BULLETIN DE LA S. M. F.

E. BOREL

Les fonctions monogènes non analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 40 (1912), p. 205-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1912__40__205_1>

LES FONCTIONS MONOGÈNES NON ANALYTIQUES;

PAR M. ÉMILE BOREL.

I. — LE DOMAINE D'EXISTENCE.

Notre but étant de définir les fonctions monogènes dans des domaines plus généraux que ceux considérés jusqu'ici dans la théorie des fonctions analytiques, il est nécessaire d'étudier d'abord les propriétés de ces nouveaux domaines.

J'appellerai *domaine weierstrassien*, ou *domaine W*, un domaine dans lequel peut être définie une fonction analytique, au sens de Weierstrass. J'appellerai *domaines de Cauchy*, ou *domaines C*, en l'honneur du créateur de la théorie des fonctions monogènes, les domaines plus généraux que les domaines W, et dans lesquels peut être définie une fonction monogène uniforme. Nous verrons que les propriétés essentielles des fonctions monogènes dans les domaines C que nous définissons, sont les mêmes que dans les domaines W; ceci n'exclut pas la possibilité de définir des domaines C′ plus généraux encore que nos domaines C. En d'autres termes, nous ne pouvons pas affirmer que notre généralisation embrasse *toutes* les fonctions monogènes uniformes : mais elle nous conduit à définir une classe C de telles fonctions, classe plus générale que la classe W des fonctions analytiques de Weierstrass.

Je me bornerai à exposer la définition des domaines C dans un cas particulier; si l'on utilise un théorème que j'ai démontré sur les ensembles de mesure nulle, d'après lequel tout ensemble de mesure nulle peut être défini au moyen de points fondamentaux et de domaines d'exclusion, on reconnaît que le cas particulier exposé se généralise beaucoup.

Considérons un domaine W; ce sera, pour fixer les idées, un cercle de rayon 2 ($|z| < 2$) et considérons un domaine intérieur dans lequel sont définis des points fondamentaux en infinité énumérable, qui peuvent être denses partout; pour fixer les idées, nous admettrons que ces points fondamentaux a_n sont les points à coordonnées rationnelles intérieurs au cercle $|z| < 1$. Nous admettons qu'à chaque point a_n est attaché un nombre positif r_n, ces nombres r_n tendant très rapidement vers zéro lorsque n croît indéfiniment; nous préciserons plus loin ce mode de décroissance; pour l'instant, nous admettrons seulement que le reste de la série convergente $r_1 + r_2 + \ldots + r_n + \ldots$ est inférieur au quart du dernier terme conservé : nous appellerons domaine C_p le domaine obtenu en excluant du domaine W les points intérieurs aux cercles $S_{p,n}$ définis comme il suit. Considérons les cercles $S'_{p,n}$ ayant pour centres les points a_n et pour rayons respectifs $\frac{r_n}{2p}$; le cercle $S_{1,n}$ a pour centre a_1, et son rayon est le plus petit des nombres compris entre $\frac{r_1}{2^p}$ et $\frac{r_1}{2^{p+1}}$ et tel qu'il ne coupe (¹) aucun des cercles $S'_{p,n}$ $(p > 1)$; ces divers cercles sont donc ou intérieurs à $S_{1,n}$ (en y comprenant ceux qui sont tangents intérieurement), ou extérieurs à $S_{1,n}$ (en y comprenant ceux qui sont tangents extérieurement). Nous ne tiendrons plus compte des cercles intérieurs, et nous désignerons par a_{k_2} le point fondamental de plus petit indice correspondant aux cercles extérieurs; le cercle $S_{2,n}$ aura pour centre a_{k_2} et son rayon sera le plus petit des nombres compris entre $\frac{r_{k_2}}{2^p}$ et $\frac{r_{k_2}}{2^{p+1}}$ tel qu'il ne coupe aucun des cercles $S'_{p,n}$ $(p > k_2)$; il ne coupe pas non plus le cercle $S_{1,n}$ et ne lui est même pas tangent

---

(¹) Ceci est possible en vertu de l'hypothèse $r_1 > 4 \sum_2^\infty r_k$, qui entraîne :

$$\frac{r_1}{2^p} - \frac{r_1}{2^{p+1}} > 2 \sum_2^\infty \frac{r_k}{2^p}.$$

extérieurement, puisque son rayon est certainement inférieur au rayon $\frac{r_{k_2}}{2^p}$ du cercle $S'_{k_2,n}$, et de même il est extérieur aux cercles $S'_{p,n}$ d'indice p inférieur à k_2, car ces cercles, d'après la manière dont a_{k_2} a été choisi, sont intérieurs à $S_{1,n}$. On définira de même le cercle $S_{3,n}$, etc., et l'on voit que, si l'on désigne par C'_p le domaine obtenu en excluant les points intérieurs aux cercles $S'_{p,n}$, et par C_p le domaine obtenu en excluant les points intérieurs aux cercles $S_{p,n}$, tous les points de C'_p appartiennent à C_p, tandis que tous les points de C_p appartiennent à C'_{p+1}; la considération des domaines C_p est donc équivalente à celle des domaines C'_p et évite les difficultés qui proviendraient des intersections des cercles.

Les points des circonférences $S_{p,n}$ sont dits constituer la frontière de C_p; les points de C_p qui n'appartiennent pas à cette frontière sont dits *intérieurs* à C_p; il importe d'observer que nous prenons ici le mot *intérieur* dans un sens différent du sens usuel dans la théorie des domaines W : il n'existe pas en général de cercle ayant son centre en un point intérieur et dont tous les points soient intérieurs. Les points de l'ensemble C_p, situés à l'intérieur du cercle de rayon 1 forment un ensemble parfait, qui peut être considéré comme l'ensemble dérivé de l'ensemble de ses points frontières $S_{p,n}$. Le domaine C est par définition l'ensemble de tous les points tel que chacun d'eux soit intérieur à un C_p; comme les points de C_p (y compris la frontière) sont évidemment intérieurs à C_{p+1}, il serait indifférent dans cette définition de C de considérer les points de la frontière de C_p aussi bien que les points intérieurs; mais il nous sera plus commode de n'avoir à considérer que les points intérieurs. Le domaine C n'est pas parfait, puisqu'il ne contient pas les points a_n, qui en sont des points limites. Il est aisé de voir que l'ensemble (de mesure nulle) des points qui n'appartiennent pas à C, a la puissance du continu. Nous dirons qu'un domaine T est *intérieur* [1] à C, lorsque tous les points de T appartiennent à un même C_p, d'indice fixe. Parmi les domaines intérieurs à C, nous considérerons à peu près exclusivement les domaines C_p : tous les points de C_p sont intérieurs à C_{p+1}.

---

[1] Rappelons encore une fois que le mot *intérieur* a ici un sens différent de celui qu'on lui donne habituellement, et en particulier dans la théorie des domaines W.

Le domaine C sera dit appartenir à la classe (C) des domaines de Cauchy que nous étudions ici si les nombres r_n sont tels qu'on a [1]

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{n}{\log\log\log\frac{1}{r_n}} = 0,$$

Il est clair que si cette condition est vérifiée pour deux domaines C et D, elle est vérifiée pour la partie commune à C et D.

En même temps que les domaines C_p et C, nous considérerons, comme moyen auxiliaire de démonstration, des domaines que nous appellerons *domaines réduits* et que nous désignerons par Γ_p et Γ. A un domaine C correspond un système bien déterminé de domaines C_p, et une infinité de systèmes de domaines réduits; voici la définition d'un de ces systèmes. Donnons-nous des nombres ρ_n, tendant rapidement vers zéro lorsque n augmente indéfiniment, mais beaucoup moins rapidement que les r_n; plus précisément, nous supposerons que l'on a

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho_n^2} < \log\log\frac{1}{r_n}$$

et, en même temps, quel que soit le nombre fixe α

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} n^\alpha \rho_n = 0,$$

ces deux conditions (2) et (3) sont bien compatibles en vertu de (1) [2].

Les domaines Γ_p sont définis au moyen des ρ_n comme les C_p au moyen des r_n, c'est-à-dire sont limités par des cercles de rayons compris entre $\frac{\rho_n}{2^p}$ et $\frac{\rho_n}{2^{p+1}}$, extérieurs les uns aux autres. Le domaine Γ

---

(1) On constatera aisément que la plupart des raisonnements et des résultats que nous allons obtenir s'étendraient sans difficulté au cas où les cercles d'exclusion $S_{p,n}$ auraient des rayons exprimés par la formule $r'_n + \frac{r_n}{2^p}$, les r'_n étant indépendants de p, mais tendant vers zéro plus rapidement que les r_n lorsque n augmente indéfiniment, de sorte que pour toute valeur fixe de p, le terme r'_n est asymptotiquement négligeable. Dans ce cas, le domaine exclu à l'infini *n'est pas* de mesure nulle, mais de mesure $\pi\Sigma r'^2_n$. Je développerai ultérieurement l'étude de ce cas.

(2) Depuis que ceci a été écrit, j'ai pu remplacer (1), (2), (3) par des conditions plus larges. Voir *Comptes rendus*, mai et juin 1912, où j'indique aussi d'autres modes d'exposition de la théorie, préférables lorsqu'on veut l'étendre au cas des fonctions multiformes.

est formé par l'ensemble des points *intérieurs* (au sens indiqué plus haut) à quelque Γ_p. Les domaines Γ_p sont parfaits, Γ n'est pas parfait; l'ensemble complémentaire de Γ est de mesure nulle et a la puissance du continu.

Il est manifeste que l'ensemble C comprend tous les points de Γ, puisque C_p comprend tous les points de Γ_p; mais C comprend en outre bien des points qui n'appartiennent pas à Γ.

L'utilité principale de la considération de Γ résulte de la proposition suivante :

Si une fonction des deux variables x, y coordonnées d'un point M *est définie pour tous les points de* C *et continue sur tout domaine* C_p, *la connaissance de ses valeurs en tous les points de* Γ *entraîne la connaissance de ses valeurs en tous les points de* C.

D'une manière abrégée, deux fonctions continues dans C (c'est-à-dire définies dans tout C et continues dans tout domaine *intérieur* à C) ne peuvent pas coïncider dans tout Γ sans coïncider dans tout C; ou, enfin, *une fonction continue dans* C *et nulle dans* Γ *est nulle dans* C.

Soit, en effet, A un point de C; ce point appartient à un ensemble C_p intérieur à C; c'est un point limite de l'ensemble formé par la frontière [1] de C_p; il suffit pour prouver que la fonction est nulle en A, puisqu'elle est continue sur C_p, de démontrer qu'elle est nulle sur chacune des circonférences qui constituent cette frontière (on a déjà fait remarquer que chacune de ces circonférences est *intérieure* à C_{p+1}); or, sur l'une de ces circonférences (comme sur toute courbe rectifiable tracée dans le plan), les points qui font partie de Γ sont denses partout; la fonction continue sur cette courbe est donc nulle partout sur cette courbe si elle est nulle en tous les points de Γ.

Lorsque nous parlerons d'un domaine réduit, nous admettrons qu'il s'agit d'un domaine bien déterminé, les ρ_n étant choisis d'une manière précise, satisfaisant aux inégalités (2) et (3). Il pourra

[1] Nous négligeons les points A qui seraient intérieurs à C au sens de Weierstrass; pour eux la proposition est évidente, puisqu'ils sont centres de cercles ne renfermant à leur intérieur aucun a_n, ils sont aussi intérieurs à Γ au sens de Weierstrass.

arriver que nous ayons à considérer simultanément un autre domaine Γ' défini par des nombres ρ'_n; si l'on a

$$(4) \qquad \rho'_n = \rho_n^{\frac{1}{\beta}},$$

nous dirons que Γ' est d'ordre β par rapport à Γ; si le nombre β est supérieur à l'unité, il est clair que les nombres ρ'_n vérifient les inégalités (2) et (3) du moment que les ρ_n les vérifient; en ce cas, l'ensemble Γ'_p est intérieur à Γ_p, car les cercles exclus de rayons $\frac{\rho'_n}{2^p}$ sont plus grands que les cercles de rayons $\frac{\rho_n}{2^p}$ (puisqu'on peut évidemment toujours supposer $\rho_n < 1$).

Remarquons enfin que les points de C_p situés sur une courbe quelconque, sur une droite pour fixer les idées, y forment un ensemble parfait, défini par des intervalles contigus (au sens de M. Baire), cordes interceptées par les cercles sur la droite. Cet ensemble peut ou non comprendre des intervalles; mais, en tout cas, il est parfait, et par suite une fonction continue sur C_p et nulle en tous les points qui limitent les intervalles contigus est nulle en tous les points de l'ensemble ainsi que toutes ses dérivées sur C_p.

II. — La fonction monogène.

Nous dirons qu'une fonction $f(z)$ est monogène dans un domaine tel que C si :

1° Elle est continue *dans* C (c'est-à-dire, comme nous l'avons expliqué, continue sur tout C_p, *intérieur* à C; l'ensemble C_p étant parfait, la continuité sur C_p est uniforme);

2° Elle admet en tout point M de C, par rapport à $z = x + iy$, une dérivée unique et continue (pour définir la dérivée, on considérera un des ensembles C_p dont fait partie M et, désignant par M' un autre point quelconque de C_p, on cherchera la limite du rapport

$$(5) \qquad \frac{f(\mathrm{M}') - f(\mathrm{M})}{\overline{\mathrm{MM}'}},$$

lorsque le vecteur $\overline{\mathrm{MM}'} = z' - z$ tend vers zéro; si cette limite existe pour toute valeur de p, elle est évidemment indépendante de cette valeur de p, puisque tous les points de C_p appartiennent à C_{p+q} ; c'est pour cela que cette limite s'appellera la dérivée de $f(z)$ *dans* C, c'est-à-dire sur tout domaine *intérieur* à C. La continuité de la dérivée *dans* C s'entend comme la continuité de la fonction *dans* C : continuité sur tout C_p *intérieur* à C. Cette hypothèse de la continuité de la dérivée est sans doute superflue ; mais elle simplifie l'exposition.

L'ensemble C_p étant parfait, toute fonction continue sur C_p est *bornée* sur C_p.

Nous allons démontrer la propriété fondamentale suivante de la fonction $f(z)$:

$$\int_K f(z)\,dz = \sum_n \int_{S_{p,n}} f(z)\,dz, \tag{6}$$

la courbe K étant une courbe simple quelconque dont tous les points sont intérieurs à C_p, la somme $\sum\limits_n$ se rapportant à tous les cercles $S_{p,n}$ qui sont à l'intérieur de K ; les intégrales sont toutes prises dans le sens direct.

Nous poserons

$$f(z) = P(x,y) + iQ(x,y), \tag{7}$$

de sorte que l'égalité (6) revient à deux égalités dont il suffit de démontrer l'une, par exemple

$$\int_K P\,dx - Q\,dy = \sum_n \int_{S_{p,n}} P\,dx - Q\,dy. \tag{8}$$

Pour démontrer cette relation, nous allons définir une fonction $P_1(x, y)$, finie et bien déterminée en tous les points intérieurs à K, et coïncidant avec $P(x,y)$ aux points intérieurs à K qui appartiennent à C_p ; il reste donc à définir $P_1(x,y)$ à l'intérieur des cercles $S_{p,n}$; sur la circonférence de ces cercles, elle coïncide avec $P(x,y)$. Nous définirons P_1 à l'intérieur du cercle par la condition que sur les cordes du cercle parallèles à Oy elle varie linéairement (sa valeur aux extrémités étant connue, puisqu'elle y coïncide avec P). La fonction P_1 ainsi définie est continue à l'intérieur de K et y admet en tout point une dérivée $\frac{\partial P_1}{\partial y}$; cette dérivée est bornée d'après l'hypothèse que les dérivées de P sont bornées [ce qui résulte de l'existence et de la continuité des dérivées de $f(z)$]; en effet, aux points intérieurs à C_p la dérivée de P_1 coïncide avec la dérivée de P; aux points intérieurs à $S_{p,n}$ la dérivée de P_1 est constante sur une corde parallèle à Oy et égale au quotient de la différence des valeurs de P_1 (c'est-à-dire de P) aux extrémités de la corde, par la longueur de cette corde. La différence des valeurs de P est, si l'on désigne par AB l'arc soustendu par la corde

$$\int_{AB} \frac{\partial P}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P}{\partial y}\,dy. \tag{9}$$

Cette intégrale est inférieure au produit par la longueur de l'arc AB par la somme $\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$ et son quotient par la corde AB est au plus égal à

$$\frac{\pi}{2}\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right| + \frac{\pi}{2}\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|,$$

et est par suite borné en même temps que les dérivées $\left|\frac{\partial P}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial P}{\partial y}\right|$. De même, les valeurs de P_1 étant comprises entre les valeurs de P, $|P_1|$ admet la même borne que $|P|$ [1].

On a, d'après un résultat classique, en désignant par (K) l'aire intérieure à K

$$\iint_{(K)} \frac{\partial P_1}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_K P_1\,dx = -\int_K P\,dx,$$

puisque sur K, P_1 coïncide avec P.

De même, $Q_1(x,y)$ étant défini au moyen de $Q(x,y)$ de la même manière que P_1 au moyen de P (en prenant toutefois des parallèles à Ox au lieu de parallèles à Oy):

$$\iint_{(K)} \frac{\partial Q_1}{\partial x}\,dx\,dy = \int_K Q_1\,dy = \int_K Q\,dy.$$

Il en résulte

$$\int_K P\,dx - Q\,dy = -\iint_{(K)} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) dx\,dy. \tag{10}$$

---

[1] La dérivée $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ est discontinue aux points des circonférences; ceci n'a pas d'inconvénient pour les démonstrations; on peut éviter cette difficulté, si l'on veut, en modifiant la définition de P_1 (c'est-à dire en raccordant par des courbes convenablement choisies au lieu de raccorder par des droites). On a des résultats assez simples en prenant la somme d'une parabole et d'une sinusoïde.

L'intégrale double du second membre se réduit à zéro pour les portions de l'aire (K) qui appartiennent à C_p, puisqu'en un point intérieur à C_p, on a [1]

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

La formule (10) se réduit donc à

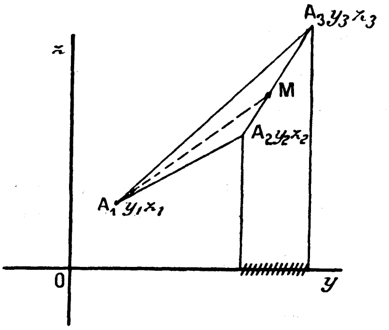
$$(11) \qquad \int_K P\,dx - Q\,dy = -\sum \iint_{(S_{p,n})} \left(\frac{\partial P_1}{\partial y} + \frac{\partial Q_1}{\partial x}\right) dx\,dy.$$

Mais l'aire de $S_{p,n}$ est égale à $\frac{\pi r_n^2}{4^p}$; d'autre part, les modules de $\frac{\partial P_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial Q_1}{\partial x}$ sont inférieurs à un nombre fixe indépendant de n (dépendant de p, mais p est fixe) ; on a donc

$$(12) \qquad \left|\int_K P\,dx - Q\,dy\right| < M \Sigma r_n^2.$$

[1] Une explication complémentaire est peut-être ici nécessaire; à l'intérieur de C_p, P_1 coïncide avec P, mais P_1 est défini en des points où P n'est pas défini; peut-on dès lors conclure de l'existence de la dérivée de P, $\frac{\partial P}{\partial y}$, à l'existence de la dérivée de P_1, et au fait que cette dérivée est égale à celle de P.

Si l'on considère la représentation géométrique de $P(x, y)$ pour $x = x_0$ fixe et y variable, soit $z = P(x_0, y)$, et que l'on désigne par A_2 et A_3 les points $(y_2\ z_2)$



(y_3, z_3) qui correspondent à un intervalle contigu à C_p, $y_2\,y_3$, on remplace z dans cet intervalle par une droite A_2, A_3; la pente de la droite A_1 M qui joint le point y_1, z_1 correspondant à un point y_1, de C_p à un point quelconque M de cette droite, A_2A_3 est comprise entre les pentes A_1A_2 et A_1A_3 des droites qui joignent A_1 aux extrémités A_2 et A_3; par hypothèse les pentes de A_1A_2 et A_1A_3 tendent vers $\frac{\partial P}{\partial y}$ lorsque A_2 et A_3 tendent vers A_1; il en est de même de A_1 M, c'est-à-dire que $\frac{\partial P}{\partial y}$ existe et est égal à $\frac{\partial P}{\partial y}$.

Il est aisé de tirer de là la formule (6) ; la série $\sum r_n^2$ étant, en effet, convergente, nous pouvons choisir n de manière que le reste de cette série $\sum_{n+1}^{\infty} r_n^2$ soit inférieur à $\frac{\varepsilon}{M}$. Le nombre n étant ainsi choisi, désignons par K′ le contour formé par le contour K parcouru dans le sens direct et les circonférences $S_{p,1}$, $S_{p,2}$, ..., $S_{p,n}$ parcourues dans le sens rétrograde ; nous pourrons raisonner sur K′ comme nous avons fait sur K (en le complétant, si nous voulons, par des coupures rectilignes pour en faire un contour simple) ; nous obtiendrons ainsi

$$\left| \int_{K'} P\,dx - Q\,dy \right| < M \sum_{n+1}^{\infty} r_n^2 < \varepsilon,$$

c'est-à-dire, les intégrales étant prises dans le sens direct,

$$\left| \int_{K} P\,dx - Q\,dy - \sum_{1}^{n} \int_{S_{p,n}} P\,dx - Q\,dy \right| < \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers zéro, n croît indéfiniment, et l'on obtient bien la relation (8), d'où l'on conclut de suite la relation (6).

Nous allons, au moyen de (6), obtenir une expression analytique de $f(z)$ valable à l'intérieur du domaine réduit Γ_p. Soit x un point intérieur à Γ_p et σ_q un cercle [1] de centre x, intérieur à C_p et dont le rayon soit compris entre $\frac{1}{2^q}$ et $\frac{1}{2^{q+1}}$.

---

[1] Il existe bien un tel cercle, quel que soit le nombre q (au moins à partir d'une certaine valeur de q). En effet, x étant intérieur à Γ_p, on a quel que soit n

$$|x - a_n| > \frac{1}{2^p} \rho_n.$$

Par suite, les points a_n tels que l'on ait

$$|x - a_n| < \frac{1}{2^{q-1}},$$

sont tels que l'on a

(13) $$\frac{1}{2^p} \rho_n < \frac{1}{2^{q-1}}.$$

Désignons par n_q la plus petite des valeurs de n à partir de laquelle cette inégalité (13) est vérifiée ; tous les a_n intérieurs au cercle de centre x et de rayon $\frac{1}{2^{q-1}}$ ont des indices supérieurs ou égaux à n_q ; la somme $\frac{1}{2^p} \sum r_n$ des rayons des cercles

Considérons la fonction

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - x}$$

dans le domaine compris entre le contour K et σ_q; il est clair que dans ce domaine cette fonction est monogène; nous obtenons donc la relation

$$\int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \int_{\sigma_q} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \sum{}' \int_{S_{p,n}} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

la somme du second membre se rapportant aux $S_{p,n}$ qui sont compris entre K et σ_q.

Si l'on désigne par M le maximum de $|f(z)|$ dans C_p, le maximum de $|\varphi(z)|$ sur ces divers $S_{p,n}$ est évidemment 2^{q+1} M; si l'on remplace q par $q+1$, il s'introduit dans le second membre une infinité de nouveaux termes, mais il est aisé de voir que les longueurs des chemins d'intégration (circonférences $S_{p,n}$ comprises entre σ_q et σ_{q+1}) ont une somme dont l'ordre de grandeur est de beaucoup inférieur à $\frac{1}{2^{q+1}}$; le second membre est donc une série convergente et l'on a

$$\lim_{q=\infty} \int_{\sigma_q} \frac{f(z)\,dz}{z-x} = \int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum \int_{S_{p,n}} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

le signe Σ se rapportant maintenant à toutes les circonférences $S_{p,n}$ qui limitent C_p. Quant au premier membre, il résulte de la continuité de $f(z)$ au point x dans C_p, tous les σ_q étant intérieurs à C_p, qu'il est égal à $2\pi i\, f(x)$. On obtient donc la formule de Cauchy généralisée

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)\,dz}{z-x} - \sum_n \frac{1}{2\pi i} \int_{S_{p,n}} \frac{f(z)\,dz}{z-x}. \tag{14}$$

---

correspondants dans C_p est donc extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^p}\rho_{n_q}$ puisque les r_n sont beaucoup plus petits que les ρ_n correspondants; cette somme étant extrêmement petite par rapport à $\frac{1}{2^{q-1}}$, il existe des cercles de centre x et de rayon compris entre $\frac{1}{2^q}$ et $\frac{1}{2^{q+1}}$ et qui ne coupent aucun de ces cercles $S_{p,n}$; ils ne coupent pas *a fortiori* les cercles $S_{p,n}$ dont les centres sont plus éloignés de x, car les rayons $\frac{r_n}{2^p}$ de ces autres cercles sont très petits par rapport aux $\frac{\rho_n}{2^p}$ et leurs centres sont plus distants de x que $\frac{\rho_n}{2^p}$.

On déduit de cette formule les conséquences classiques, et en particulier le fait que la *monogénéité* (*existence de la dérivée première*) *dans le domaine* C *entraîne l'existence des dérivées de tous les ordres.*

III. — Le prolongement par les séries (M).

Nous allons maintenant supposer que le point x est intérieur à un domaine réduit Γ'_p, d'ordre égal à 2 par rapport à Γ_p (les cercles d'exclusion sont définis au moyen de nombres ρ'_n qui sont égaux à $\sqrt{\rho_n}$); il est alors évident que l'on peut tracer une infinité de droites issues du point x et intérieures à Γ_p. Plus précisément, si x appartient à Γ'_p, à l'intérieur de tout angle donné ayant son sommet en x, on peut trouver une droite intérieure à un $\Gamma_{p'}$ d'indice convenable, cet indice p' pouvant croître indéfiniment lorsque l'angle tend vers zéro, mais étant déterminé lorsque l'angle est donné : cela résulte de ce que la somme des angles sous lesquels on voit du point x les cercles qui limitent $\Gamma_{p'}$ est inférieure au double de la somme de la série convergente $\sum\left(\frac{\rho_n}{2^{p'}} : \frac{\rho'_n}{2^p}\right)$ et est par suite aussi petite qu'on veut si p' est pris assez grand. Nous supposerons, pour ne pas compliquer les notations, que p a été pris dans ce qui précède égal à p' (le point x intérieur à Γ'_p est intérieur *a fortiori* à $\Gamma'_{p'}$ si $p' > p$).

Nous allons développer $f(x)$ en série sur une des droites que nous venons de définir, droite intérieure à Γ_p. Chacun des termes du second membre de (14) est une fonction analytique sur cette droite et peut, par suite, être développé en une série de polynomes de Mittag-Leffler ou (M); il suffit de montrer que la série multiple formée par l'ensemble de ces séries est absolument convergente pour être assuré qu'elle représente $f(x)$.

Cette série sera alors formée au moyen des dérivées de $f(x)$ au point x_0, dérivées qui existent, comme nous l'avons remarqué, d'après (14) pour tout déplacement sur la droite, et pour tout déplacement dans Γ_p, de la même manière que le développement (M) d'une fonction analytique est formé au moyen des dérivées de cette fonction ; nous allons supposer, pour abréger l'écriture $x_0 = 0$.

Je rappelle les propriétés des développements (M) que j'ai démontrées dans mon Mémoire sur les séries de polynomes et de fractions rationnelles (*Acta mathematica*, t. XXIV). On a

$$\frac{1}{1-z} = \Sigma\, G_n(z), \tag{15}$$

les $G_n(z)$ étant des polynomes qu'il est inutile de récrire et la série

$$\Sigma\,|G_n(z)|$$

étant convergente dans toute l'étoile. On considère le domaine $S(R, \rho)$ défini comme il suit : R étant > 1 et $\rho < 1$ on considère le cercle de centre O et de rayon R, le cercle de centre 1 et de rayon ρ et les tangentes à ce dernier cercle issues de O, tangentes dont les points de contact sont A' et B'; le domaine $S(R, \rho)$ est limité par l'arc $A'B'$ plus petit que π, les prolongements $A'A''$ et $B'B''$ de OA' et OB' jusqu'à la circonférence de rayon R et l'arc $A''B''$ plus grand que π. On a, dans ce domaine, en posant $\frac{32R}{\rho} = \lambda$,

$$\Sigma\,|G_n(z)| < R^{\lambda^\lambda}. \tag{16}$$

Considérons une intégrale le long d'une des circonférences $S_{p,n}$, de rayon $\frac{r_n}{2^p}$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{S_{p,n}} \frac{f(z)\,dz}{z-x}, \tag{17}$$

nous la développons sur une droite intérieure à Γ_p, c'est-à-dire extérieure à la circonférence de même centre a_n que $S_{p,n}$ et de rayon $\frac{\rho_n}{2^p}$. Le rayon $\frac{r_n}{2^p}$ étant très petit par rapport à ρ_n, nous ne commettrons pas d'erreur sensible en remplaçant cette intégrale par la fonction majorante $\frac{M r_n}{a_n - x}$, en désignant par M le maximum de $|f(z)|$ dans C_p, $2\pi r_n$ étant la longueur du chemin d'intégration (nous supprimons les facteurs 2^p, qui sont sans influence, p étant fixe). Si l'on pose $x = a_n x'$, on a :

$$\frac{M r_n}{a_n - x} = \frac{M r_n}{a_n}\,\frac{1}{1-x'}. \tag{18}$$

Si le point x est intérieur à un domaine $S(R, \rho)$ défini par le cercle de rayon $\frac{\rho_n}{2^p}$, de centre a_n, et le cercle de rayon 2 qui comprend à son intérieur tous les domaines que nous considérons, le point $x' = \frac{x}{a_n}$ sera intérieur à un domaine S $\left(\frac{2}{|a_n|}, \frac{\rho_n}{|a_n|}\right)$ et l'on aura, pour le développement de $\frac{1}{1-x'}$, l'inégalité

$$\Sigma' |G_n(x')| < \left[\frac{2}{|a_n|}\right]^{\lambda^\lambda},$$

en posant $\lambda = \frac{64}{\rho_n}$; comme $|a_n|$ est supérieur à ρ_n, on peut écrire :

$$\Sigma |G_n(x')| < \lambda^{\lambda^\lambda}.$$

Le développement de (M) de (17) est, d'après (18), lorsqu'on remplace tous les termes par leurs modules, inférieur à

$$\frac{M r_n}{|a_n|} \lambda^{\lambda^\lambda}.$$

Mais l'on a d'après (2)

$$\frac{1}{r_n} > e^{e^{\frac{1}{\rho_n^2}}}$$

et si n est assez grand $\frac{1}{\rho_n^2} > \lambda^{\frac{3}{2}}$ puisque $\lambda = \frac{64}{\rho_n}$; on a donc, $|a_n|$ étant $> \rho_n$,

$$\frac{M r_n}{|a_n|} \lambda^{\lambda^\lambda} < \lambda M \lambda^{\lambda^\lambda} e^{-e^{\lambda^{\frac{3}{2}}}}$$

et ceci converge très rapidement vers zéro lorsque n et par suite λ augmentent indéfiniment. La convergence absolue de la série (M) est donc démontrée.

Considérons maintenant deux points x_1 et x_2 appartenant à Γ'; nous pouvons construire deux angles A_1 et A_2 de sommets x_1 et x_2 et tels que toute demi-droite D_1 intérieure à A_1 rencontre toute demi-droite D_2 intérieure à A_2 en un point x_3 intérieur au domaine total considéré. Nous pouvons choisir D_1 et D_2 de telle manière que ces deux droites appartiennent toutes deux à un même Γ_p (p étant choisi assez grand, mais pouvant ensuite rester fixe). Il sera donc possible d'arriver à calculer la fonction en x_2 au moyen de ses valeurs et des valeurs de ses dérivées en x_1 en formant seulement deux développements (M), l'un d'origine x_1 et le second d'origine x_3. Si la fonction est nulle en x_1 ainsi que toutes ses dérivées, ces développements (M) sont identiquement nuls et la fonction est nulle en x_2. Il suffit de se rapporter à ce que nous avons dit plus haut pour conclure que si une fonction monogène est nulle en tous les points d'un arc si petit qu'il soit (en tous les points de cet arc intérieurs à C), comme il existe sur cet arc au moins un point intérieur à Γ_p limite de points intérieurs à Γ_p, la fonction étant nulle en tous ces points est nulle, ainsi que ses dérivées, en au moins un point de Γ_p, par suite identiquement nulle dans Γ_p (quel que soit p), et identiquement nulle dans C. Nos nouvelles fonctions monogènes possèdent donc bien la propriété fondamentale des fonctions analytiques.