BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DULAC

Solutions d' ordre imaginaire d'une équation différentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 223-246
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__223_0>

SOLUTIONS D'ORDRE IMAGINAIRE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE;

PAR M. HENRI DULAC.

1. Considérons une équation différentielle

$$(1) \qquad Y(x, y)\, dy + X(x, y)\, dx = 0$$

et une valeur de x que nous pouvons toujours, pour simplifier, supposer être $x = 0$. Je dirai que l'équation admet, dans le voisinage de $x = 0$, une solution $y(x)$ *d'ordre imaginaire*, si μ étant un nombre complexe, il existe une solution telle que $y : x^{\mu}$ tende vers une limite finie et différente de 0, lorsque x tend vers 0. Il ne sera pas nécessaire, pour qu'il y ait une solution d'ordre imaginaire, que $y : x^{\mu}$ tende vers une limite finie, quelle que soit la façon dont x tend vers 0, il suffira qu'il y ait une solution telle que $y : x^{\mu}$ tende vers une limite finie, lorsque x tend vers 0 suivant une certaine loi.

Je me suis proposé de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation (1) ait une solution d'ordre imaginaire et j'obtiens le résultat suivant. Considérons les expressions

$$xX(x, y) = \Sigma A_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta},$$
$$yY(x, y) = \Sigma B_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} y^{\beta},$$

composées chacune d'un nombre fini ou infini de termes, mais convergentes dans ce dernier cas, lorsque $|x|$ et $|y|$ sont suffisamment petits. Figurons dans le plan de deux axes de coordonnées $o\beta$ et $o\alpha$, le réseau des points ayant pour coordonnées les valeurs de α et de β correspondant aux divers termes de ces expressions. Traçons à la façon ordinaire la ligne polygonale, dite *polygone figuratif*, ayant pour sommets certains des points de ce réseau et telle que tous les autres points du réseau soient au-dessus de cette ligne ou sur ses côtés. *Pour qu'il existe une solution d'ordre imaginaire*, $\mu = a + ib$ (b n'étant pas nul), *il faut et il suffit que pour un sommet du polygone figuratif, dont nous désigne-*

rons les coordonnées par m et n l'on ait

$$A_{mn} + \mu B_{mn} = 0.$$

A chacun des sommets α, β du polygone figuratif pour lequel le rapport $A_{\alpha\beta} : B_{\alpha\beta}$ est un nombre complexe, correspond une infinité de solutions d'ordre imaginaire dont nous obtiendrons l'expression sous la forme d'un développement en série. Nous étudierons ensuite quelques propriétés de ces solutions.

2. M. Horn dans un intéressant Mémoire (*Journal de Crelle*, t. 113) a déjà étudié la question que je me suis posée et a recherché les *intégrales d'ordre non rationnel* d'une équation différentielle. J'ai cru devoir reprendre cette étude, par d'autres méthodes, pour les raisons suivantes.

La méthode employée par M. Horn pour rechercher les valeurs de μ non rationnelles telles que l'équation admette une solution $y(x)$ d'ordre μ, est fort simple, mais ne me paraît pas présenter une rigueur suffisante : on y suppose que si u est une fonction de z telle que $u : z^\mu$ tende vers une limite c, lorsque z tend vers 0, on a nécessairement

$$\lim z \frac{du}{dz} : z^\mu = c\mu.$$

Cette assertion a besoin d'être justifiée. Elle me paraît exacte pour les fonctions définies par une équation différentielle du premier ordre, de l'espèce indiquée, mais elle est inexacte si l'on considère une fonction $u(z)$ quelconque. En second lieu, la méthode suivie par M. Horn, pour établir dans certains cas l'existence de solutions $y(x)$ d'ordre non rationnel, méthode qui exige plusieurs changements successifs de variables, oblige à laisser de côté (*voir* Note, p. 54) certains cas particuliers qui dans la méthode plus simple, me semble-t-il, que j'emploie ne présentent rien d'exceptionnel. Enfin, la différence la plus marquée entre le travail de M. Horn et le mien consiste en ce que M. Horn suppose implicitement que l'argument de x reste fini, lorsque x tend vers 0, et n'obtient ainsi que certaines catégories de solutions d'ordre imaginaire. On pourra voir dans la suite que si l'on suppose que l'argument de x puisse croître indéfiniment, cette hypothèse entraîne sans doute quelques complications dans certaines démonstrations, mais il en résulte tout naturellement des conclusions moins restrictives et d'un énoncé plus simple. J'ai déjà fait remarquer ailleurs qu'il était artificiel (dans ce genre de questions) de supposer que l'argument de x reste fini. Pour montrer comment cette hypothèse peut, dans certains cas, éliminer des solutions intéressantes, prenons l'équation

$$(2y + x^3 + xy^2)\, dy + (2x - x^2 y - y^3)\, dx = 0$$

dont la solution générale est, en posant $x = \rho \cos\theta, y = \rho \sin\theta$, donnée par

$$\rho^2 = \frac{1}{\theta + C}.$$

Pour toutes les solutions de l'équation, $x = 0, y = 0$ est un point asymptote. Si nous faisons le changement de variables

$$x + iy = u, \qquad x - iy = v,$$

on obtient l'équation

$$u(2 + i\,uv)\, dv + v(2 - i\,uv)\, du = 0,$$

équation qui n'admet pas de solution telle que u et v tendent simultanément vers 0, si l'on exige que l'argument d'une des variables u ou v reste fini.

3. Je me propose de montrer que, sauf dans un cas que la démonstration mettra en évidence, il est impossible que l'équation (1) ait une solution $y(x)$ d'ordre imaginaire : c'est-à-dire impossible qu'on puisse faire tendre x vers 0 de telle façon que y tende vers 0 et que $y : x^\mu$ tende vers une limite finie différente de 0. Posons

$$y = t x^\mu,$$

l'équation (1) devient

$$x^\mu \mathrm{Y}(x, y)\, dt + [\mu \mathrm{Y}(x,y)\, x^{\mu-1} + \mathrm{X}(x,y)]\, dx = 0,$$

et si nous posons ensuite

$$x = e^z,$$

nous aurons l'équation

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t} \frac{y \mathrm{Y}(x,y)}{\mu y \mathrm{Y}(x,y) + x \mathrm{X}(x,y)}, \tag{2}$$

où, pour abréger, nous laissons pour le moment, dans le second membre y, au lieu de le remplacer par tx^μ.

La marche de notre démonstration sera la suivante. Nous démontrerons d'abord que, sauf dans un cas, il existe un certain domaine D, tel que si z et t prennent des valeurs intérieures à ce domaine, on ait $\frac{dz}{dt} < M$, M étant un certain nombre fixe. Il en résulte que, $z = \beta$, $t = \alpha$ étant des valeurs intérieures à ce domaine, la solution $z(t)$ qui pour $t = \alpha$ prend la valeur $z = \beta$ sera, pour t voisin de α, holomorphe et voisine de $z = \beta$. Nous prouverons d'autre part que s'il y a une solution de (1) d'ordre imaginaire telle que t tende vers une limite finie t_0, lorsque x tend vers 0, cette solution fournira une solution $z(t)$ telle que pour $t = \alpha$, z prenne une valeur β, les valeurs α et β étant intérieures au domaine D. Il en résultera que lorsque t tend vers t_0, z restera voisin de β, ce qui est absurde, puisque nous supposons que $z = Lx$ croît indéfiniment. Ce ne sera donc que dans le cas d'exception signalé qu'il pourra y avoir des solutions d'ordre imaginaire.

Démontrons d'abord le lemme suivant :

Supposons que, x étant une variable complexe et h un nombre positif, l'on ait

$$|e^x - 1| \leqq h,$$

nous aurons

$$e^x = 1 + \theta h, \qquad x = L(1 + \theta h),$$

θ étant un nombre complexe de module au plus égal à 1. Pour h inférieur à 1, nous aurons

$$x = 2k\pi i + \theta h - \frac{\theta^2 h^2}{2} + \frac{\theta^3 h^3}{3} - \ldots,$$

k étant un certain nombre entier. Si nous supposons maintenant $h < \frac{1}{2}$, nous aurons

$$|x - 2k\pi i| < \frac{h}{1-h} < 2h.$$

En considérant dans le plan de la variable complexe x, tous les cercles de rayon $2h$ décrits autour des affixes des valeurs $2k\pi i$, le résultat obtenu peut s'énoncer de la façon suivante : si l'on a $|e^x - 1| \leqq h$, le point d'affixe x sera intérieur à l'un des cercles précédents. Inversement si le point d'affixe x est extérieur à tous ces cercles, on aura

$$|e^x - 1| > h.$$

Pour arriver à la démonstration que nous avons en vue nous aurons besoin, après avoir remplacé y par x^μ dans le second membre de (2), de mettre en facteur au numérateur et au dénominateur une puissance de x telle que les termes qui restent après cette mise en facteur ne tendent pas tous vers 0, mais ne deviennent pas non plus infinis, lorsque x tend vers 0. Or μ étant imaginaire, il se présente pour cette mise en facteur une difficulté qui n'existe pas lorsque μ est réel : cette puissance de x mise en facteur variera en général avec la valeur que prend le rapport du module et de l'argument de x. Soit en effet un terme $C_{mn} x^m y^n$ du dénominateur, par exemple, nous aurons à nous demander si le module de $x^m y^n$ est supérieur ou inférieur aux quantités analogues relatives aux autres termes du dénominateur. Si nous posons

$$y = tx^\mu, \qquad x = e^z, \qquad z = u + iv, \qquad \mu = a + ib,$$

ce module, en faisant abstraction de $C_{mn} t^n$, est égal à

$$e^{(m+na)u - bnv}$$

qui, si nous posons $r = |x| = e^u$, est égal à

$$r^{m + na - bn\frac{v}{u}}.$$

En posant

$$\nu = a - b\frac{v}{u}$$

on voit que ce module est le même que le module $x^{m+n\nu}$. Il en résulte que pour savoir quelle puissance de x pourra être mise en facteur, il suffira de chercher le terme ou les termes où $m + n\nu$ prend la plus petite valeur possible. J'appellerai ces termes termes d'*ordre moindre*. Leur recherche pourra se faire par la méthode habituelle du polygone figuratif. Nous remarquerons que, la valeur de ν dépendant du rapport $v : u$, les termes d'ordre moindre pourront changer lorsque $v : u$ varie.

Si, après avoir remplacé y par tx^μ dans $\mu y \mathrm{Y}(x, y) + x\mathrm{X}(x, y)$, il y a dans cette expression, pour une valeur de $v : u$, un seul terme d'ordre moindre et que ce terme provienne de $\mu y\,Y(x, y)$, le module de $\frac{dz}{dt}$ restera fini lorsque x tend vers o et t tend vers t_0. En effet $\frac{dz}{dt}$ aura, dans ces conditions, pour limite $-\frac{1}{\mu t_0}$.

Si, dans $\mu y\,Y(x, y) + x\,X(x, y)$, il y a un seul terme d'ordre moindre et si ce terme provient de $x\,X(x, y)$ la quantité $\frac{dz}{dt}$ tendra vers o lorsque x tend vers o et t vers t_0.

Si les termes d'ordre moindre sont fournis à la fois par des termes de $y\,Y(x, y)$ et des termes de $x\,X(x, y)$, il peut se présenter un cas exceptionnel où ces termes disparaissent dans la somme $\mu y\,Y(x, y) + x\,X(x, y)$, lorsque à chacun de ces termes d'ordre moindre de la forme $A_{mn}\,x^m y^n$ fourni par $x\,X(x, y)$ correspond un terme $B_{mn}\,x^m y^n$ fourni par $y\,Y(x, y)$, tel que l'on ait $A_{mn} + \mu B_{mn} = 0$. Si nous mettons ce cas à part, nous pourrons diviser le numérateur et le dénominateur du second membre de (2) par une même puissance de x, celle qui figure dans un des termes d'ordre moindre de $\mu y\,Y(x, y) + x\,X(x, y)$ lorsqu'on a posé $y = tx^\mu$ [1] sans que les termes qui restent croissent indéfiniment, lorsque x tend vers o. L'équation (2) se présentera alors sous la forme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{Z(x, t)}{T(x, t)}. \tag{3}$$

A chaque côté du polygone figuratif correspond une valeur de ν, qui est la pente de ce côté et pour laquelle les termes d'ordre moindre sont les termes figurés par des points situés sur ce côté du polygone. A chaque sommet du polygone figuratif correspondent

---

(1) Après qu'on a supprimé dans les termes d'ordre moindre la puissance de x qui figure dans un de ces termes, il reste encore trace de x dans les autres termes. Supposons, par exemple, que ces termes d'ordre moindre soient $Ax^m y^n + A' x^{m'} y^{n'}$, ce qui exige qu'on ait

$$m + n\nu = m' + n'\nu$$

ou

$$(m + na)u - bnv = (m' + n'a)u - bnv.$$

L'expression considérée s'écrit, après avoir posé $y = tx^\mu$,

$$x^{m+\mu n}[A\,t^n + A'\,t^{n'} x^{m-m'+\mu(n-n')}];$$

le module de $x^{m-m'+\mu(n-n')}$ est égal à 1, mais son argument varie lorsque x varie.

les valeurs de ν comprises entre les pentes des deux côtés qui aboutissent à ce sommet du polygone figuratif et pour toutes ces valeurs de ν, les termes d'ordre moindre se réduisent au terme unique figuré par le sommet considéré.

Nous voyons que le nombre des manières de mettre, suivant la valeur du rapport $u : v$ l'équation (2) sous la forme (3) est fini, et pour toutes ces façons d'opérer $Z(x, t)$ est fini, lorsque x est voisin de o et t voisin de t_0. Nous allons démontrer que, lorsque z et t varient dans un certain domaine que nous allons fixer, le second membre de (2) reste inférieur en module à un nombre μ. Pour le voir, il nous suffira de montrer que $T(x,t)$ reste supérieur en module à un nombre fixe dans un certain domaine.

Décomposons $\mu y Y(x, y) + x X(x, y)$ en facteurs, de manière à mettre cette expression sous la forme

$$H(x, y) \prod_{i=1}^{p} (y + a_i x^{\alpha_i} + x^{\alpha_i} \varphi_i); \tag{4}$$

$H(x, y)$ désigne une fonction de x et y holomorphe et non nulle pour $x = 0$, $y = 0$; les a_i sont des constantes, les α_i des exposants positifs entiers ou fractionnaires, les quantités φ_i sont des fonctions de x qui se réduisent à o pour $x = 0$ et qui sont représentées par des développements suivant les puissances de x ou de $x^{\frac{1}{q_i}}$, q_i étant un certain entier. Si l'on considère [1] des valeurs de x telles que x^μ tend vers o avec x et si l'on prend $y = tx^\mu$, l'expression $H(x, y)$ restera supérieure en module à un nombre positif fixe N, lorsque x tend vers o et t vers t_0. L'expression $T(x, t)$ s'obtiendra en remplaçant dans (4) y par tx^μ et en supprimant dans chacun des facteurs du produit Π la puissance de x qui figure dans le terme d'ordre moindre de ce facteur. Pour démontrer que $T(x, t)$

---

(1) Nous supposons ici, pour simplifier, que nous considérons une solution $y(x)$ obtenue en faisant tendre x vers o de telle façon que x^μ tende vers o. Cette hypothèse n'est pas indispensable. Nous pouvons faire tendre x vers o de telle manière que x^μ reste fini, ne tende pas vers o et considérer des solutions $y(x)$ telles que $y : x^\mu$ tende vers t_0 lorsque x tend vers o et pour lesquelles y ne tend pas vers o. Nous aurons seulement besoin pour notre démonstration de supposer que y reste voisin de o, de telle manière que $H(x, y)$ soit convergent et reste supérieur en module à un nombre fixe N.

reste, dans un certain domaine, supérieur à un nombre fixe, il nous suffira de démontrer que chacun des facteurs du produit Π reste, après suppression de la puissance de x que nous venons d'indiquer, supérieur, dans un certain domaine, à un nombre fixe.

Considérons par exemple le facteur

$$y + a_1 x^{\alpha_1} + x^{\alpha_1}\varphi_1$$

qui devient

$$(5) \qquad t x^{\mu} + a_1 x^{\alpha_1} + x^{\alpha_1}\varphi_1.$$

La puissance de x qu'on peut mettre en facteur sera suivant le cas x^{μ} ou x^{α_1}. Pour que nous puissions mettre en facteur x^{μ}, il faut que $x^{\alpha_1-\mu}$ ne croisse pas indéfiniment, lorsque x tend vers o. Or, avec les notations déjà employées, le module de $x^{\alpha_1-\mu}$ est $r^{\alpha_1-\nu}$; donc, si $\alpha_1 - \nu$ est positif, nous mettrons x^{μ} en facteur. Si $\alpha_1 - \nu$ est négatif, nous mettrons x^{α_1} en facteur. Si l'on a $\alpha_1 = \nu$ il sera indifférent de mettre x^{α_1} ou x^{μ} en facteur. Si l'on met en facteur x^{μ}, il reste après la suppression de ce facteur l'expression

$$A_1 \equiv t + x^{\alpha_1-\mu}(a_1 + \varphi_1).$$

Désignons par z_1 un quelconque des nombres vérifiant l'équation

$$a_1 e^{(\alpha_1-\mu)z_1} + t_0 = o.$$

On peut trouver des nombres ε_1 et η_1 tels que, pour

$$(6) \qquad |t - t_0| < \eta_1, \qquad |x| < \varepsilon_1,$$

on ait

$$\left|\frac{t}{\alpha_1 + \varphi_1} - \frac{t_0}{\alpha_1}\right| < \frac{h_1 t_0}{\alpha_1},$$

h_1 étant un nombre arbitrairement choisi. On a par suite

$$\frac{t}{\alpha_1 + \varphi_1} = (1 + \theta_1 h_1)\frac{t_0}{\alpha_1} = -(1 + \theta_1 h_1)\, e^{(\alpha_1-\mu)z_1},$$

θ_1 étant une quantité dont le module est inférieur à 1. L'expression A_1 devient

$$-\frac{(a_1 + \varphi_1)\, t_0}{a_1}\left[e^{(\alpha_1-\mu)(z-z_1)} - 1 - \theta_1 h_1\right]$$

en posant comme précédemment $x = e^{z}$. Traçons autour des différents points

$$z = z_1 + \frac{2k\pi i}{\alpha_1 - \mu}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

dans le plan de la variable complexe z, des cercles C_k^1 de rayon $\frac{2h}{|\alpha_1 - \mu|}$. D'après le lemme, si z est extérieur à tous ces cercles, on aura

$$|e^{(\alpha_1-\mu)(z-z_1)} - 1| > h.$$

Si nous mettons en facteur x^{α_1}, l'expression (5) devient, après la suppression du facteur x^{α_1},

$$A_1' \equiv a_1 + \varphi_1 + t x^{\mu-\alpha_1}.$$

On peut trouver des nombres ε_1' et η_1' tels que, si l'on a

$$(7) \qquad |t - t_0| < \eta_1', \qquad |x| < \varepsilon_1',$$

on ait

$$\left|\frac{a_1 + \varphi_2}{t} - \frac{\mu_1}{t_0}\right| < \frac{h_1 a_1}{t_0}.$$

On a par suite, en supposant θ_1' de module inférieur à 1,

$$A_1' \equiv -\frac{t a_1}{t_0}[e^{(\mu-\alpha_1)(z-z_1)} - 1 - \theta_1' h_1]$$

et comme précédemment, si z est extérieur à tous les cercles C_k^1, on aura

$$|e^{(\mu-\alpha_1)(z-z_1)} - 1| > h.$$

Les quantités ε_1 et η_1, ε_1' et η_1' peuvent être supposées assez petites pour que si les conditions (6) et (7) sont vérifiées, il existe un nombre fixe N_1 différent de zéro et tel qu'on ait

$$\left|\frac{t a_1}{t_0}\right| > 2 N_1, \qquad \left|\frac{(a_1 + \varphi_1) t_0}{o_1}\right| > 2 N_1.$$

Si nous désignons par ε_1'' le plus petit des deux nombres ε_1 et ε_1' et par η_1'' le plus petit des deux nombres η_1 et η_1', on voit que, si l'on prend $h_1 = \frac{h}{2}$, si l'on suppose qu'on ait

$$|t - t_0| < \eta_1'', \qquad |x| < \varepsilon_1'',$$

et que z soit extérieur à tous les cercles C_k^1, l'expression A_1 ou l'expression A'_1 (suivant qu'il aura convenu de mettre en facteur x^μ ou x^{α_1}) reste supérieure en module à $h\,N_1$.

En opérant de même pour les divers facteurs du produit Π, nous aurons à considérer des séries de cercles C_k^2, C_k^3, ..., C_p^k analogues à la série de cercles C_k^1. Dans chacune de ces séries les centres des cercles seront des points situés sur une même droite et équidistants, c'est-à-dire tels que la distance de deux points consécutifs soit constante. Pour les cercles C_k^1 cette distance est $\frac{2\pi}{|\alpha_1 - \mu|}$ soit C l'ensemble de ces cercles. Certains des centres de cercles appartenant à deux séries différentes pourront coïncider, mais si l'on considère tous les centres distincts des cercles C_1 les distances mutuelles de deux centres auront une limite inférieure différente de o, ainsi que cela résulte facilement du fait que ces centres sont des points équidistants situés sur un nombre *fini* de droites. Nous désignerons cette limite inférieure par 4ζ. Nous pourrons prendre h assez petit pour que les rayons de tous les cercles C soient inférieurs à ζ. D'après ce qui précède, nous savons qu'il existe des nombres η et ε tels que si l'on a

$$|t - t_0| < \eta, \qquad |x| < \varepsilon,$$

et si z est extérieur à tous les cercles C, l'on ait

$$|T| > h^p N N_1 N_2 \dots N_p.$$

On a par suite, dans ces conditions, en désignant par M un nombre fixe

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| < M.$$

4. Le théorème préliminaire que nous avions en vue étant établi, nous allons maintenant démontrer qu'il est impossible que l'équation (2) admette une solution pour laquelle t tend vers t_0 lorsque x tend vers o.

Considérons les C' ayant pour rayon 2ζ et pour centres, les centres des cercles C. Ces cercles C' seront extérieurs les uns aux autres. Si z tend vers l'infini (de telle façon que $y = e^z$ tende vers o), z prendra certainement une valeur β extérieure à tous les cercles C' et l'on pourra supposer e^β aussi petit que l'on veut.

Considérons le cercle de rayon ζ décrit autour de $z = \beta$, dans le plan des z. Pour toutes les valeurs de z intérieures à ce cercle, c'est-à-dire telles que l'on ait $|z - \beta| < \zeta$, z sera extérieur aux cercles C. De plus, on peut supposer que e^β soit assez petit pour que, si l'on a $|z - \beta| < \zeta$, on ait

$$|e^z| = |x| < \varepsilon.$$

Supposons qu'il y ait une solution de (2) telle que, lorque x tend vers o, t tende vers t_0. On peut prendre ε' assez petit pour qu'on ait, en désignant par η' un nombre que nous fixerons dans la suite

$$|t - t_0| < \eta'$$

si l'on a

$$|x| < \varepsilon'.$$

Nous pourrons toujours supposer que ε' est au plus égal à ε, en remplaçant ε' par ε, dans le cas où l'on aurait $\varepsilon < \varepsilon'$. Quel que soit le chemin suivant lequel x tend vers o, nous avons vu que z prendra une valeur β jouissant des propriétés indiquées plus haut. Soit α la valeur de t pour $z = \beta$. Nous aurons $|\alpha - t_0| < \eta'$. Si l'on prend $\eta' < \frac{\eta}{2}$, la condition $|t - t_0| < \eta$ sera vérifiée si l'on a

$$|t - \alpha| < \frac{\eta}{2}.$$

Nous savons de plus que β a été pris de telle façon que, si l'on a $|z - \beta| < \zeta$, on a $|e^z| = |x| < \varepsilon$ et z est extérieur à tous les cercles C. Donc si l'on a

$$|t - \alpha| < \frac{\eta}{2}, \qquad |z - \beta| < \zeta,$$

le second membre de l'équation (2) est une fonction holomorphe de z et de t dont le module reste inférieur à M. La solution $z(t)$ qui pour $t = \alpha$ prend la valeur $z = \beta$ sera donc une fonction holomorphe de t pour

$$|t - \alpha| < \eta'',$$

η'' désignant le plus petit des deux nombres $\frac{\eta}{2}$ et $\frac{\zeta}{M}$, de plus, pour $|t - \alpha| < \eta''$, on aura $|z - \beta| < \zeta$. Or si nous prenons $\eta' < \frac{\eta''}{2}$ le cercle $|t - t_0| < \eta'$ sera compris à l'intérieur du cercle $|t - \alpha| < \eta''$, et, lorsque t tendra vers t_0, en restant à l'intérieur du cercle $|t - t_0| < \eta'$, on aura toujours $|z - \beta| < \zeta$; or cela est impossible, puisque $x = e^z$ tendant vers o, z doit croître indéfiniment.

Nous avons ainsi démontré que, sauf dans un cas exceptionnel, il est impossible qu'il y ait une solution de l'équation (1) d'ordre imaginaire μ. Examinons ce cas d'exception où notre démonstration est en défaut.

Nous considérons les expressions

$$(8) \qquad \begin{cases} xX(x, y) \equiv \Sigma A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \\ yY(x, y) \equiv \Sigma B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \end{cases}$$

dans laquelle nous remplaçons y par tx^μ, μ étant un nombre complexe ($\mu = a + ib$), et nous considérons, pour une valeur de la quantité $\nu = a - b\frac{v}{u}$, les termes d'ordre moindre des expressions (8), c'est-à-dire les termes pour lesquels $\alpha + \nu\beta$ prend la plus petite valeur. La démonstration donnée est en défaut, si ces termes d'ordre moindre disparaissent, quels que soient t et x, dans la somme

$$xX(x, y) + \mu y Y(x, y).$$

Si nous formons le polygone figuratif de l'équation (1) en faisant correspondre à chaque terme des expressions (8) le point d'abscisse β et d'ordonnée α [1], les termes qui deviennent, pour une valeur convenable de ν, termes d'ordre moindre sont ceux qui sont figurés par des points situés sur les côtés du polygone figuratif. Si ces termes d'ordre moindre sont figurés par un sommet S de coordonnées β_0 et α_0 du polygone, il faut, pour que le théorème soit en défaut, que l'on ait

$$A_{\alpha_0\beta_0} + \mu B_{\alpha_0\beta_0} = 0.$$

Il y a dans ce cas un seul terme d'ordre moindre dans chacune des expressions (8). Si les termes d'ordre moindre sont figurés par les divers points de coordonnées β_i, α_i situés sur un côté C du polygone, le théorème ne sera en défaut que si, pour toutes les

---

[1] Nous donnons aux axes des abscisses et des ordonnées la disposition habituelle : l'axe des abscisses est dirigé de gauche à droite, celui des ordonnées de bas en haut

valeurs de i correspondant à ces points, on a

$$A_{\alpha_i\beta_i} + \mu B_{\alpha_i\beta_i} = 0.$$

Cette égalité sera en particulier vérifiée pour les deux sommets qui sont aux extrémités du côté C du polygone. On voit qu'il y a dans ce cas au moins deux termes d'ordre moindre dans chacune des expressions (8).

Si nous appelons *pente* en un point de coordonnées β, α du polygone figuratif le nombre réel ou imaginaire défini par l'égalité

$$A_{\alpha\beta} + p B_{\alpha\beta} = 0,$$

nous voyons que notre démonstration ne sera en défaut que si μ est la *pente* en un sommet du polygone figuratif et nous pourrons énoncer le théorème :

L'équation (1) *ne peut admettre de solution d'ordre imaginaire* μ *que si* μ *est la pente en un sommet du polygone figuratif* (1).

5. Nous allons démontrer que, réciproquement, *si la pente en un sommet du polygone figuratif est un nombre imaginaire* μ, *l'équation* (1) *admet une infinité de solutions d'ordre imaginaire* μ. A chaque sommet du polygone figuratif dont la pente est un nombre imaginaire correspondent une infinité de solutions d'ordre imaginaire. Nous n'aurons pas de différence à faire entre le cas où pour chacune des extrémités d'un côté C la pente est imaginaire et le cas où pour les deux extrémités du côté, ainsi que pour tous les points figuratifs situés sur le côté, la pente a une même valeur imaginaire. Dans les deux cas, chacune des extrémités du côté fournira une infinité de solutions d'ordre imaginaire.

---

(1) Si μ est un nombre positif qui n'est égal à la pente (coefficient angulaire changé de signe) d'aucun des côtés du polygone figuratif, le théorème que nous avons énoncé est exact : il n'y a de solution $y(x)$ d'ordre μ que si μ est la pente en un sommet du polygone figuratif. La démonstration que nous avons donnée dans le cas de μ imaginaire s'applique au cas actuel, mais la réciproque que nous démontrons dans la suite est inexacte. On se rendra facilement compte (d'après la démonstration que nous allons donner) que cette réciproque n'est exacte que si μ est un nombre compris entre les pentes des deux côtés du polygone figuratif qui aboutissent au sommet considéré. J'ai du reste traité, sous une autre forme, ce cas où μ est positif dans le *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXXVI, 1908.

Soient β_0 et α_0 les coordonnées d'un sommet S où la pente est un nombre imaginaire $\mu = a + ib$. Désignons par $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ les pentes (coefficients angulaires changés de signe) des deux côtés du polygone qui aboutissent au sommet S et supposons que l'on ait

$$\frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}.$$

Si l'on a

$$\frac{p}{q} > a - \frac{bv}{u} > \frac{p'}{q'},$$

les termes d'ordre moindre seront bien figurés par le sommet S.

Lorsqu'on effectue le changement de variable $y = tx^\mu$ l'équation (1) devient

$$(9) \qquad x\,dt \Sigma B_{\alpha\beta} t^\beta x^{\alpha+\mu\beta} + dx \Sigma (A_{\alpha\beta} + \mu B_{\alpha\beta}) t^\beta x^{\alpha+\mu\beta} = 0.$$

En donnant, comme nous l'avons fait, la disposition habituelle aux axes de coordonnées dans le plan desquels est tracé le polygone figuratif, le côté de pente $\frac{p}{q}$ qui aboutit au sommet S sera situé à gauche de ce sommet et le côté de pente $\frac{p'}{q'}$ sera situé à droite. Désignons par D la demi-droite obtenue en partant de S et en prolongeant indéfiniment vers la gauche le côté de pente $\frac{p}{q}$; D' désignera de même la demi-droite obtenue en prolongeant vers la droite le côté de pente $\frac{p'}{q'}$. Les divers points figuratifs de coordonnées β, α peuvent se diviser en 4 catégories en mettant à part le sommet S :

1° *Les points qui sont situés sur la demi-droite* D'. Pour ces points l'on a

$$\alpha - \alpha_0 = -(\beta - \beta_0)\frac{p'}{q'} \qquad (\beta - \beta_0 > 0).$$

2° *Les points situés sur la demi-droite* D. Pour ces points l'on a

$$\alpha - \alpha_0 = -(\beta - \beta_0)\frac{p}{q} \qquad (\beta - \beta_0 < 0).$$

3° *Les points situés au-dessus de la droite* D'. Pour tous ces points l'on a

$$\alpha - \alpha_0 = -(\beta - \beta_0)\frac{p'}{q'} + \frac{h'}{q} \qquad (\beta - \beta_0 > 0),$$

h' étant un entier positif.

4° *Les points situés au-dessus de la droite* D. Pour tous ces points l'on a

$$\alpha - \alpha_0 = -(\beta - \beta_0)\frac{p}{q} + \frac{h}{q} \qquad (\beta - \beta_0 < 0),$$

h étant un entier positif.

Si nous divisons les deux membres de l'équation (9) par $x^{\alpha_0 - \mu\beta_0}$, un terme de la forme $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x^{\alpha+\mu\beta}$ devient $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x^{\alpha-\alpha_0+\mu(\beta-\beta_0)}$. Posons

$$x_1 = x^{\mu - \frac{p'}{q'}}, \qquad x_2 = x^{\frac{p}{q} - \mu}, \qquad x_3 = x^{\frac{1}{q'}}, \qquad x_4 = x^{\frac{1}{q}},$$

et désignons par γ la valeur absolue de $\beta - \beta_0$ pour le terme que nous considérons. Si le terme considéré est représenté par un point de la première catégorie, ce terme prendra la forme $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x_1^r$.

Si le terme considéré correspond à un point de la seconde catégorie, ce terme prendra la forme $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x_2^r$.

Si le terme considéré correspond à un point de la troisième catégorie, il prendra la forme $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x_1^r\, x_3^{h'}$.

Si le terme considéré correspond à un point de la quatrième catégorie, il prendra la forme $C_{\alpha\beta}\, t^\beta x_2^r\, x_4^h$.

Nous pouvons dans le voisinage de $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et dans le voisinage d'une valeur quelconque t_0 ($t_0 \neq 0$) attribuée à t mettre l'équation (9) sous la forme

$$(10) \qquad x\frac{dt}{dx} = F(t, x_1, x_2, x_3, x_4),$$

F étant une fonction holomorphe des diverses variables dans le voisinage des valeurs considérées. Nous pourrions à l'aide de cette forme d'équation obtenir les solutions d'ordre imaginaire μ au moyen d'un développement

$$t = \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

se réduisant à t_0 pour $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$. Il me paraît y avoir avantage à montrer tout d'abord qu'on peut réduire le nombre des variables auxiliaires.

Nous avons $x^{\frac{p}{q}-\frac{p'}{q'}} = x_1 x_2$; par suite, si nous posons

$$x_1^{\frac{1}{pq'-qp'}} = \zeta, \qquad x_2^{\frac{1}{pq'-qp'}} = \xi,$$

ce qui revient à poser

$$\zeta = x^{\lambda'}, \qquad \xi = x^{\lambda''},$$

λ' et λ'' désignant deux nombres connus, dont le rapport est imaginaire, nous aurons

$$x_1 = \zeta^{pq'-qp'}, \qquad x_2 = \xi^{pq'-qp'}, \qquad x_3 = \zeta^q \xi^q, \qquad x_4 = \zeta^{q'} \xi^{q'}$$

et l'équation différentielle (10) pourra s'écrire

$$x \frac{dt}{dx} = f(t, \zeta, \xi), \tag{11}$$

f étant une fonction holomorphe de t, ζ, ξ dans le voisinage de $t = t_0$, $\zeta = 0$, $\xi = 0$, t_0 étant du reste quelconque, mais différent de o. F s'annulait pour $x_1 = x_2 = 0$ quels que soient t, x_3, x_4; $f(t, \zeta, \xi)$ sera nul quel que soit t pour $\zeta = \xi = 0$.

Montrons qu'il existe un développement

$$t = \varphi(\zeta, \xi)$$

se réduisant à t_0 pour $\zeta = 0$, $\xi = 0$ et fournissant une solution de l'équation (9) lorsqu'on remplace ζ et ξ en fonction de x. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit qu'en posant

$$t = t_0 + \mathrm{T}$$

il existe une fonction $\mathrm{T}(\zeta, \xi)$ holomorphe et nulle pour $\zeta = \xi = 0$ et vérifiant l'équation

$$\lambda' \zeta \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \zeta} + \lambda'' \xi \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \xi} = f(t_0 + \mathrm{T}, \zeta, \xi).$$

Dans le second membre de cette équation tous les termes contiennent en facteur, d'après ce que nous avons dit, ζ ou ξ. Les termes de degré minimum du développement T vérifiant cette équation seront de même degré que les termes de degré minimum en ζ et ξ de $f(t_0+\mathrm{T}, \zeta, \xi)$ et seront semblables à ces termes. Les coefficients de ces termes se détermineront sans peine, ainsi que les coefficients successifs des termes de degré supérieur du développement T. Si l'on suppose déterminés les coefficients des termes de degré inférieur à $m+n$, le coefficient du terme $\mathrm{C}_{mn}\zeta^m\xi^n$ sera déterminé par une égalité de la forme

$$(\lambda'_m+\lambda''_n)\,\mathrm{C}_{mn}=\mathrm{K}_{mn},$$

K_{mn} étant une fonction connue des coefficients déjà déterminés. Le rapport des nombres λ' et λ'' n'étant pas un nombre réel négatif, on prouvera en raisonnant, comme le fait par exemple M. Picard, *Analyse*, 1^{re} édition, t. III, p. 189, que le développement T ainsi obtenu est convergent, pourvu que les modules de ζ et de ξ soient inférieurs à un certain nombre. Ceci revient à dire que les modules des quantités x_1 et x_2 doivent être inférieurs à un certain nombre η, que nous pouvons toujours pour simplifier supposer inférieur à l'unité.

Montrons maintenant qu'on peut donner à x des valeurs telles que $|x_1|$ et $|x_2|$ restent inférieurs à η et que l'on peut faire tendre x vers o de telle façon que x_1 et x_2 et par suite ζ et ξ tendent vers o. Ayant posé

$$x=e^{u+iv},\qquad \mu=a+bi,$$

nous aurons

$$|x_1|=e^{u\left(a-\frac{p'}{q'}\right)-bv},\qquad |x_2|=e^{u\left(\frac{p}{q}-a\right)+bv}$$

Nous devons donc avoir

$$\left(a-\frac{p'}{q'}\right)u-bv<\mathrm{L}\eta, \tag{12}$$

$$\left(\frac{p}{q}-a\right)u+bv<\mathrm{L}\eta. \tag{13}$$

Considérons, dans le plan de la variable complexe z, les deux droites Δ' et Δ ayant respectivement pour équations

$$\left(a-\frac{p'}{q'}\right)u-bv=\mathrm{L}\eta, \tag{12'}$$

$$\left(\frac{p}{q}-a\right)u+bv=\mathrm{L}\eta. \tag{13'}$$

Parmi les 4 angles déterminés par ces deux droites, il y en aura un, l'angle V, pour lequel les inégalités (12) et (13) seront simultanément vérifiées. A l'intérieur de cet angle V la quantité u sera nécessairement négative, car l'on aura

$$\left(\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'}\right) u < 2 \mathrm{L} \eta.$$

Il en résulte que si le point M de coordonnées u et v se déplace à l'intérieur de l'angle V, le développement T sera convergent et si M s'éloigne indéfiniment à l'intérieur de l'angle V de telle façon que ses distances à chacune des droites Δ et Δ' croissent indéfiniment, x_1 et x_2 et par suite ζ et ξ tendront vers o et de plus x tendra aussi vers o; il est impossible en effet que, dans ces conditions, u reste fini, car v croîtrait indéfiniment, puisque M s'éloigne indéfiniment et les deux inégalités (12) et (13) ne pourraient pas être vérifiées simultanément. Il existe donc un développement suivant les puissances de ζ et ξ

$$t = \varphi(t_0, \zeta, \xi) \tag{14}$$

se réduisant à t_0 pour $\zeta = 0$, $\xi = 0$ et fournissant une solution de l'équation (9), lorsqu'on remplace ζ et ξ en fonction de x. Les coefficients de ce développement sont des fonctions de t_0, qui ne cessent d'être holomorphes que pour $t_0 = 0$, ou t_0 infini. Nous avons donc bien démontré que, *si en un sommet* S *du polygone figuratif la pente est un nombre imaginaire* μ, *l'équation* (1) *admet une infinité de solutions* $y(x)$ *d'ordre imaginaire* (¹).

(¹) Si en un sommet S du polygone figuratif la pente est un nombre réel μ, les considérations que nous venons de développer s'appliquent. On a $b = 0$, $\mu = a$ et les inégalités (12) et (13) exigent qu'on ait

$$\frac{p}{q} > \mu > \frac{p'}{q'}$$

puisque u doit être négatif. Ce n'est donc que dans ce cas que nous aurons des solutions $y(x)$ dont l'ordre d'infinitude réel μ ne soit pas égal à la pente d'un des côtés du polygone figuratif et puisse par suite être irrationnel. Nous pouvons également faire remarquer que, dans ce cas où la pente μ en un sommet est un nombre réel, il est impossible ainsi que je l'ai démontré (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXVI, 1908) que $y : x^{\mu}$ ne tende vers aucune limite, lorsque x tend vers o. La particularité que nous signalons au début du n° 6, dans le cas où μ est imaginaire, ne se présente donc pas si μ est réel.

6. *Propriétés des solutions obtenues.* — Supposons que le point M de coordonnées u et v s'éloigne indéfiniment à l'intérieur de l'angle V de telle manière que sa distance à l'un des côtés de l'angle, à la droite Δ par exemple, reste finie, ξ restera fini, tandis que ζ tendra vers o. En général ([1]) le développement $\varphi(t_0, \zeta, \xi)$ contiendra un terme où ζ ne figure pas. Dans ces conditions, *on aura des solutions telles que, lorsque x tend vers* o *suivant une certaine loi, $y : x^\mu$ reste fini, mais ne tend vers aucune limite.* On voit sans peine que, pour ces solutions, le rapport $x^\mu : x^{\frac{p}{q}}$ reste fini. Nous mettons ainsi en évidence des solutions pour lesquelles le rapport $y : x^{\frac{p}{q}}$ reste fini. Ces solutions ne sont pas à proprement parler des solutions d'ordre imaginaire μ, puisque le rapport de $y : x^\mu$ ne tend pas vers une limite, lorsque x tend vers o. Bornons-nous à étudier dans la suite les propriétés des solutions d'ordre imaginaire μ fournies par le sommet S du polygone figuratif, à l'aide du développement (14).

Si m est un nombre réel vérifiant les inégalités

$$\frac{p}{q} > m > \frac{p'}{q'},$$

on peut faire tendre x vers o de telle manière que $y : x^m$ reste fini mais ne tende vers aucune limite.

Considérons, dans le plan des u, v, la droite ayant pour équation

$$(a - m)u - bv = 0. \tag{15}$$

Si un point de coordonnées u et v s'éloigne indéfiniment sur cette droite du côté des u négatifs, on voit immédiatement que les inégalités (12) et (13) seront vérifiées dès que u sera supérieur en valeur absolue à une certaine limite. Il y a donc une portion indéfinie (formant une demi-droite) de la droite (15) qui est située à l'intérieur de l'angle V. Soit Δ'' cette demi-droite. Si le point M de coordonnée u, v s'éloigne indéfiniment de telle manière que sa

([1]) Il en est toujours ainsi, sauf dans le cas où pour tous les points figuratifs situés sur le côté D du polygone la pente en chacun de ces points est égale à un même nombre complexe μ.

distance à la droite Δ'' reste finie, les conditions (12) et (13) seront nécessairement vérifiées et, puisque $(a-m)u-bv$ reste fini, le module de $x^{\mu-m}$ qui est égal à $e^{(a-m)u-bv}$ restera fini. $y : x^m$ *reste fini, mais ne tend vers aucune limite*, car l'argument de $x^{\mu-m}$ croît indéfiniment.

Supposons maintenant que le point M s'éloigne indéfiniment sur une courbe ayant une branche parabolique dans la direction de Δ''. Pour fixer les idées, supposons en désignant par k une constante et en faisant croître indéfiniment u par valeurs négatives que l'on ait

$$(a-m)u = bv = k\sqrt{-u}.$$

Nous aurons

$$|x^{\mu-m}| = e^{k\sqrt{-u}};$$

ε étant un nombre positif quelconque, nous aurons

$$|x^{\mu-(m+\varepsilon)}| = e^{k\sqrt{-u}-\varepsilon u}, \qquad |x^{\mu-(m-\varepsilon)}| = e^{k\sqrt{-u}+\varepsilon u}.$$

Il en résulte que si k est positif $y : x^m$ *croît indéfiniment, ainsi que* $y : x^{m+\varepsilon}$, *tandis que* $y : x^{m-\varepsilon}$ *tendra vers* o, *si petit que soit* ε.

Si k est négatif nous avons des solutions telle que, lorsque x tend vers o, $y : x^m$ *et* $y : x^{m-\varepsilon}$ *tendent vers* o, *tandis que* $y : x^{m+\varepsilon}$ *croît indéfiniment si petit que soit* ε.

Les solutions que nous venons de mettre en évidence, lorsqu'il y a des solutions d'ordre imaginaire, sont à rapprocher des solutions d'ordre réel que nous avons désignées sous le nom de solutions d'ordre $m-0$ et $m+0$ (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. I, 1909, n° 4).

Nous venons de montrer plus haut que, si la pente en un sommet S du polygone figuratif où aboutissent deux côtés de pente $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ est un nombre complexe μ, et si m est un nombre compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ il y a des solutions $y(x)$ de l'équation (1) telles qu'en faisant tendre convenablement x vers zéro, $y : x^m$ reste fini. Démontrons une réciproque. Un nombre réel m quelconque est nécessairement compris entre les pentes de deux côtés consécutifs du polygone figuratif, soit S le sommet commun à ces deux côtés. La réciproque à démontrer est la suivante. S'il y a des solutions d'ordre imaginaire [1] telles que $y : x^m$ reste fini, lorsque x tend vers o suivant une certaine loi, la pente du sommet S est un nombre imaginaire μ.

Soit μ l'ordre imaginaire ($\mu = \alpha + bi$), de la solution $y(x)$ que nous considérons et pour laquelle $y : x^m$ reste fini. Le raisonnement que nous avons fait au n° 3 montre non seulement que, pour qu'il y ait une solution d'ordre imaginaire μ, il faut que μ soit la pente en un sommet S′ du polygone figuratif, mais il montre aussi que la valeur du rapport $u : v$, lorsque x tend vers o, doit être telle que parmi les termes d'ordre moindre de $\mu y \mathrm{Y}(x,y) + x\mathrm{X}(x,y)$ il y ait ceux qui sont figurés par le sommet S′. Ceci exige que ν soit compris entre les pentes $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ des deux côtés aboutissant au sommet S′. On doit donc avoir

$$\frac{p}{q} \geq a - \frac{bu}{v} \geq \frac{p'}{q'}. \tag{16}$$

Si pour la solution que nous considérons $y : x^m$ reste fini, lorsque x tend vers o suivant une certaine loi, il faudra que $x^{\mu-m}$ reste fini ; l'expression $au - bv - mu$ ne devra croître indéfiniment ni par valeurs positives, ni par valeurs négatives, lorque u tend vers $-\infty$. Il faut donc que $a - \frac{bv}{u} - m$ tende vers o et, d'après les inégalités (16), ceci ne peut avoir lieu que si m est compris entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$. Le sommet S de l'énoncé coïncide avec le sommet S′ introduit dans la démonstration, la pente au sommet S est bien un nombre imaginaire μ.

Il ne me paraît pas inutile de remarquer que pour toutes les solutions que nous mettons en évidence à l'aide du développement (14), x^μ et par suite y tendent vers o avec x. Les inégalités (12) et (13) nous donnent en effet

$$\frac{p'}{q'} u + \mathrm{L}\eta > au - bv > \frac{p}{q} - \mathrm{L}\eta;$$

---

(1) Nous ne supposons pas que les solutions d'ordre imaginaire que nous considérons soient uniquement celles fournies par les développements du n° 5. Nous admettons qu'en dehors des solutions fournies par notre méthode, il puisse en exister d'autres.

les deux termes extrêmes tendent tous les deux vers $-\infty$, lorsque x tend vers o, la quantité $au - bv$ tend donc aussi vers $-\infty$ et, puisque l'on a

$$|x^\mu| = e^{au-bv},$$

x^μ et y tendent vers o. Nous concluons de là que les conditions de convergence (12) et (13) ne nous permettent pas, pour le cas considéré ici, de mettre en évidence des solutions de l'espèce signalée dans la note de la page 229, c'est-à-dire telles que x^μ reste fini, lorsque x tend vers o. Nous allons rencontrer de pareilles solutions dans un cas particulier que nous allons étudier.

7. *Cas particuliers.* — Il est évident, d'après les théorèmes d'existence des solutions d'équations différentielles, que l'équation (1) n'a pas de solution d'ordre imaginaire dans le voisinage de $x = 0$, $y = 0$, si $X(0, 0)$ et $Y(0, 0)$ ne sont pas nuls. Il serait du reste facile de le montrer à l'aide des résultats que nous avons obtenus (nº 4). Nous pouvons donc nous borner à examiner le cas où $X(0, 0)$ et $Y(0, 0)$ sont nuls. Le polygone figuratif que nous avons construit a ses deux sommets extrêmes situés, l'un A sur l'axe des coordonnées $o\alpha$, l'autre B sur l'axe des abscisses $o\beta$. Il est intéressant d'examiner ce qui se passe lorsque la pente en l'un de ces sommets est un nombre complexe μ. Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que ce sommet représente à la fois un terme de $xX(x, y)$ et un terme de $yY(x, y)$.

Considérons d'abord le cas où la pente au sommet B est un nombre complexe $\mu = a + bi$. Employons les notations du nº 5. Un des côtés aboutissant à ce sommet est l'axe $o\beta$ prolongé indéfiniment vers la droite, ce sera la droite D'. Nous avons $\frac{p'}{q'} = 0$.

L'autre côté aura la pente $\frac{p}{q}$ et l'on a

$$x_1 = x^\mu, \qquad x_2 = x^{\frac{p}{q}-\mu}, \qquad \zeta = x_1^{\frac{1}{q}}, \qquad \xi = x_2^{\frac{1}{q}}.$$

En employant les raisonnements et les notations du nº 6 nous voyons que si l'on prend une solution $y(x)$ quelconque obtenue à l'aide du développement (14), en donnant à t_0 une certaine valeur, nous avons les propriétés suivantes qui ne se présentent pas sous la même forme dans le cas général :

1° Si le point M de coordonnées u, v s'éloigne indéfiniment dans l'angle V, en restant à une distance finie de la droite Δ', x^μ reste fini, $y : x^\mu$ reste aussi fini. Le module de ces deux quantités peut tendre vers une limite, mais leur argument croît indéfiniment lorsque x tend vers o. Nous avons des solutions d'ordre imaginaire de l'espèce signalée dans la note de la page 229.

2° Supposons que M s'éloigne indéfiniment dans l'angle V sur une courbe ayant une branche parabolique dans la direction de la droite Δ'. Si par exemple, pour fixer les idées, nous supposons que l'on ait, en désignant par k une constante positive

$$au - bv = -k\sqrt{-u},$$

y tend vers o avec x, mais $y : x^\varepsilon$ croît indéfiniment si petit que soit ε. Nous avons une solution analogue à celles que nous avons appelées solutions d'*ordre nul*.

Considérons le cas où la pente au sommet A est un nombre complexe. Un des côtés du polygone figuratif, le côté D aboutissant au sommet A est l'axe $o\alpha$ et $\frac{p}{q}$ devra être considéré comme infini. L'autre côté D' aura la pente $\frac{p'}{q'}$. Nous serons conduits à poser

$$x_1 = x^{\mu - \frac{p'}{q'}}, \qquad x_2 = x, \qquad \zeta = x_1, \qquad \xi = x^{\frac{1}{q'}}.$$

Les premiers membres de (13) et (13') doivent être remplacés par μ.

Nous voyons d'abord que, si grand que soit le nombre fixe m supérieur à $\frac{p'}{q'}$, on peut faire tendre x vers o de telle manière que $y : x^\mu$ reste fini. C'est la propriété signalée dans le cas général, avec la seule différence que, dans le cas général, m devrait être inférieur à $\frac{p}{q}$. Nous pouvons dans le cas actuel mettre en évidence une autre propriété.

Faisons éloigner indéfiniment dans l'angle V le point M de coordonnées u, v sur une courbe ayant une branche parabolique dans la direction $u = o$. Pour fixer les idées, posons, en désignant par k une constante positive,

$$au - bv = -ku^2;$$

$x^{\mu - m}$ tendra vers o, quel que soit le nombre m.

Pour toute valeur de m le rapport $y : x^m$ *tendra vers* o, *lorsque* x *tend vers* o. Nous aurons une solution du genre de celles que nous avons appelées *solutions d'ordre infini.*