BULLETIN DE LA S. M. F.

S. LATTÈS

Sur les formes réduites des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 309-345
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__309_1>

SUR LES FORMES RÉDUITES DES TRANSFORMATIONS PONCTUELLES DANS LE DOMAINE D'UN POINT DOUBLE;

PAR M. S. LATTÈS.

I. — INTRODUCTION.

1. *Notations.* — Soit donnés une transformation ponctuelle à deux variables [1]

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y), \\ y_1 = \varphi(x, y) \end{cases}$$

[1] L'extension de la plupart des résultats de ce travail aux transformations ponctuelles à plusieurs variables est facile, sinon immédiate : il m'a donc paru préférable de traiter uniquement le cas de deux variables.

et un point double de cette transformation, c'est-à-dire un point dont les coordonnées x_0, y_0 vérifient les relations

$$x_0 = f(x_0, y_0),$$
$$y_0 = \varphi(x_0, y_0).$$

Nous supposerons les fonctions f et φ holomorphes dans un certain domaine

$$|x - x_0| < h, \qquad |y - y_0| < h.$$

En transportant l'origine du plan des x au point x_0 et de même l'origine du plan des y au point y_0, on peut supposer $x_0 = y_0 = 0$; les fonctions f et φ sont alors des fonctions holomorphes et nulles pour $x = y = 0$ et la transformation donnée prend la forme

$$x_1 = a\,x + b\,y + \ldots,$$
$$y_1 = a'x + b'y + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier degré.

Considérons la substitution linéaire *tangente* à la transformation précédente : nous désignons ainsi la substitution

$$x_1 = a\,x + b\,y,$$
$$y_1 = a'x + b'y.$$

La théorie des substitutions linéaires apprend qu'on peut disposer des constantes λ, μ, λ', μ' de façon que, si l'on pose

$$x = \lambda\,u + \mu\,v, \qquad x_1 = \lambda\,u_1 + \mu\,v_1,$$
$$y = \lambda' u + \mu' v, \qquad y_1 = \lambda' u_1 + \mu' v_1,$$

la substitution linéaire, transformée dans le système des variables u, v, u_1, v_1, prenne l'une des trois formes réduites

$$u_1 = S_1 u, \qquad u_1 = S u - v, \qquad u_1 = S u,$$
$$v_1 = S_2 v, \qquad v_1 = S v, \qquad v_1 = S v.$$

Les quantités S_1, S_2 sont les racines de l'équation en S

$$\begin{vmatrix} a - S & b \\ a' & b' - S \end{vmatrix} = 0.$$

La première des formes réduites précédentes est applicable dans le cas où les racines S_1, S_2 sont distinctes ; la deuxième et la troisième s'appliquent au cas où les racines sont égales, la racine double étant désignée par S : en général c'est alors la deuxième forme qui convient; la troisième ne s'applique que dans le cas plus particulier où la racine double annule tous les mineurs du déterminant, c'est-à-dire dans le seul cas où l'on a

$$b' = a, \qquad a' = 0, \qquad b = 0.$$

Il résulte de là que, par la même substitution linéaire, la transformation (1) peut être ramenée à l'une des trois formes suivantes, dans lesquelles nous conservons, pour simplifier, les notations primitives x, y, x_1, y_1 pour représenter les variables

$$(a) \qquad \begin{cases} x_1 = S_1 x + F(x, y), \\ y_1 = S_2 y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

$$(b) \qquad \begin{cases} x_1 = Sx - y + F(x, y), \\ y_1 = Sy + \Phi(x, y), \end{cases}$$

$$(c) \qquad \begin{cases} x_1 = Sx + F(x, y), \\ y_1 = Sy + \Phi(x, y); \end{cases}$$

$F(x,y)$, $\Phi(x,y)$ sont des fonctions holomorphes pour $x = y = 0$ et ayant un développement en série entière qui commence par des termes du second degré.

2. *But de ce Mémoire.* — Nous nous proposons de montrer que, *dans l'hypothèse où* $|S_1|$, $|S_2|$, *ou* $|S|$, *sont différents de zéro et inférieurs à* 1, *on peut définir un changement de variables*

$$(2) \qquad \begin{cases} u = \lambda(x, y), & u_1 = \lambda(x_1, y_1), \\ v = \mu(x, y), & v_1 = \mu(x_1, y_1), \end{cases}$$

déterminé par deux fonctions holomorphes $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$, *et tel que, en remplaçant les variables* x, y, x_1, y_1 *par les variables* u, v, u_1, v_1, *les transformations* (a), (b), (c) *prennent respectivement les formes réduites suivantes*

$$(A) \qquad \begin{cases} u_1 = S_1 u, \\ v_1 = S_2 v, \end{cases} \qquad\qquad (A') \qquad \begin{cases} u_1 = S^\alpha u - k v^\alpha, \\ v_1 = S v, \end{cases}$$

$$(B) \qquad \begin{cases} u_1 = Su - v, \\ v_1 = Sv, \end{cases}$$

$$(C) \qquad \begin{cases} u_1 = Su, \\ v_1 = Sv. \end{cases}$$

La transformation (a) donne lieu à deux formes réduites : dans le cas général, elle fournit la forme réduite (A) qui est linéaire; mais si l'une des racines S_2 est une puissance à exposant entier et positif de l'autre racine S_1, elle fournit la forme réduite (A'), dans laquelle on a posé

$$S_2 = S, \qquad S_1 = S^\alpha \qquad (\alpha = 2, 3, \ldots);$$

dans cette forme (A'), k représente un nombre en général différent de zéro : on peut toujours le supposer égal à 1 en remplaçant v, v_1 par $\frac{v}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$, $\frac{v_1}{k^{\frac{1}{\alpha}}}$ ce qui ne change pas la forme de (A'); on peut dire alors que, dans la forme (A'), k représente un nombre égal à 0 ou à 1, ce second cas étant le cas général.

Ce cas (A') mis à part, on voit que *le changement de variables* (2) *permet de ramener la transformation* (1) *à être, dans le domaine du point double considéré, une simple substitution linéaire.*

Dans chacun des cas énoncés précédemment, les fonctions inconnues $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ qui définissent le changement de variables (2) sont données par des équations fonctionnelles.

Les formules (2) et (A) montrent en effet que les fonctions $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ doivent vérifier dans le cas (A) les équations fonctionnelles suivantes

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, y_1) &= S_1 \lambda(x, y), \\ \mu(x_1, y_1) &= S_2 \mu(x, y). \end{aligned}$$

De même, dans le cas (B), on doit avoir

$$\begin{aligned} \lambda(x_1, y_1) &= S \lambda(x, y) - \mu(x, y), \\ \mu(x_1, y_1) &= S \mu(x, y), \end{aligned}$$

et l'on forme de même les équations fonctionnelles relatives aux cas (A') et (C).

M. Leau [1] a étudié le premier des systèmes fonctionnels comprenant les systèmes précédents comme cas particuliers et, dans le

---

(1) LEAU, *Étude sur les équations fonctionnelles* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. XI, 1897 ; thèse, Paris, 1897).

cas (A) du moins, il a signalé la forme réduite linéaire qu'on peut donner à la substitution.

Mais, pour établir l'existence des solutions des systèmes fonctionnels qui nous occupent, il fait l'une des hypothèses suivantes :

1° Ou bien on est dans le cas (A) : S_1, S_2 sont différents et l'on n'a pas $S_2 = S_1^\alpha$ ni $S_1 = S_2^\alpha$ (α entier > 0);

2° Ou bien les coefficients des termes du premier degré a, a', b, b' dans la transformation (1) sont inférieurs en valeur absolue à $\frac{1}{2}$.

Il résulte de ces hypothèses que les cas (A'), (b), (c) échappent en général à l'analyse de M. Leau. Le cas (c) n'est traité en effet que si l'on suppose $|S| < \frac{1}{2}$; pour le cas (b), on peut bien, par le changement de y en ky, amener le terme $-y$ à avoir un coefficient inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{2}$, mais on ne peut pas changer la valeur de S qui est un invariant pour toute transformation ponctuelle et par conséquent le cas (b) aussi n'est traité que sous l'hypothèse $|S| < \frac{1}{2}$.

Or, si la comparaison de $|S_1|$, $|S_2|$, $|S|$ à 1 apparaît comme un élément essentiel de classification dans la question, il n'en est pas de même de la comparaison de ces mêmes quantités à $\frac{1}{2}$: en effet on verra, par la méthode même que nous allons employer, que ce qui importe, c'est le mode de croissance des nombres x_1, y_1; x_2, y_2; ..., x_n, y_n déduits de x, y par itérations successives, lorsque n croît indéfiniment; la valeur $|S| = \frac{1}{2}$ ne présente, à ce point de vue, aucune particularité : il en est tout autrement de la valeur $|S| = 1$.

J'ai donné moi-même ([1]) une méthode différente de celle de M. Leau, mais elle ne s'applique aussi qu'au cas (A) et elle est d'ailleurs beaucoup moins simple que celle que je vais indiquer dans ce travail. La nouvelle méthode que je donne ici s'appliquera

---

([1]) LATTÈS, *Sur les équations fonctionnelles qui définissent une courbe ou une surface invariante par une transformation* (*Annali di Matematica*, 1906; thèse, Paris, 1906).

sous les seules hypothèses énoncées au début de ce paragraphe, hypothèses qui ne font intervenir que la comparaison de $|S_1|$, $|S_2|$ à 1. Elle consiste, pour le cas (A), dans l'extension au cas de deux variables de la méthode d'itération employée par M. Kœnigs (1), dans le cas d'une seule variable, pour étudier l'équation fonctionnelle de Schrœder,

$$B[x_1] = SB(x),$$

dans laquelle on pose $x_1 = f(x) = Sx + \lambda x^2 + \ldots$ et où $B(x)$ est la fonction inconnue. En supposant $|S| < 1$, M. Kœnigs montre que $\frac{x_n}{S^n}$ (où x_n désigne le $n^{\text{ième}}$ itéré de x) a, pour n infini, une limite $B(x)$ qui est une fonction holomorphe de x vérifiant l'équation fonctionnelle.

L'étude des cas (A'), (B) exige l'emploi de nouvelles fonctions obtenues aussi comme limites d'expressions dépendant de n. C'est l'étude de l'itération des substitutions linéaires et homogènes à deux variables qui conduit d'une façon naturelle à considérer ces nouvelles expressions. C'est pourquoi nous allons étudier d'abord les substitutions linéaires : c'est le cas le plus simple pour les transformations (1) et, bien que je n'indique que des résultats connus sans doute depuis longtemps, il m'a paru indispensable de commencer par ce cas-là afin que les méthodes employées dans l'étude des transformations non linéaires paraissent plus naturelles. Cette étude des substitutions linéaires fait l'objet de la deuxième Partie de ce travail.

Dans les troisième, quatrième et cinquième Parties, j'étudie les cas (A), (B), (C) et (A'). J'indique dans la sixième Partie les

(1) Kœnigs, *Recherches sur les substitutions uniformes* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1883). — *Recherches sur les équations fonctionnelles* (*Annales de l'École Normale*, 1884).

Signalons à ce propos un Mémoire récent de M. Hurwitz dans lequel l'auteur étudie certains algorithmes d'itération et démontre l'existence de certaines limites comprenant en particulier la fonction $B(x)$.

Dans ce Mémoire, *Ueber die Entführung der element. tranzend. Funktionen in der algebraeschen Analysis* (*Mathem. Annalen*, t. LXX, 1910), M. Hurwitz montre comment l'itération permet, en partant des fonctions rationnelles, de définir les fonctions $\log x$, arc tang x, la fonction sn (x, k) et d'une façon générale comment on peut introduire ainsi les transcendantes élémentaires en Analyse et en étudier les propriétés.

transformations auxquelles ne s'appliquent pas les résultats ainsi trouvés. Enfin je termine par deux applications, de genre assez différent, des formes réduites de transformations ponctuelles : l'importance de ces applications, dont l'une à peine indiquée fera l'objet d'un travail spécial, justifiera, je pense, le travail actuel auprès du lecteur (¹).

II. — Itération des substitutions linéaires.

3. *Expression de x_n, y_n en fonction de n.* — Étant donnée la substitution linéaire et homogène

$$x_1 = a\,x + b\,y,$$
$$y_1 = a'x + b'y,$$

on calcule successivement $x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n, \ldots$, en se donnant x, y et en posant

$$x_{n+1} = a\,x_n + b\,y_n,$$
$$y_{n+1} = a'x_n + b'y_n.$$

On demande d'exprimer x_n, y_n, en fonction de x, y et de n.

Considérons l'équation

$$\Delta(\mathrm{S}) = \begin{vmatrix} a - \mathrm{S} & b \\ a' & b' - \mathrm{S} \end{vmatrix} = 0$$

et distinguons deux cas.

Premier cas. — *L'équation en* S *a ses racines* S_1, S_2 *distinctes.*

Dans ce cas, on a

$$(3) \qquad \begin{cases} x_n = \alpha \mathrm{S}_1^n + \beta \mathrm{S}_2^n, \\ y_n = \gamma \mathrm{S}_1^n + \delta \mathrm{S}_2^n, \end{cases}$$

α, β, γ, δ étant indépendants de n et ne dépendant que des valeurs initiales x, y de la suite $x, y; x_1, y_1; x_2, y_2, \ldots$. On peut d'ailleurs obtenir les expressions explicites de α, β, γ, δ en fonction de x, y à l'aide des formules précédentes, en donnant à n les

(¹) Certains des résultats de ce travail ont déjà fait l'objet d'une Note : *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles à deux variables* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 juin 1911).

valeurs o et 1, ce qui donne les relations

$$\alpha+\beta=x, \qquad \gamma+\delta=y,$$
$$\alpha S_1+\beta S_2=ax+by, \qquad \gamma S_1+\delta S_2=a'x+b'y;$$

d'où l'on tire

$$(S_1-S_2)\alpha=(a-S_2)x+by,$$
$$(S_1-S_2)\beta=-(a-S_1)x-by,$$
$$(S_1-S_2)\gamma=a'x+(b'-S_2)y,$$
$$(S_1-S_2)\delta=-a'x-(b'-S_1)y.$$

On démontre aisément les formules (3) par induction. En admettant que ces formules sont vraies jusqu'au rang n; on a en effet

$$x_{n+1}=a\,x_n+b\,y_n=(a\,\alpha+b\,\gamma)S_1^n+(a\,\beta+b\,\delta)S_1^n,$$
$$y_{n+1}=a'x_n+b'y_n=(a'\alpha+b'\gamma)S_1^n+(a'\beta+b'\delta)S_2^n,$$

et l'on démontre facilement que, quels que soient x et y, on a

$$a\,\alpha+b\,\gamma=\alpha S_1, \qquad a\beta+b\,\delta=\beta S_2,$$
$$a'\alpha+b'\gamma=\gamma S_1, \qquad a'\beta+b'\delta=\delta S_2.$$

Il suffit pour le voir de remplacer α, β, γ, δ par les valeurs données plus haut en fonction de x et de y et d'utiliser les relations entre les coefficients et les racines de l'équation en S.

On pourrait aussi pour établir ces formules (3), ramener d'abord la substitution linéaire à sa forme réduite (n° 1)

$$u_1=S_1u, \qquad v_1=S_2v,$$

d'où l'on déduit

$$u_n=S_1^n u, \qquad v_n=S_2^n v;$$

en remarquant que x et y sont des fonctions linéaires et homogènes des nouvelles variables u, v, on trouve pour x_n et y_n des expressions de la forme (3).

Deuxième cas. — *L'équation en* S *a une racine double* S.

Supposons d'abord que la racine double annule tous les mineurs du déterminant $\Delta(S)$, c'est-à-dire qu'on ait

$$a=b', \qquad a'=0, \qquad b=0.$$

Dans ce cas la racine double est égale à a et la substitution se réduit à

$$x_1=Sx, \qquad y_1=Sy;$$

d'où

$$x_n = S^n x, \qquad y_n = S^n y.$$

Ce cas mis à part on a pour x_n, y_n les formules suivantes :

$$(4) \qquad \begin{cases} x_n = \alpha S^n + \beta n S^{n-1}, \\ y_n = \gamma S^n + \delta n S^{n-1}, \end{cases}$$

dans lesquelles α, β, γ, δ sont indépendants de n. On obtient α, β, γ, δ en donnant à n les valeurs o et 1 :

$$x = \alpha, \qquad y = \gamma,$$
$$ax + by = \alpha S + \beta, \qquad a'x + b'y = \gamma S + \delta;$$

d'où

$$\alpha = x, \qquad \gamma = y,$$
$$\beta = (a - S)x + by, \qquad \delta = a'x + (b' - S)y.$$

Les formules (4) se vérifient aisément par le procédé de récurrence employé plus haut dans le premier cas; on peut aussi, pour les établir, ramener la substitution linéaire à sa forme réduite

$$u_1 = Su - v, \qquad v_1 = Sv$$

rappelée au n° 1, calculer u_n, v_n, ce qui est immédiat, et revenir aux variables x, y.

III. — Étude des cas (A) et (C).

4. *Méthode.* — Soit donnée la transformation

$$(a) \qquad \begin{cases} x_1 = S_1 x + F(x, y), \\ y_1 = S_2 y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

dans laquelle F et Φ sont des fonctions holomorphes nulles, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, pour $x = 0, y = 0$.

Nous supposons que $|S_1|$, $|S_2|$ sont compris entre o et 1, ces limites étant exclues et qu'on n'a pas entre S_1 et S_2 des relations de la forme

$$S_1 = S_2^\alpha \quad \text{ou} \quad S_2 = S_1^\alpha,$$

α désignant un nombre entier positif. Le cas où l'on aurait de pareilles relations est celui que nous avons appelé cas (A') : il sera étudié ensuite. On suppose en particulier $S_1 \neq S_2$: le cas contraire, désigné par (C) sera étudié comme cas particulier au n° 8.

On peut toujours supposer

$$|S_2| \leqq |S_1|,$$

en permutant au besoin les notations x, y d'une part, x_1, y_1, d'autre part.

Nous nous proposons, ainsi qu'il a été dit au n° 2, de déterminer un changement de variables ramenant la transformation (a) à la forme

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} u_1 = S_1 u, \\ v_1 = S_2 v. \end{cases}$$

Tout revient à déterminer deux fonctions holomorphes

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} u = \lambda(x, y), \\ v = \mu(x, y), \end{cases}$$

nulles pour $x = 0$, $y = 0$, telles que le déterminant fonctionnel $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$ soit différent de zéro à l'origine, et vérifiant les équations fonctionnelles

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \lambda(x_1, y_1) = S_1 \lambda(x, y), \\ \mu(x_1, y_1) = S_2 \mu(x, y), \end{cases}$$

où x_1, y_1 sont supposés remplacés par les seconds membres des relations (a). Si l'on remplace les variables x, y par les nouvelles variables u, v, ce qui est possible dans un certain domaine entourant l'origine, la transformation (a) prendra dans ce domaine la forme réduite (A) : cela résulte immédiatement des équations (6).

Soient x_n, y_n les nombres déduits de x, y en itérant n fois la transformation (a). On a

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = S_1 x_n + F(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = S_2 y_n + \Phi(x_n, y_n). \end{cases}$$

Nous démontrerons dans ce qui suit que $\frac{x_n}{S_1^n}$ *a pour n infini une limite* $\lambda(x, y)$, *qui est une fonction holomorphe de* x, y *vérifiant la première équation* (6). Pour $\frac{y_n}{S_2^n}$, il n'en est pas de même : il peut ne pas y avoir de limite; mais, en retranchant de y_n une certaine quantité z_n dépendant de n, la nouvelle quantité $\frac{y_n - z_n}{S_2^n}$ a pour n infini une limite $\mu(x,y)$ qui vérifie la deuxième équation (6). Enfin les fonctions $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ vérifient les conditions imposées au changement de variables (5).

C'est l'étude de la substitution linéaire

$$x_1 = S_1 x, \qquad y_1 = S_2 y$$

qui conduit tout naturellement, pour établir l'existence des fonctions $\lambda(x,y)$ et $\mu(x,y)$, à chercher si $\frac{x_n}{S_1^n}$ et $\frac{y_n}{S_2^n}$ ont des limites. Dans ce cas simple, la réduction est en effet toute effectuée et l'on a

$$\lambda(x,y) \equiv x, \qquad \mu(x,y) \equiv y.$$

D'autre part

$$x_n = S_1^n x, \qquad y_n = S_2^n y,$$

et par suite on a dans ce cas

$$\lambda(x,y) = x = \frac{x_n}{S_1^n}, \qquad \mu(x,y) = y = \frac{y_n}{S_2^n}.$$

Dans le cas général, nous étudierons donc successivement $\frac{x_n}{S_1^n}$ et $\frac{y_n}{S_2^n}$; l'étude de la première expression sera beaucoup plus facile que celle de la deuxième (en supposant $|S_2| \leqq |S_1|$); cela tient à ce que l'étude de $\frac{x_n}{S_1^n}$ suppose seulement l'existence des dérivées premières des seconds membres de (a), tandis que l'étude de $\frac{y_n}{S_2^n}$ suppose l'existence des dérivées jusqu'à un certain ordre α qui sera défini. Nous avons supposé, il est vrai, que les seconds membres de (a) sont holomorphes et qu'ils ont par suite des dérivées de tous les ordres. Cette hypothèse, faite surtout pour faciliter l'exposition, évitera certaines longueurs, mais le lecteur verra aisément que les démonstrations qui suivent pourraient être faites en supposant seulement l'existence d'un certain nombre de dérivées.

5. *Existence d'une limite pour* $\frac{x_n}{S_1^n}$; $(|S_2| \leqq |S_1|)$. — On peut déterminer un nombre positif h tel que les inégalités

$$|x| < h, \qquad |y| < h$$

entraînent

$$|F(x,y)| < \eta \{ |x| + |y| \},$$
$$|\Phi(x,y)| < \eta \{ |x| + |y| \};$$

η est un nombre positif donné qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut, à condition de prendre h suffisamment petit : cela résulte de ce que les fonctions F et Φ sont nulles pour $x = y = 0$ ainsi que leurs dérivées premières.

Les relations (7) jointes aux inégalités précédentes nous permettent alors de démontrer que x_n, y_n tendent vers zéro pour n infini et de préciser la façon dont ces quantités tendent vers zéro, en supposant $|x|$ et $|y|$ inférieurs à h. On a

$$|x_1| < |S_1||x| + \eta|x| + \eta|y| < \{ |S_1| + 2\eta \} h,$$
$$|y_1| < |S_2||x| + \eta|x| + \eta|y| < \{ |S_2| + 2\eta \} h.$$

Posons

$$|S_1| + 2\eta = \sigma_1, \qquad |S_2| + 2\eta = \sigma_2,$$

et choisissons η suffisamment petit pour que σ_1 et σ_2 soient inférieurs à 1.

On a $\sigma_2 \leqq \sigma_1$ de sorte qu'on peut écrire

$$|x_1| < \sigma_1 h < h, \qquad |y_1| < \sigma_1 h < h.$$

On aura ensuite

$$|x_2| < |S_1||x_1| + \eta|x_1| + \eta|y_1| < \{ |S_1| + 2\eta \} \sigma_1 h,$$
$$|y_2| < |S_2||x_1| + \eta|x_1| + \eta|y_1| < \{ |S_2| + 2\eta \} \sigma_1 h,$$

d'où

$$|x_2| < \sigma_1^2 h, \qquad |y_2| < \sigma_1^2 h,$$

et en général

(8) $$|x_n| < \sigma_1^n h, \qquad |y_n| < \sigma_1^n h.$$

On voit que x_n, y_n tendent vers zéro pour n infini.

Démontrons maintenant que $\frac{x_n}{S_1^n}$ a une limite pour n infini. Cela revient à démontrer la convergence de la série

$$\sum \left(\frac{x_{n+1}}{S_1^{n+1}} - \frac{x_n}{S_1^n} \right).$$

Le terme général T_n de cette série s'écrit, en vertu des relations (7),

$$T_n = \frac{x_{n+1} - S_1 x_n}{S_1^{n+1}} = \frac{F(x_n, y_n)}{S_1^{n+1}}.$$

On peut déterminer un nombre positif M tel que, dans le domaine considéré, on ait

$$|F(x, y)| < M[|x| + |y|]^2.$$

On aura donc

$$|T_n| < \frac{M[|x_n| + |y_n|]^2}{|S_1|^{n+1}}$$

ou, en vertu des inégalités (8),

$$|T_n| < \frac{4Mh^2\sigma_1^{2n}}{|S_1|^{n+1}}.$$

La série dont le terme général figure dans le second membre est convergente si l'on a

$$\frac{\sigma_1^2}{|S_1|} < 1,$$

c'est-à-dire

$$\frac{[|S_1| + 2\eta]^2}{|S_1|} < 1,$$

et cette condition est réalisée si l'on prend η suffisamment petit, puisqu'elle se réduit à $|S_1| < 1$ lorsqu'on y remplace η par zéro.

Il résulte de là que la série ΣT_n est absolument convergente; de plus les termes de cette série sont des fonctions holomorphes de x et de y et la série est uniformément convergente dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$: par suite sa somme est une fonction de x et de y holomorphe dans ce domaine.

Ainsi, $\frac{x_n}{S_1^n}$ a, pour n infini, une limite qui est une fonction de x et de y holomorphe dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$.

Posons

$$\lim \frac{x_n}{S_1^n} = \lambda(x, y).$$

La fonction $\lambda(x, y)$ vérifie la première des équations fonctionnelles (6).

En effet, si l'on remplace x, y par x_1, y_1 sans changer la valeur de n, x_n est remplacé par x_{n+1}. On a donc

$$\lim \frac{x_{n+1}}{S_1^n} = \lambda(x_1, y_1).$$

Mais d'autre part, si l'on augmente n d'une unité en conservant leurs valeurs à x et à y, on obtient

$$\lim \frac{x_{n+1}}{S_1^{n+1}} = \lambda(x, y).$$

De là résulte l'équation fonctionnelle

$$\lambda(x_1, y_1) = S_1 \lambda(x, y)$$

qu'il s'agissait d'établir.

Il importe, pour la suite, de calculer les termes du premier degré dans le développement de la fonction holomorphe $\lambda(x, y)$ en série entière, autrement dit les valeurs $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_0$ des dérivées premières pour $x = y = 0$.

On a

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_0 = \lim \frac{\left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)_0}{S_1^n}.$$

Or la relation

$$x_{n+1} = S_1 x_n + F(x_n, y_n)$$

donne la relation de récurrence

$$\left(\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x}\right)_0 = S_1 \left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)_0,$$

d'où

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)_0 = S_1^n,$$

et par suite

$$\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)_0 = 1.$$

On voit de même que $\left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)_0$ est nul.

On a donc

$$\lambda(x, y) = x + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

6. *Étude de* $\frac{y_n}{S_2^n}$; $(|S_2| \leqq |S_1|)$. — Nous allons montrer tout d'abord sur un exemple qu'il peut se faire que $\frac{y_n}{S_2^n}$ n'ait pas de limite pour n infini, ainsi que nous l'avons déjà indiqué au n° 4.

Soit la transformation

$$x_1 = S_1 x,$$
$$y_1 = S_2 y + x^\alpha.$$

Il est très facile de calculer ici de proche en proche x_2, y_2; x_3, y_3; ...; x_n, y_n. On trouve aisément

$$x_n = S_1^n x,$$
$$y_n = S_2^n y + (S_2^{n-1} + S_2^{n-2} S_1^\alpha + S_2^{n-3} S_1^{2\alpha} + \ldots$$
$$+ S_2^{n-p-1} S_1^{p\alpha} + \ldots + S_1^{(n-1)\alpha}) x^\alpha.$$

On a ici

$$\frac{y_n}{S_2^n} = y + \left(\frac{1}{S_2} + \frac{S_1^\alpha}{S_2^2} + \frac{S_1^{2\alpha}}{S_2^3} + \ldots + \frac{S_1^{p\alpha}}{S_2^{p+1}} + \ldots + \frac{S_1^{(n-1)\alpha}}{S_2^n} \right) x^\alpha.$$

On voit que $\frac{y_n}{S_2^n}$ n'a pas de limite si l'on a

$$\left| \frac{S_1^\alpha}{S_2} \right| > 1.$$

Or on a $|S_2| \leqq |S_1| < 1$. Il peut donc se faire que $|S_1|^\alpha$ soit supérieur à $|S_2|$ et dans ce cas $\frac{y_n}{S_2^n}$ n'a pas de limite pour n infini.

On voit par cet exemple que la méthode employée pour l'étude de $\frac{x_n}{S_1^n}$ ne saurait s'appliquer sans modification à l'étude de $\frac{y_n}{S_2^n}$. Mais nous allons montrer qu'*en retranchant de y_n un polynome en x_n, y_n convenablement choisi $\theta(x_n, y_n)$, la nouvelle quantité $\frac{y_n - \theta(x_n, y_n)}{S_2^n}$ aura une limite pour n infini.*

Pour définir ce polynome $\theta(x_n, y_n)$, remarquons tout d'abord qu'en vertu de l'hypothèse $|S_2| \leqq |S_1| < 1$, il existe un nombre entier α tel qu'on ait

$$|S_1|^{\alpha+1} < |S_2| \leqq |S_1|^\alpha;$$

α est le plus grand entier contenu dans $\frac{\log|S_2|}{\log|S_1|}$.

Prenons alors pour $\theta(x_n, y_n)$, un polynome de degré α en x_n, y_n avec des coefficients indéterminés. La quantité $\frac{y_n - \theta(x_n, y_n)}{S_2^n}$ aura une limite pour n infini s'il y a convergence pour la série dont le terme général est

$$\begin{aligned}
T_n &= \frac{y_{n+1} - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S_2^{n+1}} - \frac{y_n - \theta(x_n, y_n)}{S_2^n} \\
&= \frac{y_{n+1} - S_2 y_n - \theta(x_{n+1}, y_{n+1}) + S_2\theta(x_n, y_n)}{S_2^{n+1}} \\
&= \frac{\Phi(x_n, y_n) - \theta(x_{n+1}, y_{n+1}) + S_2\theta(x_n, y_n)}{S_2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Remplaçons dans cette expression x_{n+1}, y_{n+1} par leurs valeurs en fonctions de x_n, y_n : le numérateur est une fonction holomorphe de x_n, y_n. Je dis que les coefficients indéterminés qui figurent dans le polynome $\theta(x_n, y_n)$ peuvent être choisis de façon que dans le numérateur de T_n, ordonné suivant les puissances croissantes de x_n, y_n, il n'y ait pas de termes de degré inférieur à $\alpha + 1$ et ce fait entraînera aisément la convergence de la série.

Soient en effet

$$\begin{aligned}
F(x, y) &= \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \alpha_{02}y^2 + \alpha_{30}x^3 + \alpha_{21}x^2y + \ldots, \\
\Phi(x, y) &= \beta_{20}x^2 + \beta_{11}xy + \beta_{02}y^2 + \beta_{30}x^3 + \beta_{21}x^2y + \ldots
\end{aligned}$$

les développements des fonctions données F et Φ et soit

$$\theta(x, y) = \lambda_{20}x^2 + \lambda_{11}xy + \lambda_{02}y^2 + \lambda_{30}x^3 + \lambda_{21}x^2y + \ldots$$

le polynome à déterminer; il s'agit de calculer les λ de façon que dans l'expression

$$(9) \qquad \Phi(x, y) - \theta(x_1, y_1) + S_2\theta(x, y),$$

les termes de degré $2, 3, \ldots, \alpha$ disparaissent. Remplaçons $\theta(x_1, y_1)$ par sa valeur exprimée en fonction de x, y :

$$\begin{aligned}
\theta(x_1, y_1) = \lambda_{20}&[S_1x + \alpha_{20}x^2 + \alpha_{11}xy + \ldots]^2 \\
&+ \lambda_{11}[S_1x + \alpha_{20}x^2 + \ldots][S_2y + \beta_{20}x^2 + \ldots] \\
&+ \lambda_{02}[S_2y + \beta_{20}x^2 + \ldots]^2 + \lambda_{30}[\ldots]^3 + \ldots
\end{aligned}$$

et égalons à zéro les coefficients de x^2, xy, ..., en général de tous les termes de degré inférieur à $\alpha + 1$ dans l'expression (9). Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\beta_{20} - \lambda_{20}(S_1^2 - S_2) &= 0, \\
\beta_{11} - \lambda_{11}(S_1S_2 - S_2) &= 0, \\
\beta_{02} - \lambda_{02}(S_2^2 - S_2) &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots,
\end{aligned}$$

équations qui déterminent successivement λ_{20}, λ_{11}, λ_{02}, ...; en général on voit que λ_{pq} s'obtiendra linéairement en fonction de coefficients déjà calculés par une équation dans laquelle le coefficient de l'inconnue λ_{pq} sera $S_1^p S_2^q - S_2$. Or ce coefficient n'est jamais nul : en effet, si q est nul, il s'écrit $S_1^p - S_2$ et par hypothèse cette expression n'est pas nulle [puisqu'il s'agit du cas (A) et non pas du cas (A′) qui sera traité plus loin]; si q n'est pas nul, le coefficient précédent s'écrit $S_2(S_1^p S_2^{q-1} - 1)$ et il n'est pas nul puisque $|S_1|$ et $|S_2|$ sont compris entre o et 1. On voit donc que le polynome $\theta(x, y)$ est parfaitement déterminé par la condition énoncée plus haut.

Montrons maintenant que $\theta(x, y)$ étant ainsi choisi la série dont le terme général est T_n est convergente. En effet T_n est alors de la forme

$$T_n = \frac{\Phi_1(x_n, y_n)}{S_2^{n+1}},$$

où $\Phi_1(x, y)$ désigne une fonction holomorphe dont le développement en série entière commence par des termes de degré $\alpha + 1$. Les inégalités $|x_n| < h$, $|y_n| < h$ entraînent

$$|\Phi_1(x_n, y_n)| < M[|x_n| + |y_n|]^{\alpha+1},$$

M étant un nombre positif fixe convenablement choisi.

On aura donc, en conservant les notations du numéro précédent,

$$|\Phi_1(x_n, y_n)| < M\, 2^{\alpha+1} h^{\alpha+1} \sigma_1^{n(\alpha+1)}$$

et par suite

$$|T_n| < \frac{M}{|S_2|} \times 2^{\alpha+1} h^{\alpha+1} \left|\frac{\sigma_1^{\alpha+1}}{S_2}\right|^n.$$

Dans le second membre figure le terme général d'une progression géométrique dont la raison est

$$\left|\frac{\sigma_1^{\alpha+1}}{S_2}\right|,$$

c'est-à-dire

$$\frac{[|S_1| + 2\eta]^{\alpha+1}}{|S_2|};$$

si η est suffisamment petit, cette raison est inférieure à 1, car elle se réduit, pour $\eta = 0$, à $\frac{|S_1|^{\alpha+1}}{|S_2|}$ et α a été choisi de façon que cette dernière quantité soit inférieure à 1.

On voit donc que la série ΣT_n est convergente et même qu'elle est uniformément convergente dans un certain domaine $|x| < h$, $|y| < h$; comme les termes de cette série sont des fonctions holomorphes de x, y, la somme de la série est une fonction de x et de y holomorphe dans ce domaine.

Ainsi, $\frac{y_n - \theta(x_n, y_n)}{S_2^n}$ *a, pour n infini, une limite qui est une fonction de x et de y holomorphe dans le domaine* $|x| < h$, $|y| < h$, *pourvu que h soit suffisamment petit.*

Posons

$$\lim \frac{y_n - \theta(x_n, y_n)}{S_2^n} = \mu(x, y).$$

La fonction $\mu(x, y)$ *vérifie la deuxième des équations fonctionnelles* (6).

La démonstration est toute pareille à celle qui a été donnée au numéro précédent pour la fonction λ. On a

$$\lim \frac{y_{n+1} - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S_2^n} = \mu(x_1, y_1),$$

et d'autre part

$$\lim \frac{y_{n+1} - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S_2^{n+1}} = \mu(x, y),$$

d'où l'équation fonctionnelle

$$\mu(x_1, y_1) = S_2 \mu(x, y)$$

qu'il s'agissait d'établir.

On calcule aisément les premiers termes du développement de la fonction $\mu(x, y)$ et l'on voit ainsi qu'on a

$$\mu(x, y) \equiv y + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

7. *Forme réduite de la transformation.* — Résumons ce qui précède.

On a déterminé deux fonctions $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ *holomorphes* *dans un certain domaine* $|x| < h$, $|y| < h$, *de la forme*

$$\lambda(x, y) = x + \ldots,$$
$$\mu(x, y) = y + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier, et vérifiant dans ce domaine les équations fonctionnelles

$$\lambda(x_1, y_1) = S_1 \lambda(x, y),$$
$$\mu(x_1, y_1) = S_2 \mu(x, y).$$

Effectuons maintenant le changement de variables (2) en prenant pour nouvelles variables les fonctions $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ des anciennes variables. Ce changement de variables est possible puisque le déterminant fonctionnel $\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)}$ n'est pas nul à l'origine. *La transformation donnée* (*a*) *sera ainsi ramenée à la forme réduite linéaire*

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} u_1 = S_1 u, \\ v_1 = S_2 v, \end{cases}$$

en vertu des équations fonctionnelles vérifiées par λ et μ.

8. *Étude du cas* (C). — Le cas où la transformation donnée est de la forme

$$(c) \qquad \begin{cases} x_1 = Sx + F(x, y), \\ y_1 = Sy + \Phi(x, y) \end{cases}$$

est des plus faciles. Il suffira de refaire les raisonnements du n° 5.

On démontre que $\frac{x_n}{S^n}$ a une limite $\lambda(x, y)$ et que $\frac{y_n}{S^n}$ a aussi une limite $\mu(x, y)$: la méthode s'applique ici aussi bien à la deuxième quantité qu'à la première. Ces limites sont des fonctions holomorphes de x, y de la forme

$$\lambda(x, y) = x + \ldots,$$
$$\mu(x, y) = y + \ldots,$$

de sorte que, en prenant pour nouvelles variables les fonctions $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$, la transformation prend encore la forme réduite linéaire

$$\text{(C)} \qquad \begin{cases} u_1 = S u, \\ v_1 = S v. \end{cases}$$

IV. — Étude du cas (B).

9. *Méthode.* — Soit maintenant la transformation

$$(b)\qquad \begin{cases} x_1 = Sx - y + F(x, y), \\ y_1 = Sy + \Phi(x, y). \end{cases}$$

Nous nous proposons de la ramener à la forme réduite

$$(B)\qquad \begin{cases} u_1 = Su - v, \\ v_1 = Sv. \end{cases}$$

Les fonctions $u = \lambda(x, y)$, $v = \mu(x, y)$ qui définissent le changement de variables permettant de transformer (b) en (B) seront déterminées ici encore comme limites pour n infini de certaines expressions dépendant de x, y, n.

C'est encore l'étude de la substitution linéaire

$$x_1 = Sx - y,$$
$$y_1 = Sy$$

qui conduit tout naturellement à considérer de pareilles expressions.

Soient x_n, y_n les nombres déduits de x, y en itérant n fois cette substitution linéaire. On a (n° 3)

$$x_n = S^n x - nS^{n-1}y,$$
$$y_n = S^n y,$$

d'où

$$y = \frac{y_n}{S^n}, \qquad x = \frac{x_n + nS^{n-1}y}{S^n} = \frac{Sx_n + ny_n}{S^{n+1}}.$$

Revenons au cas général (b) et soient x_n, y_n les nombres déduits de x, y en itérant n fois la substitution.

Nous démontrerons dans ce qui suit les propositions suivantes :

1° $\dfrac{y_n}{S^n}$ *a, pour n infini, une limite* $\mu(x, y)$;

2° $\dfrac{Sx_n + n\mu(x_n, y_n)}{S^{n+1}}$ *a, pour n infini, une limite* $\lambda(x, y)$.

Les fonctions $\lambda(x, y)$, $\mu(x, y)$ ainsi définies se réduisent, ainsi qu'on vient de le voir, à x et à y lorsque la substitution est linéaire; pour le cas général, *nous démontrerons que si on les prend comme nouvelles variables u, v, la transformation (b) prend la forme réduite* (B).

10. *Existence d'une limite pour* $\frac{y_n}{S^n}$. — Nous établirons tout d'abord, comme dans le cas (A), des inégalités qui permettront de démontrer que x_n, y_n tendent vers zéro pour n infini et de préciser la façon dont ces quantités tendent vers zéro.

On a, dans un certain domaine $|x| < h$, $|y| < h$, les inégalités suivantes :

$$|F(x,y)| < \eta[|x| + |y|],$$
$$|\Phi(x,y)| < \eta[|x| + |y|],$$

dans lesquelles η est un nombre positif qu'on peut prendre aussi petit qu'on le veut, à condition de diminuer h en conséquence.

Les relations

$$x_{n+1} = Sx_n - y_n + F(x_n, y_n),$$
$$y_{n+1} = Sy_n + \Phi(x_n, y_n)$$

nous donnent alors

$$|x_{n+1}| < [|S| + \eta]|x_n| + [1 + \eta]|y_n|,$$
$$|y_{n+1}| < \eta|x_n| + [|S| + \eta]|y_n|.$$

Supposons qu'on ait

$$|x_n| < h_n, \qquad |y_n| < k_n.$$

On en déduira

$$|x_{n+1}| < h_{n+1}, \qquad |y_{n+1}| < k_{n+1},$$

à condition de poser

$$h_{n+1} = [|S| + \eta]h_n + [1 + \eta]k_n,$$
$$k_{n+1} = \eta h_n + [|S| + \eta]k_n.$$

De ces relations on peut déduire l'expression de h_n et de k_n en fonction de n et des valeurs initiales $h_0 = h$, $k_0 = h$: il suffit pour cela d'utiliser les résultats relatifs aux substitutions linéaires qui ont été établis au n° 3.

Soient σ_1 et σ_2 les racines de l'équation

$$\Delta(\sigma) = \begin{vmatrix} |S| + \eta - \sigma & 1 + \eta \\ \eta & |S| + \eta - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Si η reçoit la valeur zéro, cette équation a une racine double égale à $|S|$: si η est suffisamment petit, ses racines σ_1, σ_2 sont réelles, distinctes et aussi voisines qu'on le veut de $|S|$, par conséquent inférieures à 1; soit σ_1 la plus grande des deux racines.

On aura alors

$$h_n = A\sigma_1^n + B\sigma_2^n,$$
$$k_n = C\sigma_1^n + D\sigma_2^n,$$

A, B, C, D étant indépendants de n. On déduit de là

$$|h_n| < [|A| + |B|]\sigma_1^n,$$
$$|k_n| < [|C| + |D|]\sigma_1^n,$$

c'est-à-dire, en désignant par K un nombre fixe indépendant de n,

$$|x_n| < |h_n| < K\sigma_1^n,$$
$$|y_n| < |k_n| < K\sigma_1^n.$$

Ces inégalités prouvent que x_n et y_n tendent vers zéro lorsque n croît indéfiniment.

Ceci établi, la démonstration de l'existence d'une limite pour $\frac{y_n}{S^n}$ s'achève aisément en procédant comme on l'a fait au n° 5 pour le cas (A).

Tout revient à démontrer que la série

$$\sum\left(\frac{y_{n+1}}{S^{n+1}} - \frac{y_n}{S^n}\right) = \sum\frac{\Phi(x_n, y_n)}{S^{n+1}}$$

est convergente.

On a, en désignant par M un nombre fixe,

$$\left|\frac{\Phi(x_n, y_n)}{S^{n+1}}\right| < \frac{M[|x_n| + |y_n|]^2}{|S|^{n+1}} < 4MK^2\left|\frac{\sigma_1^{2n}}{S^{n+1}}\right|.$$

Or $\frac{\sigma_1^2}{|S|}$ est inférieur à 1. Donc la série est uniformément convergente dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$.

Ainsi $\frac{y_n}{S^n}$ *a, pour n infini, une limite qui est une fonction de* x, y *holomorphe dans le domaine* $|x| < h$, $|y| < h$.

Si l'on pose

$$\lim \frac{y_n}{S^n} = \mu(x, y),$$

on démontre, comme on l'a fait dans un cas analogue au n° 5, que la fonction $\mu(x, y)$ vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mu(x_1, y_1) = S\mu(x, y).$$

La fonction $\mu(x, y)$ a un développement de la forme

$$\mu(x, y) = y + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier degré.

11. *Existence d'une limite pour* $\frac{Sx_n + n\mu(x_n, y_n)}{S^{n+1}}$. — Dans cette expression $\mu(x, y)$ représente la fonction qu'on vient de définir à la fin du numéro précédent. Pour prouver qu'elle a une limite, lorsque n croît indéfiniment, il suffit d'établir la convergence de la série dont le terme général est

$$T_n = \frac{Sx_{n+1} + (n+1)\mu(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{n+2}} - \frac{Sx_n + n\mu(x_n, y_n)}{S^{n+1}}.$$

La fonction $\mu(x, y)$ vérifie la relation

$$\mu(x_{n+1}, y_{n+1}) = S\mu(x_n, y_n).$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{S(x_{n+1} - Sx_n) + (n+1)S\mu(x_n, y_n) - nS\mu(x_n, y_n)}{S^{n+2}} \\ &= \frac{x_{n+1} - Sx_n + \mu(x_n, y_n)}{S^{n+1}}. \end{aligned}$$

Mais on a

$$\begin{aligned} x_{n+1} - Sx_n &= -y_n + F(x_n, y_n), \\ \mu(x_n, y_n) &= y_n + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier. Il en résulte que T_n prend la forme

$$T_n = \frac{\psi(x_n, y_n)}{S^{n+1}},$$

ψ étant une fonction holomorphe dont le développement en série entière commence par des termes du second degré au moins. On démontre alors, comme on l'a fait à la fin du numéro précédent pour la série $\sum \frac{\Phi(x_n, y_n)}{S^{n+1}}$, que la série ΣT_n est uniformément convergente dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$.

Ainsi, l'expression $\frac{Sx_n + n\mu(x_n, y_n)}{S^{n+2}}$ *a, pour n infini, une limite qui est une fonction de x et de y holomorphe dans le domaine* $|x| < h$, $|y| < h$.

Posons

$$\lim \frac{Sx_n + n\,\mu(x_n, y_n)}{S^{n+1}} = \lambda(x, y).$$

La fonction $\lambda(x,y)$ vérifie une équation fonctionnelle que nous allons établir.

Remplaçons x, y par x_1, y_1 sans changer la valeur de n; x_n, y_n sont remplacés par x_{n+1}, y_{n+1} et l'on a

$$\lim \frac{Sx_{n+1} + n\,\mu(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{n+1}} = \lambda(x_1, y_1).$$

D'autre part, si l'on augmente n d'une unité en conservant à x et à y leurs valeurs, on peut écrire

$$\lim \frac{Sx_{n+1} + (n+1)\,\mu(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{n+2}} = \lambda(x, y).$$

De ces deux égalités on déduit

$$\lambda(x_1, y_1) - S\lambda(x, y) = -\lim \frac{\mu(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{n+1}}.$$

Mais la fonction $\mu(x,y)$ vérifie les relations fonctionnelles

$$\mu(x_{n+1}, y_{n+1}) = S\,\mu(x_n, y_n) = S^2\,\mu(x_{n-1}, y_{n-1}) = \ldots = S^{n+1}\,\mu(x, y).$$

On a donc la relation

$$\lambda(x_1, y_1) = S\,\lambda(x, y) - \mu(x, y).$$

C'est l'équation fonctionnelle que nous voulions établir pour la fonction $\lambda(x,y)$.

Calculons les premiers termes du développement de cette fonction $\mu(x, y)$. On a

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0 = \lim \frac{S\left(\frac{\partial x_n}{\partial y}\right)_0 + n\,S^n\left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)_0}{S^{n+1}} = \lim \frac{\left(\frac{\partial x_n}{\partial y}\right)_0 + n\,S^{n-1}}{S^n}.$$

Or on calcule aisément $\left(\frac{\partial x_n}{\partial y}\right)_0$ et l'on trouve $\left(\frac{\partial x_n}{\partial y}\right)_0 = -\,n\,S^{n-1}$.
On a donc

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

On calcule de même $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0$; on a

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_0 = \lim \frac{\left(\frac{\partial x_n}{\partial x}\right)_0}{S^n} = 1.$$

On a donc

$$\lambda(x, y) = x + \ldots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier degré.

12. *Forme réduite de la transformation* (*b*). — Remplaçons les variables x, y par les variables u, v liées à x, y par les relations

$$u = \lambda(x, y) = x + \ldots,$$
$$v = \mu(x, y) = y + \ldots.$$

Ces formules définissent un changement de variables dans le domaine de l'origine. On posera de même

$$u_1 = \lambda(x_1, y_1),$$
$$v_1 = \mu(x_1, y_1).$$

Or on a démontré dans les deux numéros précédents que les fonctions $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ vérifiaient le système fonctionnel

$$\lambda(x_1, y_1) = S\,\lambda(x, y) - \mu(x, y),$$
$$\mu(x_1, y_1) = S\,\mu(x, y).$$

Les nouvelles variables u_1, v_1 seront donc liées à u, v par la transformation linéaire

$$\text{(B)} \qquad \begin{cases} u_1 = S\,u - v, \\ v_1 = S\,v. \end{cases}$$

Telle est la forme réduite que prend la transformation (b) lorsqu'on fait le changement de variables défini plus haut.

V. — Étude du cas (A′).

13. *Méthode.* — Soit enfin la transformation

$$(a')\qquad \begin{cases} x_1 = S^\alpha x + F(x, y), \\ y_1 = S\ y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

dans laquelle α désigne un nombre entier. La forme réduite (A) ne s'applique pas, *en général,* à la transformation (a'), parce qu'on est ici dans le cas exceptionnel où l'une des racines S_1, S_2 est une puissance à exposant entier de l'autre racine.

Mais nous allons montrer, par une méthode analogue à celle qui a été employée dans le cas (B), qu'on peut ramener (a') à la forme réduite

$$(A')\qquad \begin{cases} u_1 = S^\alpha u - k v^\alpha, \\ v_1 = S v, \end{cases}$$

où k est un nombre qui sera fixé ultérieurement.

Ici encore les fonctions $u = \lambda(x, y)$, $v = \mu(x, y)$ qui définissent le changement de variables seront déterminées comme limites de certaines expressions formées avec n et avec les nombres x_n, y_n déduits de x, y en itérant n fois la transformation (a').

On trouve aisément quelles devront être ces expressions en étudiant d'abord le cas particulier de la transformation (A′) elle-même. En itérant n fois la transformation (A′), on obtient

$$u_n = S^{n\alpha} u - n\, S^{(n-1)\alpha} k v^\alpha,$$
$$v_n = S^n v,$$

d'où

$$v = \frac{v_n}{S^n}, \qquad u = \frac{u_n + n\, S^{(n-1)\alpha} k v^\alpha}{S^{n\alpha}} = \frac{S^\alpha u_n + n k v_n^\alpha}{S^{(n+1)\alpha}}.$$

La forme de ces expressions indique la marche à suivre pour traiter le cas (a') en général :

1° On démontrera que $\frac{y_n}{S^n}$ a une limite $\mu(x, y)$ pour n infini;

2° On étudiera pour n infini l'expression $\frac{S^\alpha x_n + nk[\mu(x_n, y_n)]^\alpha}{S^{(n+1)\alpha}}$ qui sera désignée, pour abréger, par $\frac{w_n}{S^{(n+1)\alpha}}$.

14. *Limite de* $\frac{y_n}{S^n}$. — L'étude de la première expression $\frac{y_n}{S^n}$ ne présente aucune difficulté ; la démonstration est la même que celle qui a été faite dans le cas (A) pour $\frac{x_n}{S_1^n}$ (n° 5) : la racine S_1 était alors la plus grande en valeur absolue des deux racines S_1, S_2. Ici S est la plus grande en valeur absolue des deux racines S et S^α, de sorte que, sans avoir à modifier en rien la démonstration faite dans le cas ainsi rappelé, on démontrera que $\frac{y_n}{S^n}$ *a, pour n infini, une limite* $\mu(x, y)$, *fonction holomorphe de* x *et de* y, *de la forme*

$$\mu(x, y) = y + \ldots$$

et que cette limite vérifie l'équation fonctionnelle

$$\mu(x_1, y_1) = S\,\mu(x, y).$$

15. *Étude de* $\frac{w_n}{S^{(n+1)\alpha}}$. — Nous représentons par w_n, ainsi que nous venons de le dire, la quantité $S^\alpha x_n + nk[\mu(x_n, y_n)]^\alpha$. L'étude de l'expression $\frac{w_n}{S^{(n+1)\alpha}}$ présente quelques difficultés, analogues aux difficultés qui se présentaient dans le cas (A) pour l'expression $\frac{y_n}{S_2^n}$ correspondant à celle des deux racines S_1, S_2 qui avait le plus petit module (n° 6). En général, *cette expression n'a pas de limite* pour n infini; mais, *on peut déterminer un polynome* $\theta(x_n, y_n)$ *tel que, en retranchant ce polynome de* w_n, *la nouvelle expression* $\frac{w_n - \theta(x_n, y_n)}{S^{(n+1)\alpha}}$ *ait une limite pour n infini.*

En effet, cette nouvelle expression aura une limite pour n infini s'il y a convergence pour la série dont le terme général est

$$\begin{aligned} T_n &= \frac{w_{n+1} - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{(n+2)\alpha}} - \frac{w_n - \theta(x_n, y_n)}{S^{(n+1)\alpha}} \\ &= \frac{S^\alpha x_{n+1} + (n+1)k[\mu(x_{n+1}, y_{n+1})]^\alpha - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{(n+2)\alpha}} \\ &\quad + \frac{-S^{2\alpha} x_n - nkS^\alpha[\mu(x_n, y_n)]^\alpha + S^\alpha\theta(x_n, y_n)}{S^{(n+2)\alpha}}. \end{aligned}$$

La fonction $\mu(x, y)$ vérifie la relation

$$\mu(x_{n+1}, y_{n+1}) = S\mu(x_n, y_n).$$

L'expression de T_n se simplifie donc et l'on a

$$T_n = \frac{S^\alpha(x_{n+1} - S^\alpha x_n) + kS^\alpha[\mu(x_n, y_n)]^\alpha - \theta(x_{n+1}, y_{n+1}) + S^\alpha\theta(x_n, y_n)}{S^{(n+2)\alpha}}$$

$$= \frac{S^\alpha F(x_n, y_n) + kS^\alpha[\mu(x_n, y_n)]^\alpha - \theta(x_{n+1}, y_{n+1}) + S^\alpha\theta(x_n, y_n)}{S^{(n+2)\alpha}}.$$

Le numérateur est une fonction holomorphe de x_n, y_n : il suffit de supposer qu'on a remplacé x_{n+1}, y_{n+1} par leurs valeurs en fonction de x_n, y_n. Je dis qu'on peut disposer de k et des coefficients indéterminés du polynome $\theta(x, y)$ de façon que, au numérateur de T_n ordonné suivant les puissances croissantes de x_n et de y_n, *il n'y ait pas de termes de degré inférieur à* $\alpha + 1$. Si l'on remplace x_n, y_n par x, y, cela revient à montrer qu'il en est ainsi pour l'expression

$$(10)\qquad S^\alpha F(x, y) + kS^\alpha[\mu(x, y)]^\alpha - \theta(x_1, y_1) + S^\alpha\theta(x, y)$$

ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y : la convergence de la série résultera aisément de là.

Procédons comme au n° 6 et prenons pour $\theta(x, y)$ un polynome de degré α avec des coefficients indéterminés

$$\theta(x, y) = \lambda_{20}x^2 + \lambda_{11}xy + \lambda_{02}y^2 + \lambda_{30}x^3 + \ldots.$$

En annulant les coefficients des divers termes de degré inférieur à $\alpha + 1$ en x, y dans l'expression (10), on a des égalités qui permettent de calculer successivement $\lambda_{20}, \lambda_{11}, \ldots$; l'inconnue λ_{pq} s'exprime en fonction de quantités déjà calculées par une équation du premier degré dans laquelle le coefficient de λ_{pq} est $(S^{p\alpha+q} - S^\alpha)$, et ce coefficient n'est jamais nul, *sauf si p et q ont les valeurs* $p = 0$, $q = \alpha$; on pourra donc calculer, de cette façon, tous les coefficients λ_{pq}, sauf $\lambda_{0\alpha}$, lequel disparaît dans l'équation obtenue en égalant à zéro les termes en y^α dans l'expression (10). Mais d'autre part, en égalant à zéro les termes en y^α dans cette expression, on obtient une équation qui contient le terme kS^α provenant de $kS^\alpha[\mu(x, y)]^\alpha$; cette équation permettra donc de calculer k qui jusqu'ici était indéterminé; quant à $\lambda_{0\alpha}$, on pourra le prendre arbitraire, nul par exemple. Il pourra arriver en particulier qu'on obtienne $k=0$; ce cas remarquable va être examiné bientôt.

Le polynome $\theta(x,y)$ et le nombre k étant ainsi choisis, montrons que la série ΣT_n est convergente. T_n sera maintenant de la forme

$$T_n = \frac{\Phi_1(x_n, y_n)}{S^{(n+1)\alpha}},$$

où Φ_1 désigne une fonction holomorphe *dont le développement en série entière commence par des termes de degré* $\alpha+1$. La démonstration s'achève alors comme au n° 6. On a, en conservant les notations des n°s 5 et 6,

$$|x_n| < \sigma^n h, \qquad |y_n| < \sigma^n h,$$

où σ désigne un nombre voisin de S. D'autre part, on a

$$|\Phi_1(y_n, y_n)| < M[|x_n| + |y_n|]^{\alpha+1},$$

et par suite

$$|T_n| < \frac{M}{|S^{2\alpha}|} 2^{\alpha+1} h^{\alpha+1} \left|\frac{\sigma^{\alpha+1}}{S^\alpha}\right|^n.$$

Or, on a

$$\left|\frac{\sigma^{\alpha+1}}{S^\alpha}\right| < 1,$$

puisque σ est aussi voisin de S qu'on le veut, pourvu qu'on restreigne suffisamment le domaine $|x| < h$, $|y| < h$. La série ΣT_n est donc convergente et elle converge uniformément dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$. Comme les termes de cette série sont des fonctions holomorphes de x, y, la série a pour somme une fonction holomorphe dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$.

Ainsi, *l'expression* $\frac{w_n - \theta(x_n, y_n)}{S^{(n+1)\alpha}}$ *a, pour n infini, une limite qui est une fonction de* x, y *holomorphe dans le domaine* $|x| < h$, $|y| < h$, *pourvu que h soit suffisamment petit.*

Posons

$$\lim \frac{w_n - \theta(x_n, y_n)}{S^{(n+1)\alpha}} = \lambda(x, y).$$

La fonction $\lambda(x,y)$ *vérifie une équation fonctionnelle que nous allons établir.*

On a

$$\lambda(x\ ,y\ ) = \lim \frac{S^\alpha x_{n+1} + (n+1)k[\mu(x_{n+1}, y_{n+1})]^\alpha - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{(n+2)\alpha}},$$

$$\lambda(x_1, y_1) = \lim \frac{S^\alpha x_{n+1} + nk[\mu(x_{n+1}, y_{n+1})]^\alpha - \theta(x_{n+1}, y_{n+1})}{S^{(n+1)\alpha}};$$

d'où

$$\lambda(x_1, y_1) - S^\alpha \lambda(x, y) = \lim \frac{-k[\mu(x_{n+1}, y_{n+1})]^\alpha}{S^{(n+1)\alpha}}$$

ou bien

$$\lambda(x_1, y_1) = S^\alpha \lambda(x, y) - k[\mu(x, y)]^\alpha.$$

Telle est l'équation fonctionnelle vérifiée par la fonction $\lambda(x, y)$.

On vérifie aisément qu'on a $\lambda(x, y) = x + \ldots$, les termes non écrits étant de degré supérieur au premier.

16. *Forme réduite de la transformation* (a'). — On a ainsi déterminé deux fonctions $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$ vérifiant le système d'équations fonctionnelles suivant :

$$\lambda(x_1, y_1) = S^\alpha \lambda(x, y) - k[\mu(x, y)]^\alpha,$$
$$\mu(x_1, y_1) = S\,\mu(x, y).$$

On peut prendre de nouvelles variables u, v liées à x, y par les relations

$$u = \lambda(x, y) = x + \ldots,$$
$$v = \mu(x, y) = y + \ldots,$$

car le déterminant fonctionnel $\dfrac{D(\lambda, \mu)}{D(x,y)}$ n'est pas nul pour $x = y = 0$. *La transformation* (a') *prendra alors la forme réduite suivante :*

$$(\mathrm{A}') \qquad \begin{cases} u_1 = S^\alpha u - k v^\alpha, \\ v_1 = S v, \end{cases}$$

en vertu des équations fonctionnelles vérifiées par $\lambda(x,y)$, $\mu(x,y)$.

On peut pousser la réduction plus loin. Posons en effet

$$v = \rho w,$$

ρ étant une constante. La transformation (A') devient

$$u_1 = S^\alpha u - k\rho^\alpha w^\alpha,$$
$$w_1 = S w.$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

1° *Si k n'est pas nul*, on peut déterminer ρ de façon que l'on ait

$$k\rho^\alpha = 1$$

et la transformation prend la forme

$$(A')_1 \qquad \begin{cases} u_1 = S^\alpha u - w^\alpha, \\ w_1 = S w. \end{cases}$$

2° *Si k est nul*, la transformation a la forme

$$(A')_2 \qquad \begin{cases} u_1 = S^\alpha u, \\ w_1 = S w \end{cases}$$

Ce dernier cas ne peut évidemment se présenter que pour des transformations (a') particulières.

Ainsi, *la transformation* (a') *peut être ramenée à la forme réduite* (A'), *dans laquelle k désigne une constante égale à* 1 *ou à* 0, *le cas général étant celui où k a la valeur* 1.

VI. — Autres cas.

17. En définitive, la réduction de la transformation

$$x_1 = a x + b y + F(x, y),$$
$$y_1 = a' x + b' y + \Phi(x, y),$$

aux formes réduites (A), (B), (C), (A') a été effectuée dans tous les cas où les racines S_1, S_2 de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - S & b \\ a' & b' - S \end{vmatrix} = 0$$

ont l'une et l'autre leurs modules compris entre 0 et 1.

Le cas où $|S_1|$, $|S_2|$ seraient tous les deux supérieurs à 1 se ramène au cas précédent en considérant la transformation inverse de la transformation proposée : pour cette transformation inverse, les racines de l'équation en S sont $\left|\frac{1}{S_1}\right|$, $\left|\frac{1}{S_2}\right|$ et par suite elles ont des modules compris entre o et 1. La transformation inverse peut donc être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$u = \frac{u_1}{S_1}, \qquad u = \frac{u_1}{S} - v_1, \qquad u = \frac{u_1}{S}, \qquad u = \frac{u_1}{S^\alpha} - kv_1^\alpha,$$
$$v = \frac{v_1}{S_2}, \qquad v = \frac{v_1}{S}, \qquad v = \frac{v_1}{S}, \qquad v = \frac{v_1}{S};$$

d'où l'on déduit que la transformation directe peut être ramenée à l'une des formes suivantes :

$$u_1 = S_1 u, \qquad u_1 = Su + S^2 v, \qquad u_1 = Su, \qquad u_1 = S^\alpha u + kS^{2\alpha} v^\alpha,$$
$$v_1 = S_2 v, \qquad v_1 = Sv, \qquad v_1 = Sv, \qquad v_1 = Sv.$$

En changeant v en $-\frac{v}{S^2}$ dans la deuxième, et par conséquent v_1 en $-\frac{v_1}{S^2}$, on la ramène à la forme (B). De même en changeant v en $\left(-\frac{1}{S^{2\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}} v$ dans la quatrième, on la ramène à la forme (A'). *Ainsi, les formes réduites* (A), (B), (C), (A') *sont encore valables pour le cas où* $|S_1|$, $|S_2|$ *sont tous les deux supérieurs à* 1.

Pour le cas où $|S_1|$ et $|S_2|$ sont l'un inférieur, l'autre supérieur à 1, la question reste en suspens : la méthode employée dans ce Mémoire ne peut s'appliquer à ce cas, car, à partir d'une certaine valeur de n, x_n, y_n ne sont plus compris dans le domaine $|x| < h$, $|y| < h$, à l'intérieur duquel la transformation proposée est définie et il en est de même pour la transformation inverse. C'est évidemment à la forme réduite (A) qu'il faudrait essayer de ramener la transformation si cela est possible, mais la possibilité d'obtenir cette forme réduite n'a pas été établie jusqu'ici.

Enfin, les cas où l'une au moins des racines S_1, S_2 est égale à o et à 1 restent aussi en suspens : mais pour ces cas de nouvelles formes réduites sont nécessaires. Le mode de croissance de x_n, y_n est en effet tout différent de ce qu'il était dans le cas général, et la marche suivie dans le cas général ne s'applique plus.

VII. — Applications.

On peut utiliser les formes réduites dans bien des problèmes relatifs aux transformations ponctuelles. Indiquons quelques-uns de ces problèmes.

18. *Courbes invariantes par la transformation.* — Étant donnés une transformation ponctuelle et un point double de cette transformation, on se propose de trouver la forme générale de l'équation des courbes invariantes par la transformation et définies dans le domaine du point double. J'ai traité ce problème, pour le cas (A), dans mon travail antérieur ([1]) cité plus haut.

Examinons ici les cas où la transformation prend la forme réduite

$$u_1 = S^\alpha u - v^\alpha,$$
$$v_1 = S v.$$

Ce cas comprend le cas (B), si l'on suppose $\alpha = 1$. Nous laissons de côté le cas (C) et le sous-cas $(A')_2$ de (A') pour lequel on aurait la forme réduite

$$u_1 = S^\alpha u, \qquad v_1 = S v.$$

Soit

$$u = \psi(v)$$

l'équation d'une courbe invariante par la transformation. On doit avoir

$$u_1 = \psi(v_1),$$

c'est-à-dire

$$\psi(S v) = S^\alpha \psi(v) - v^\alpha.$$

Il s'agit de trouver toutes les fonctions $\psi(v)$ vérifiant cette équation fonctionnelle. Posons

$$\psi(v) = v^\alpha \theta(v) - \frac{v^\alpha \log v}{S^\alpha \log S},$$

L'équation devient

$$S^\alpha v^\alpha \theta(S v) - \frac{S^\alpha v^\alpha(\log v + \log S)}{S^\alpha \log S} = S^\alpha v^\alpha \theta(v) - \frac{v^\alpha \log v}{\log S} - v^\alpha,$$

([1]) *Sur les équations fonctionnelles*, etc..., Chap. III, n° 27.

c'est-à-dire

$$\theta(Sv) = \theta(v).$$

Posons

$$\theta(v) = \theta_1(\log v).$$

On devra avoir

$$\theta_1(\log v + \log S) = \theta_1(\log v)$$

et l'on voit que θ_1 est une fonction arbitraire admettant la période $\log S$. *L'équation générale des courbes invariantes par la transformation donnée prend donc la forme, dans le système de coordonnées* u, v,

$$u = v^\alpha \theta_1(\log v) - \frac{v^\alpha \log v}{S^\alpha \log S}$$

où θ_1 *désigne une fonction arbitraire de période* $\log S$.

Revenons aux variables x, y. On a posé (n° 13)

$$u = \lambda(x, y) = x + \ldots,$$
$$v = \mu(x, y) = y + \ldots,$$

λ et μ étant deux fonctions holomorphes de x, y. On obtiendra les coordonnées x, y d'un point de la courbe invariante, exprimées en fonction du paramètre v, en résolvant par rapport à x et à y le système

$$\lambda(x, y) = v^\alpha \theta_1(\log v) - \frac{v^\alpha \log v}{S \log S},$$
$$\mu(x, y) = v.$$

La fonction θ_1 est une fonction arbitraire de période $\log S$; il faut la choisir de façon que $v^\alpha \theta_1(\log v)$ soit nul pour $v = 0$; en particulier on peut prendre pour θ_1 une constante A.

On a supposé que l'équation de la courbe invariante pouvait être mise sous la forme $u = \psi(v)$. On laisse ainsi de côté la courbe particulière $v = 0$ qui est bien invariante, puisque l'équation $v = 0$ entraîne $v_1 = 0$; en revenant aux variables x, y, on a ainsi la courbe $\mu(x, y) = 0$. C'est une courbe analytique invariante; c'est même la seule courbe analytique invariante, car pour toute autre courbe, x et y sont des fonctions holomorphes de v et de $v^\alpha \theta_1(\log v) - \frac{v^\alpha \log v}{S^\alpha \log S}$ et, à cause du terme $-\frac{v^\alpha \log v}{S^\alpha \log S}$ qui ne disparaît jamais, on voit qu'on ne peut pas avoir pour x et y des fonctions holomorphes d'un paramètre auxiliaire.

Examinons encore le cas où la transformation prend la forme réduite

$$u_1 = S^\alpha u, \qquad v_1 = S v.$$

Ce cas comprend le cas (C), obtenu en donnant à α la valeur 1. On trouve que *l'équation générale des courbes invariantes est ici*

$$u = v^\alpha \theta_1(\log v),$$

θ_1 *étant une fonction périodique arbitraire de période* $\log S$. La courbe $v = 0$ fait encore exception, elle n'est pas donnée par cette équation générale. Revenant aux variables x, y on voit que l'équation générale des courbes invariantes par la transformation est

$$\lambda(x, y) = [\mu(x, y)]^\alpha \theta_1[\log \mu(x, y)],$$

et il y a ici, outre la courbe analytique invariante $\mu(x, y) = 0$, une infinité d'autres courbes analytiques invariantes, représentées par l'équation

$$\lambda(x, y) = A[\mu(x, y)]^\alpha,$$

où A est une constante arbitraire. En particulier, quand α est égal à 1, toutes ces courbes invariantes ont à l'origine des tangentes distinctes.

Toutes ces propositions donnent comme cas limites des propositions connues relatives aux courbes intégrales d'une équation différentielle dans le domaine d'un point singulier. Il suffit d'employer la méthode que j'ai indiquée antérieurement pour le cas (A′) (1). En particulier le dernier cas que nous venons de signaler, où les courbes invariantes ont à l'origine des tangentes distinctes, donne à la limite le cas d'un point *dicritique* pour l'équation différentielle (2).

19. *Séries de Taylor à coefficients récurrents.* — J'ai utilisé les formes réduites des transformations ponctuelles dans l'étude des séries de Taylor dont un coefficient est lié à un certain nombre de coefficients précédents par une relation de récurrence.

---

(1) ***Sur les équations fonctionnelles***, **Chap. III, n° 28.**

(2) ***Voir*** **par exemple : l'article de M. Painlevé sur les équations différentielles dans *l'Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 3, n° 26.**

Soit la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \ldots + u_n x^n + \ldots.$$

Le cas où l'on a $u_{n+1} = f(u_n)$, f étant une fonction holomorphe donnée, a été étudié par M. Fatou (¹). J'ai étudié le cas où u_{n+p} est une fonction holomorphe connue de u_{n+p-1}, u_{n+p-2}, ..., u_{n+1}, u_n. Les résultats de cette étude ont été donnés sans démonstration (²) et je me propose de les développer dans un travail spécial consacré aux relations de récurrence et aux séries de Taylor qui s'y rattachent.

Je voudrais seulement montrer ici comment l'emploi des formes réduites des transformations ponctuelles permet d'étudier les relations de récurrence

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$$

dans le domaine d'un point double, c'est-à-dire d'un point u tel que

$$u = f(u, u).$$

En posant

$$u_{n+1} = v_n,$$
$$v_{n+1} = f(v_n, u_n),$$

on a un système équivalent à la relation de récurrence. Soit $f(v_n, u_n) = A v_n + B u_n + \ldots$, le développement de $f(v_n, u_n)$ dans le domaine du point double supposé à l'origine. La transformation ponctuelle

$$u_1 = v,$$
$$v_1 = Av + Bu + \ldots$$

admet pour équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} -S & 1 \\ A & B-S \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$S^2 - BS - A = 0.$$

Supposons qu'on soit dans l'un des cas indiqués aux nᵒˢ 1 et 2,

(¹) Fatou, *Sur une classe remarquable de séries de Taylor* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XXVII, 1910).

(²) *Sur les séries de Taylor à coefficients récurrents* (*Comptes rendus*, 30 mai 1910). Je complète ces résultats dans ma Note récente, *Sur les formes réduites des transformations ponctuelles* (*Comptes rendus*, 5 juin 1911).

par exemple dans le cas (A). On peut alors trouver deux fonctions holomorphes de u et de v

$$U = \lambda(u, v),$$
$$V = \mu(u, v),$$

telles que la transformation précédente prenne la forme réduite

$$U_1 = S_1 U,$$
$$V_1 = S_2 V.$$

Les anciennes variables u, v s'expriment par des fonctions holomorphes des nouvelles variables

$$u = \lambda_{-1}(U, V),$$
$$v = \mu_{-1}(U, V).$$

On en déduit

$$u_n = \lambda_{-1}(S_1^n U, S_2^n V) = \lambda_{-1}[S_1^n \lambda(u_0, u_1), S_2^n \mu(u_0, u_1)],$$

et l'on a ainsi une sorte d'expression *explicite* de u_n en fonction de n, dans laquelle λ, λ_{-1}, μ désignent des fonctions holomorphes connues de deux variables. C'est l'emploi d'une pareille expression pour u_n qui permet d'étudier facilement la série de Taylor proposée. On voit qu'une pareille expression donne la solution de l'équation aux différences

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)\cdot$$

sous une forme qui généralise la forme connue de la solution dans le cas d'une équation linéaire à coefficients constants. Cette forme est valable dans le domaine du point double u considéré. Mais je ne pousserai pas plus loin cette étude que je développerai plus complètement dans un travail spécial.