},\ \frac{4}{17},\ \frac{9}{38},\ \frac{5}{21},\ \frac{11}{46},$$

$$\frac{6}{25},\ \frac{13}{54},\ \frac{7}{29},\ \frac{15}{62},\ \frac{8}{33},\ \frac{17}{70},\ \frac{9}{37}.\ \mathbf{\tfrac{2}{8}}.\ \frac{9}{35},\ \frac{17}{66},\ \frac{8}{31},\ \frac{15}{58},\ \frac{7}{27},\ \frac{13}{50},\ \frac{6}{23},\ \frac{11}{42},\ \frac{5}{19},\ \frac{9}{34},$$

$$\frac{4}{15},\ \frac{7}{26},\ \frac{3}{11},\ \frac{5}{18};\ \mathbf{\tfrac{2}{7}};\ \frac{3}{11},\ \frac{3}{10},\ \frac{15}{17},\ \frac{4}{13},\ \frac{7}{23},\ \frac{5}{16},\ \frac{9}{29},\ \frac{6}{19},\ \frac{11}{35},\ \frac{7}{22},\ \frac{13}{41},\ \frac{8}{25},\ \frac{15}{47}.$$

$$\mathbf{\tfrac{2}{6}}.\ \frac{9}{26},\ \frac{17}{49},\ \frac{8}{23},\ \frac{15}{43},\ \frac{7}{20},\ \frac{13}{37},\ \frac{6}{17},\ \frac{11}{31},\ \frac{5}{14},\ \frac{9}{25},\ \frac{4}{11},\ \frac{7}{19},\ \frac{3}{8},\ \frac{5}{13};\ \mathbf{\tfrac{2}{5}};\ \frac{5}{12},\ \frac{3}{7},\ \frac{7}{16},$$

$$\frac{4}{9},\ \frac{9}{20},\ \frac{5}{11},\ \frac{11}{24},\ \frac{6}{13},\ \frac{13}{28},\ \frac{7}{15},\ \frac{15}{32},\ \frac{8}{17},\ \frac{17}{36},\ \frac{9}{19},\ \frac{19}{40},\ \frac{10}{21},\ \frac{21}{44},\ \frac{11}{23},\ \frac{23}{48},\ \frac{12}{25},\ \frac{25}{52},$$

$$\frac{13}{27},\ \frac{27}{56},\ \frac{14}{29},\ \frac{29}{60},\ \frac{15}{31},\ \frac{31}{64},\ \frac{16}{33},\ \frac{33}{68},\ \frac{17}{35},\ \frac{35}{72},\ \frac{18}{37},\ \frac{37}{76},\ \frac{19}{39},\ \frac{39}{80},\ \frac{20}{41}.\ \mathbf{\tfrac{3}{6}}.\ \frac{21}{41},\ \ldots,$$

$$\frac{7}{12};\ \mathbf{\tfrac{3}{5}};\ \frac{8}{13},\ \ldots,\ \frac{17}{26}.\ \mathbf{\tfrac{4}{6}}.\ \frac{32}{47},\ \ldots,\ \frac{8}{11};\ \mathbf{\tfrac{5}{7}};\ \frac{13}{18},\ \ldots,\ \frac{26}{35}.\ \mathbf{\tfrac{6}{8}}.\ \frac{28}{37},\ \ldots,\ \frac{7}{9};\ \mathbf{\tfrac{4}{5}};$$

$$\frac{9}{11},\ \ldots,\ \frac{54}{55}.\ \mathbf{\tfrac{5}{5}}.$$

Les points de la première ligne remplacent les 76 fractions du type $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{2n-1}$, (n entier), qu'on obtient en faisant varier n de 49 à 12. Nous n'avons écrit parmi les fractions supérieures à $\frac{1}{2}$ que les fractions déterminant ou séparant des domaines et celles qui les avoisinent immédiatement.

Il a été démontré que le système Σ est : 1° complet; donc, les intervalles canoniques des 397 fractions énoncées recouvrent la totalité du segment 0 — 1; 2° strictement complet; donc, si l'on supprime une seule de ces fractions, les intervalles canoniques des 396 fractions restantes laissent à découvert un intervalle; 3° il est le plus simple parmi les systèmes S de hauteur supérieure à 4. En d'autres termes, étant donné un système S quelconque, ou bien S contient toutes les fractions de Σ, ou bien, dans l'intervalle canonique de toute fraction φ de Σ, n'appartenant pas à S, il existe certains points où la fraction, normalement approchante la plus simple fournie par S, est plus haute que φ; 4° le cas d'exception n'étant pas réalisé, la fraction la plus simple de hauteur supérieure à 4, approchant un nombre α quelconque compris dans l'intervalle o — 1, fait toujours partie de Σ.

L'exposition gagne beaucoup en brièveté, si l'on se contente de déterminer un système complet, mais non pas nécessairement strictement complet. Si l'on se pose simplement le problème suivant : Étant donné A, déterminer B tel que l'ensemble des fractions de dénominateur q, supérieur à $A - 1$ et inférieur à $B + 1$, soit un système complet sur le segment (o, 1); deux procédés de recherche se présentent naturellement à l'esprit :

Ou bien, on cherchera la condition pour que chaque fraction du système soit adjacente à une au moins placée à sa gauche et une au moins placée à sa droite : ou bien on cherchera la condition pour qu'un nombre quelconque soit normalement approché par une fraction au moins de ce système.

Le premier procédé est utilisé par M. Borel, dans son Mémoire et dans ses *Leçons*. Voici comment le second conduit rapidement à la détermination de la valeur la plus faible de B, pour une valeur donnée de A.

Distinguons les nombres en trois catégories : 1° les nombres rationnels irréductibles de dénominateurs inférieurs à A; 2° les nombres rationnels irréductibles de dénominateurs compris entre A et B inclusivement; 3° les nombres rationnels irréductibles de dénominateurs supérieurs à B et les nombres irrationnels.

Désignons par (A, B) le système des fractions dont la hauteur est supérieure à $A - 1$ et inférieure à $B + 1$. Il suffit que B surpasse $2A - 3$, pour que chaque nombre de la première classe ait un équimultiple de sa forme irréductible compris entre A et B inclusivement. Chacun coïncide donc avec le centre d'un intervalle canonique du système (A, B). Il en est de même pour tout nombre de la deuxième classe.

Soit α un nombre de la troisième classe. Nous le développons en fraction continue. Soient

$$\ldots,\ \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}},\ \frac{P}{Q},\ \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}},\ \ldots,\ \frac{P_{n+h}}{Q_{n+h}},\ \frac{P_{n+h+1}}{Q_{n+h+1}},\ \ldots$$

ses réduites successives, telles que

$$Q < A \leqq Q_{n+1} < \ldots, \qquad Q_{n+h} \leqq B < Q_{n+h+1}.$$

Donnons à B une valeur arbitraire supérieure à $2A - 3$. Deux cas se présentent : ou bien α est normalement approché par l'une des réduites $R_{n+1}, \ldots, R_{n+h}$, ou bien il ne l'est pas. Dans le premier cas, α se trouve normalement approché par l'une au moins des fractions du système (A, B). Cherchons à quelles conditions le second cas est possible.

On a d'abord $h \leqq 2$. Car, si $h \geqq 3$, il y aurait trois réduites *consécutives* au moins de dénominateur compris entre A et B. Or, α serait adjacent à l'une d'elles. Car il résulte d'un théorème de M. Borel (*loc. cit.*) que, sur trois réduites consécutives d'un nombre α, l'une au moins approche normalement α.

Premier cas. — Supposons $h = 2$. Soient

$$Q_{n+1} = a_{n+1} Q + Q_{n-1}, \qquad Q_{n+2} = a_{n+2} Q_{n+1} + Q,$$
$$Q_{n+3} = a_{n+3} Q_{n+2} + Q_{n+1}.$$

Il est impossible que $a_{n+2} > 1$, sans quoi R_{n+1} et R_{n+2} sont adjacents; α est normalement approché par l'une de ces réduites. Pour une raison analogue, il faut $a_{n+3} = 1$.

On a donc

$$a_{n+2} = a_{n+3} = 1\,;$$

d'où

$$Q_{n+3} = (2a_{n+1} + 1) Q + 2 Q_{n-1}\,;$$

donc

$$(1) \qquad Q < A, \qquad (2a_{n+1} + 1) Q + 2 Q_{n-1} > B.$$

Deuxième cas. — $h = 1$. On trouve alors que, si R_{n+1} n'approche pas α, on a

$$a_{n+2} = 1 \qquad \text{ou} \qquad a_{n+2} = 2.$$

Dans la première hypothèse,

$$(2) \qquad Q < A, \qquad Q_{n+2} = (a_{n+1} + 1) Q + Q_{n-1} > B\,;$$

dans la seconde,

$$(3) \qquad Q < A, \qquad Q_{n+2} = (2a_{n+1} + 1) Q + 2 Q_{n-1} > B.$$

Troisième cas. — $h = 0$. Alors

$$(4) \qquad Q < A, \qquad Q_{n+1} = a_{n+1} Q + Q_{n-1} > B.$$

Donc, B étant quelconque, ou bien l'une des réduites de α

appartenant au système (A, B) l'approche normalement, ou bien le nombre a_{n+1} satisfait à l'une des quatre inégalités écrites. Mais, si je donne à B des valeurs de plus en plus grandes, a_{n+1} devient de plus en plus grand et, par suite, α tend vers $\frac{P}{Q}$. Il finit donc par être compris dans l'intervalle canonique de $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$, μ_1 étant égal à $E'\left(\frac{A}{Q}\right)$. Comme les limites où oscille α sont bien aisées à déterminer connaissant Q et B, on établira aisément la condition pour que α soit adjacent à $\frac{\mu_1 P}{\mu_1 Q}$. Ceci nous donne une valeur minima de B, ne dépendant que de Q et de A. Ainsi s'introduit naturellement l'idée d'attacher une valeur de B particulière à chaque domaine $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$. On prouve aisément, en donnant à Q_{n-1}, a_{n+1} les valeurs les plus favorables, que la limite inférieure de B, trouvée par la voie indiquée, ne peut pas être diminuée.

La limite inférieure obtenue par cette voie n'est autre que

$$(2\nu - 1)Q + 2Q',$$

valeur trouvée précédemment.

On a

$$\alpha' - \frac{Q'}{Q} < \nu < \alpha' - \frac{Q'}{Q} + 1.$$

Donc, si

$$B = (2\nu - 1)Q + 2Q',$$

$$(2\alpha' - 1)Q < B < (2\alpha' + 1)Q,$$

ou

$$B_1 - \theta_1 = \left(2\sqrt{5}\,\mu_1^2 - 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\theta}{4\mu_1^2}\right)Q < B$$

$$< \left(2\sqrt{5}\,\mu_1^2 + 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\theta}{4\mu_1^2}\right)Q = B_2 + \theta_2 \qquad \left(0 < \begin{matrix}\theta_1\\ \theta_2\end{matrix} < 1\right).$$

Les valeurs de B, correspondant à une même valeur de Q et aux valeurs de Q' premières avec Q, sont donc comprises entre B_1 et B_2, inclusivement. On se rend compte facilement qu'en général elles peuvent atteindre ces limites ou des nombres très voisins pour des valeurs convenables de Q'. Si l'on forme, pour chacun des domaines $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$ correspondant à une même valeur de Q, le système des fractions de dénominateurs compris inclusivement entre A et B_2 et qui sont situées dans ces domaines, tout nombre appartenant à l'un de ces domaines est normalement approché par l'une au moins des fractions de ce système, tandis que ceci serait inexact pour certains de ces nombres, si l'on prenait B_1 au lieu de B_2.

Étudions, sommairement, la variation de B avec Q et A.

Si nous nous donnons A, nous constatons que B_2 et B_1 décroissent avec $\frac{1}{Q}$. Ceci démontre que, dans un intervalle quelconque, ce sont les nombres rationnels aux dénominateurs les plus simples qui sont le plus difficilement approchables par les nombres rationnels (qui ne coïncident pas avec eux), tandis que, autour des nombres à dénominateurs élevés, la densité des nombres rationnels est très grande. Comme nous le disions au début de cette Note, l'idée essentielle, qui doit guider la recherche dans ces questions d'approximations de nombres par d'autres, est que les nombres sont d'autant plus distincts les uns des autres que leur définition est plus simple. Les entiers 0, 1 sont les mieux isolés des nombres rationnels, mais le nombre $\frac{1}{2}$ est mieux isolé que $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, etc.

Pour approcher normalement par des fractions plus hautes que $A-1$, des nombres très voisins de 0, ou de 1, de $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{p'}{p}$, p et p' étant fixes, je dois, m'étantdonné A, former des fractions dont les dénominateurs vont jusqu'à kA^2, k étant fini en même temps que p, et environ inversement proportionnel à p. Si, au contraire, je veux approcher normalement de nombres très voisins de fractions irréductibles de dénominateurs $\frac{A}{h}$, h restant fini, quand A est grand, il me suffit de former des fractions de dénominateurs inférieurs à kA, k étant fini en même temps que h et environ proportionnel à h.

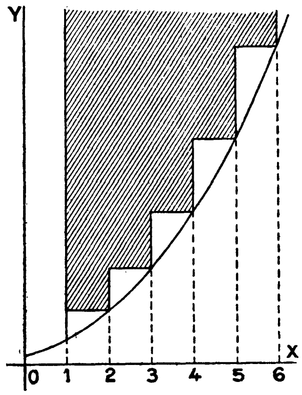
On peut songer à représenter par des courbes les variations concomitantes de Q, A, B_2. Supposons que, Q étant laissé fixe, on cherche la variation simultanée de A et de B_2. La relation

$$2\sqrt{5}\,QE'^2\left(\frac{A}{Q}\right)+\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)Q=B'_2$$

est homogène relativement à A, B'_2, Q. Nous construisons la courbe

$$2\sqrt{5}\,x^2 + 1 - \frac{2}{\sqrt{5}} - y = 0.$$

De la zone négative de cette parabole nous ne conservons que les parties où $x = h + \theta\ (0 < \theta \leqq 1)$, $y \geqq y_{h+1}$, si y_{h+1} correspond sur la courbe à $x = h + 1$. Ce sont les parties couvertes de hâchures. Nous prenons l'homothétique de la zone hâchurée avec



l'origine pour centre et le rapport Q. La nouvelle zone hâchurée est telle que pour tout point (A, B_2) de coordonnées entières, situé dans cette zone, l'approximation d'un nombre appartenant à un domaine $\left(\frac{P}{Q}, A\right)$ peut se faire normalement par une fraction de dénominateur compris entre $A - 1$ et $B_2 + 1$.

Il serait également commode de représenter par une figure la variation simultanée de B et de Q, A étant fixe.

Enfin, tout ce qui précède rend aisée la solution de problèmes tels que le suivant : Déterminer, pour un nombre irrationnel donné α, la variation de $B = A\,\psi(A)$, B étant la hauteur de la fraction la plus simple, plus haute que A et approchant normalement α. On trouve aisément que $\psi(A)$ est borné, quand α est une irrationnelle du second degré ou, plus généralement, si les quotients incomplets du développement de α sont bornés. Il est intéressant d'étudier la valeur moyenne de $\psi(A)$ entre 1 et A, et ses limites d'indétermination pour A infini. Si α est une irrationnelle du second ordre, la plus petite surpasse l'unité. Elle s'en approche d'autant plus que l'équation admettant α pour racine a ses coefficients plus hauts. Mais, si α a des quotients incomplets, arbitrairement grands, les limites d'indétermination de cette valeur moyenne sont 1 et l'infini. Les théories précédentes rendent immédiat l'établissement de ces propositions.