BULLETIN DE LA S. M. F.

H. GALBRUN

Sur un développement d'une fonction à variable réelle en séries de polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 24-47
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__24_1>

SUR UN DÉVELOPPEMENT D'UNE FONCTION A VARIABLE RÉELLE EN SÉRIES DE POLYNOMES;

PAR M. H. GALBRUN.

Les dérivées successives par rapport à x de la fonction e^{-x^2} se présentent comme un produit de deux facteurs dont l'un est la fonction primitive et l'autre un polynome; la dérivée $n^{\text{ième}}$ est ainsi de la forme

$$\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = e^{-x^2} \mathrm{P}_n(x),$$

$\mathrm{P}_n(x)$ étant un polynome de degré n, ne contenant que des termes de même parité que n; ces polynomes satisfont à la relation de récurrence

$$(1) \qquad \mathrm{P}_n(x) + 2x\mathrm{P}_{n-1}(x) + 2(n-1)\mathrm{P}_{n-2}(x) = 0$$

qui permet d'établir facilement leur expresion générale; pour n pair on a

$$(2) \quad \mathrm{P}_{2p}(x) = (2x)^{2p} - \frac{2p(2p-1)}{1}(2x)^{2p-2} + \ldots \\ + (-1)^q \frac{2p(2p-1)\ldots(2p-2q+1)}{q!}(2x)^{2p-2q} + \ldots + (-1)^p \frac{(2p)!}{p!}$$

---

chungen (*Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1244-1262).

(1) P. MONTEL, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Comptes rendus*, 18 novembre 1912, p. 1000-1003).

et pour n impair

$$(2') \quad P_{2p+1}(x) = -\Big[(2x)^{2p+1} - \frac{(2p+1)2p}{1}(2x)^{2p-1} + \dots$$
$$+ (-1)^q \frac{(2p+1)2p\dots(2p-2q+2)}{q!}(2x)^{2p-2q+1} + \dots$$
$$+ (-1)\frac{(2p+1)!}{p!}2x\Big].$$

On sait d'autre part que l'on a

$$(3) \qquad \sqrt{\pi}\, e^{-x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \cos\alpha x \, d\alpha.$$

En dérivant les deux membres de cette égalité par rapport à x, on trouve

$$(4) \qquad \sqrt{\pi}\, e^{-x^2} P_{2p}(x) = (-1)^p \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^{2p} \cos\alpha x \, d\alpha,$$

$$(4') \qquad \sqrt{\pi}\, e^{-x^2} P_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^{2p+1} \sin\alpha x \, d\alpha.$$

Ces deux égalités permettent d'obtenir une limite supérieure du module des polynomes $P_n(x)$ quand x est réel; dans ce cas, il est clair qu'on a

$$|\sqrt{\pi}\, e^{-x} P_n(x)| < \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^n \, d\alpha.$$

Or, si dans l'intégrale

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x \, dt,$$

définissant la fonction eulérienne de seconde espèce, on fait le changement de variable

$$t = \frac{\alpha^2}{4},$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{4}} \alpha^x \, d\alpha = 2^n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\frac{n-1}{2}} \, dt = 2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right).$$

On a donc finalement

$$(5) \qquad |P_n(x)| < 2^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Pour faciliter les écritures nous serons amenés à poser

$$(6)\qquad \begin{cases} P_{2p}(x) = (-1)^p \, 2^{2p} \, \Gamma\left(\dfrac{2p+1}{2}\right) U_{2p}(x), \\ P_{2p+1}(x) = (-1)^{p+1} 2^{2p+1} \Gamma\left(\dfrac{2p+2}{2}\right) U_{2p+1}(x). \end{cases}$$

L'inégalité (5) devient alors

$$(5')\qquad |U_n(x)| < \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

En nous appuyant sur la formule de récurrence (1) et sur l'inégalité (5), nous nous proposons d'établir que toute fonction $f(x)$ de la variable réelle x, continue dans un intervalle (a, b), et n'admettant dans cet intervalle qu'un nombre fini de maxima et de minima peut y être représentée par une série de la forme

$$a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \ldots + a_n P_n(x) + \ldots$$

dans laquelle a_0, a_1, ..., a_n sont des coefficients constants. La démonstration est semblable à celle qu'on emploie pour établir les propriétés des séries de Fourier et s'appuie sur une formule d'addition analogue à celle des sommes de cosinus et de sinus dont l'argument varie en progression arithmétique.

I.

Considérons la somme

$$(7)\quad S_{2q}(x, \alpha) = P_0(x)P_0(\alpha) + \frac{P_1(x)P_1(\alpha)}{2.1!} + \frac{P_2(x)P_2(\alpha)}{2^2.2!} + \ldots + \frac{P_{2q}(x)P_{2q}(\alpha)}{2^{2q}.2q!},$$

où par définition

$$P_0(x) = 1.$$

Quand dans le second membre de (7) on remplace les polynomes P_n par leur valeur en fonction des polynomes U_n déduite des égalités (6), il vient

$$S_{2q}(x, \alpha) = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 U_0(x)U_0(\alpha) + \frac{2\left[\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\right]^2}{1!} U_1(x)U_1(\alpha) + \ldots \\ + \frac{2^{2q}\left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)\right]^2}{2q!} U_{2q}(x)U_{2q}(\alpha).$$

Or, la somme $S_{2q}(x, \alpha)$ peut être divisée en deux parties : la première

$$A_{2q} = \sum_{p=0}^{p=q} \frac{2^{2p}\left[\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]^2}{2p!} U_{2p}(x) U_{2p}(\alpha)$$

est la somme des termes d'indice pair; la seconde

$$B_{2q-1} = \sum_{p=0}^{p=q-1} \frac{2^{2p+1}\left[\Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right)\right]^2}{(2p+1)!} U_{2p+1}(x) U_{2p+1}(\alpha)$$

est la somme des termes d'indice impair.

D'autre part, la relation de récurrence (1) peut s'écrire

$$x U_{2p}(x) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)} [U_{2p+1}(x) - U_{2p-1}(x)]$$

ou

$$2^{2p} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]^2}{2p!} x U_{2p}(x) = \frac{2^{2p} p!\, \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{2p!} [U_{2p+1}(x) - U_{2p-1}(x)].$$

Mais on voit que

$$\frac{2^{2p} p!\, \Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)}{2p!} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Il vient donc finalement

$$\frac{2^{2p}\left[\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]^2}{2p!} x U_{2p}(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_{2p+1}(x) - U_{2p-1}(x)], \tag{8}$$

et l'on peut écrire la suite d'égalités

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 x U_0(x) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_1(x), \\ \frac{2^2\left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right]^2}{2!} x U_2(x) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_3(x) - U_1(x)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{2^{2q}\left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)\right]^2}{2q!} x U_{2q}(x) &= \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) [U_{2q+1}(x) - U_{2q-1}(x)]. \end{aligned} \right.$$

Ajoutons ces égalités membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $U_0(\alpha)$, $U_2(\alpha)$, ..., $U_{2q}(\alpha)$; il vient

$$(10)\quad x A_{2q} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{ U_1(x)[U_0(\alpha) - U_2(\alpha)] + U_3(x)[U_2(\alpha) - U_4(\alpha)] + \ldots + U_{2q-1}(x)[U_{2q-2}(\alpha) - U_{2q}(\alpha)] + U_{2q}(x)\,U_{2q+1}(x)\Big\}.$$

D'autre part, la relation de récurrence (1) donne

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2p+3}{2}\right)} x\, U_{2p+1}(x) = U_{2p}(x) - U_{2p+2}(x),$$

d'où l'on tire

$$(11)\quad \frac{2^{2p+1}\left[\Gamma\left(\frac{2p+2}{2}\right)\right]^2}{(2p+1)!} x\, U_{2p+1}(x) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[U_{2p}(x) - U_{2p+2}(x)].$$

Dans le second membre de (10) remplaçons les différences $U_{2p}(\alpha) - U_{2p+2}(\alpha)$ par leur valeur tirée de (11); il vient

$$(12)\quad x A_{2q} = \alpha B_{2q-1} + \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_{2q}(\alpha)\, U_{2q+1}(x).$$

Le même raisonnement peut être fait en partant cette fois des q premières égalités (11) qu'on ajoute membre à membre après les avoir multipliées respectivement par $U_1(\alpha)$, $U_3(\alpha)$, ..., $U_{2q-1}(\alpha)$; il vient ainsi

$$x B_{2q-1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{ U_0(x)U_1(\alpha) + U_2(x)[U_3(\alpha) - U_1(\alpha)] + \ldots + U_{2q-2}(x)[U_{2q-1}(\alpha) - U_{2q-3}(\alpha)] - U_{2q}(x)U_{2q-1}(\alpha)\Big\}$$

ou

$$x B_{2q-1} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Big\{ \alpha\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_0(x)U_0(\alpha) + U_2(x)[U_3(\alpha) - U_1(\alpha)] + \ldots + U_{2q-2}(x)[U_{2q-1}(\alpha) - U_{2q-3}(\alpha)] + U_{2q}(x)[U_{2q+1}(\alpha) - U_{2q-1}(\alpha)] - U_{2q}(\alpha)U_{2q+1}(\alpha)\Big\}.$$

En remplaçant dans le second membre les différences $U_{2p+1}(\alpha) - U_{2p-1}(\alpha)$ par leur valeur tirée de (8), il vient

$$(13)\quad x B_{2q-1} = \alpha A_{2q} - \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) U_{2q}(\alpha)U_{2q+1}(\alpha).$$

En ajoutant membre à membre les égalités (12) et (13), il vient

$$(x-\alpha)[A_{2q}+B_{2q-1}] = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[U_{2q}(\alpha)U_{2q+1}(x) - U_{2q}(x)U_{2q+1}(\alpha)],$$

d'où

$$(14)\qquad S_{2q}(x,\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\alpha}[U_{2q}(\alpha)U_{2q+1}(x) - U_{2q}(x)U_{2q+1}(\alpha)],$$

expression valable tant que x et α sont deux nombres différents; elle s'écrit en fonction des polynomes $P_n(x)$

$$(14')\qquad S_{2q}(x,\alpha) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1}\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q-1}{2}\right)} \times \frac{P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q}(\alpha)P_{2q+1}(x)}{x-\alpha}.$$

II.

D'une façon générale, désignons par $I_{2q}^{a,b}(x)$ l'intégrale

$$(15)\qquad I_{2q}^{a,b}(x) = \int_a^b S_{2q}(x,\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

et considérons tout d'abord le cas où la limite supérieure b est infinie, tandis que la limite inférieure a est égale à x; la formule (15) devient ainsi

$$(16)\qquad I_{2q}^{x,+\infty}(x) = \int_x^{+\infty} S_{2q}(x,\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

D'après la définition même de $S_{2q}(x,\alpha)$, on a

$$I_{2q}^{x,+\infty}(x) = \int_x^{+\infty} e^{-\alpha^2}\,d\alpha - \frac{P_1(x)\,e^{-x^2}}{2} - \frac{P_2(x)P_1(x)\,e^{-x^2}}{2^2.2!} - \ldots - \frac{P_{2q}(x)P_{2q-1}(x)\,e^{-x^2}}{2^{2q}.2q!}.$$

Quand q augmente indéfiniment, le second membre de cette égalité devient une série dont le terme général est

$$(17)\qquad u_n = \frac{P_n(x)P_{n-1}(x)\,e^{-x^2}}{2^n n!}.$$

Cette série est convergente.

En effet, groupons ses termes deux à deux et considérons la série ainsi formée par les groupes de deux termes consécutifs; son terme général s'écrit

$$\left[\frac{P_{2p}(x)P_{2p-1}(x)}{2^{2p}2p!} + \frac{P_{2p+1}(x)P_{2p}(x)}{2^{2p+1}(2p+1)!}\right]e^{-x^2} \tag{18}$$

ou

$$\frac{P_{2p}(x)\,e^{-x^2}}{2^{2p+1}(2p+1)!}[2(2p+1)\,P_{2p-1}(x) + P_{2p+1}(x)],$$

ou, en vertu de la relation de récurrence (1),

$$\frac{P_{2p}(x)\,e^{-x^2}}{2^{2p}(2p+1)!}[P_{2p-1}(x) - x\,P_{2p}(x)]. \tag{19}$$

Or, d'après la relation (6), on a

$$\frac{P_{2p}(x)\,P_{2p-1}(x)}{2^{2p}(2p+1)!} = \frac{2^{2p-1}\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma(p)\,U_{2p}(x)\,U_{2p-1}(x)}{\Gamma(2p+2)}.$$

Si la variable x est astreinte à ne prendre que les valeurs d'un intervalle (a, b) fixe et d'ailleurs aussi étendu qu'on veut, on peut d'après l'inégalité (5′) déterminer un nombre positif tel que le module des polynomes $U_n(x)$ reste inférieur à ce nombre si grand que soit l'indice n. D'autre part, on sait que y augmentant indéfiniment par valeurs positives le rapport

$$\frac{\Gamma(y)}{\sqrt{2\pi}\,y^{y-\frac{1}{2}}e^{-y}}$$

tend vers l'unité; il en résulte que la quantité

$$\frac{2^{2p-1}\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\Gamma(p)}{\Gamma(2p+2)}$$

tend vers o comme $\frac{1}{p^2}$ quand p augmente indéfiniment; la série de terme général

$$\frac{P_{2p}(x)\,P_{2p-1}(x)}{2^{2p-1}(2p+1)!}e^{-x^2}$$

est donc absolument et uniformément convergente.

D'après la relation (6) on a

$$\frac{[\mathrm{P}_{2p}(x)]^2}{2^{2p}(2p+1)!} = \frac{2^{2p}\left[\Gamma\left(\frac{2p+1}{2}\right)\right]^2[\mathrm{U}_{2p}(x)]^2}{\Gamma(2p+2)}.$$

Un raisonnement analogue au précédent montre que ce rapport tend en valeur absolue vers o comme $\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}}$; la série dont le terme général est

$$\frac{[\mathrm{P}_{2p}(x)]^2}{2^{2p}(2p+1)!}e^{-x^2}$$

est donc absolument et uniformément convergente.

La série dont le terme général est l'expression (18), somme de deux séries absolument et uniformément convergentes, est absolument et uniformément convergente.

Il en résulte que la série dont le terme général est l'expression (17) est elle-même uniformément convergente; considérons en effet la somme de ses premiers termes; si le premier terme, du reste, correspond à une valeur paire de n, la somme obtenue n'est autre que la somme S_k des premiers termes de la série dont le terme général est l'expression (18); si le premier terme, du reste, correspond à une valeur impaire de n, la somme obtenue est de la forme

$$\mathrm{S}_k + u_n.$$

Mais le module de u_n tend vers o comme $\frac{1}{n}$; les deux quantités S_k et $\mathrm{S}_k + u_n$ tendent donc vers une limite commune S; la série considérée est convergente; on peut même affirmer qu'elle converge uniformément quand la variable x est astreinte à ne prendre que les valeurs d'un intervalle fixe (a, b) d'ailleurs aussi étendu qu'on veut.

En résumé, quand q augmente indéfiniment, la quantité $\mathrm{I}_{2q}^{x,+\infty}(x)$ a pour limite une fonction continue que nous désignerons par $\mathrm{I}^{x,+\infty}(x)$.

Considérons de même la quantité

$$(20)\quad \mathrm{I}_{2q}^{-\infty,x}(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathrm{S}_{2q}(x, \alpha)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$
$$= \int_{-\infty}^{x} e^{-\alpha^2}\, d\alpha + \frac{\mathrm{P}_1(x)\, e^{-x^2}}{2} + \ldots + \frac{\mathrm{P}_{2q}(x)\, \mathrm{P}_{2q-1}(x)\, e^{-x^2}}{2^{2q}.2q!}.$$

Quand q augmente indéfiniment le second membre de cette égalité devient une série uniformément convergente dont la somme $I^{-\infty,x}(x)$ est une fonction continue.

On a manifestement

$$I^{x,+\infty}(x)+I^{-\infty,x}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha=\sqrt{\pi}.$$

D'autre part, la différence

$$I^{-\infty,x}(x)-I^{x,+\infty}(x)$$

n'est autre que la somme de la série

$$(21)\qquad \begin{aligned} S(x)=&\int_{-\infty}^{x}e^{-\alpha^2}\,d\alpha-\int_{x}^{+\infty}e^{-\alpha^2}\,d\alpha\\ &+2\left[\frac{P_1(x)\,e^{-x^2}}{2}+\frac{P_2(x)\,P_1(x)\,e^{-x^2}}{2^2.2!}+\ldots\right.\\ &\qquad\left.+\frac{P_n(x)\,P_{n-1}(x)\,e^{-x^2}}{2^n.n!}+\ldots\right].\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\frac{S(x)}{2}=&\int_0^x e^{-\alpha^2}\,d\alpha+\frac{P_1(x)\,e^{-x^2}}{2}+\frac{P_2(x)\,P_1(x)\,e^{-x^2}}{2^2\,2!}+\ldots\\ &+\frac{P_n(x)\,P_{n-1}(x)\,e^{-x^2}}{2^n\,n!}+\ldots.\end{aligned}$$

En dérivant terme à terme, et en remarquant que

$$\frac{dP_n(x)}{dx}=-2n\,P_{n-1}(x),$$

il vient

$$(22)\qquad \begin{aligned}\frac{S'(x)}{2}=&e^{-x^2}+\frac{P_2(x)\,e^{-x^2}}{2}+\left\{\frac{[P_2(x)]^2\,e^{-x^2}}{2^2.2!}-\frac{[P_1(x)]^2\,e^{-x^2}}{2!}\right\}+\ldots\\ &+\left\{\frac{[P_n(x)]^2\,e^{-x^2}}{2^n.n!}-\frac{[P_{n-1}(x)]^2\,e^{-x^2}}{2^{n-1}.(n-1)!}\right\}+\ldots.\end{aligned}$$

Or, les polynomes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ satisfont à la relation

$$\frac{P_2(x)}{2}-\frac{[P_1(x)]^2}{2}+1=0;$$

d'autre part, les autres termes de la série du second membre se détruisent deux à deux; la somme des $n+1$ premiers termes de cette série est donc

$$\frac{[P_n(x)]^2 e^{-x^2}}{2^n n!}.$$

Son module est au plus égal à la quantité

$$\frac{2^n K \left[\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2}{n!}$$

dans laquelle K est un nombre fixe indépendant de x, si l'on assujettit cette variable à ne prendre que les valeurs d'un intervalle fixe (a, b) d'ailleurs aussi grand qu'on veut; cette quantité tend vers o comme $\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ quand n augmente indéfiniment.

La série figurant dans le second membre (22) est donc uniformément convergente; elle représente bien la dérivée de la fonction $S(x)$; sa somme est constamment nulle; on a donc

$$S'(x) = 0$$

et la différence $S(x)$ est indépendante de x; mais elle s'annule avec x; on a donc finalement

$$I^{-\infty, x}(x) = I^{+\infty, x}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

III.

Quand, dans l'intégrale définissant $I_{2q}^{a,b}(x)$ on remplace $S_{2q}(x, \alpha)$ par sa valeur tirée de (14'), il vient

$$I_{2q}^{a,b}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1}\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \times \int_a^b \frac{[P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x)P_{2q}(\alpha)]}{x-\alpha} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Supposons que le point x n'appartienne pas à l'intervalle (a, b); quand α varie dans cet intervalle, la fonction $\frac{1}{x-\alpha}$ varie toujours dans le même sens et l'on peut écrire

$$(23)\quad I_{2q}^{a,b}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1}\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$$
$$\times\left[\frac{1}{x-a}\int_a^\xi [P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha)-P_{2q+1}(x)P_{2q}(\alpha)]e^{-\alpha^2}d\alpha\right.$$
$$\left.+\frac{1}{x-b}\int_\xi^b [P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha)-P_{2q+1}(x)P_{2q}(\alpha)]e^{-\alpha^2}d\alpha\right],$$

ξ étant un certain nombre appartenant à l'intervalle (a, b).

Mais on a

$$(24)\quad \int_a^\xi [P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha)-P_{2q+1}(x)P_{2q}(\alpha)]e^{-\alpha^2}d\alpha$$
$$= P_{2q}(x)[P_{2q}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_a^\xi - P_{2q+1}(x)[P_{2q-1}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_a^\xi.$$

L'inégalité (5) donne une limite supérieure du module du second membre; on a

$$|P_{2q}(x)[P_{2q}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_a^\xi| < \frac{2^{4q+1}}{\pi}\left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)\right]^2 e^{x^2}$$

et

$$|P_{2q+1}(\alpha)[P_{2q-1}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_a^\xi| < \frac{2^{4q+1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)e^{x^2}.$$

Il en résulte que

$$(25)\quad \left|\int_a^\xi [P_{2q}(x)P_{2q+1}(\alpha)-P_{2q+1}(x)P_{2q}(\alpha)]e^{-\alpha^2}d\alpha\right|$$
$$< \frac{2^{4q+1}}{\pi}\left\{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)+\left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)\right]^2\right\}e^{x^2}.$$

En raisonnant de même sur l'intégrale prise entre les limites ξ et b on voit qu'il vient finalement

$$(26)\quad |I_{2q}^{a,b}(x)| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\left|\frac{1}{x-\alpha}\right|+\left|\frac{1}{x-b}\right|\right)$$
$$\times\left\{\frac{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)+\left[\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}\right\}e^{x^2}.$$

Or, quand q augmente indéfiniment, le rapport $\dfrac{\Gamma\left(\frac{2q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$ tend asymptotiquement vers

$$\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \sim \frac{\left(\frac{2q}{2}\right)^{\frac{2q}{2}-\frac{1}{2}} e^{-q}}{\left(\frac{2q+1}{2}\right)^{\frac{2q}{2}} e^{-\frac{2q+1}{2}}}.$$

En désignant par A un nombre fini, on peut donc écrire

$$\frac{\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} < \frac{A}{q^{\frac{1}{2}}}.$$

De même, le rapport $\dfrac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)}$ tend asymptotiquement vers

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)} \sim \frac{\left(\frac{2q+1}{2}\right)^{q} e^{-\frac{2q+1}{2}}}{\left(\frac{2q+2}{2}\right)^{\frac{2q+1}{2}} e^{-\frac{2q+2}{2}}}$$

et, en désignant par B un nombre fini, on peut écrire

$$\frac{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\left(\frac{2q+2}{2}\right)} < \frac{B}{q^{\frac{1}{2}}}.$$

On a donc finalement, en désignant par λ celui des deux nombres a, b qui donne à $\frac{1}{x-\alpha}$ sa plus grande valeur absolue,

$$|\,I_{2q}^{a,b}(x)\,| < \frac{K\, e^{x^2}}{|\,x-\lambda\,|\, q^{\frac{1}{2}}}, \tag{27}$$

K étant un nombre fini indépendant de x, a et b.

Quand q augmente indéfiniment, la quantité $I_{2q}^{a,b}(x)$ tend donc vers zéro.

Supposons que x étant inférieur à a, b soit un nombre quelconque supérieur à a, choisi aussi grand qu'on veut. Dans l'inégalité (27), λ est alors égal à a, car des deux nombres $\frac{1}{x-a}$ et $\frac{1}{x-b}$ le premier est celui dont la valeur absolue est la plus grande; le second membre de (27) étant indépendant de b, on peut faire correspondre à tout nombre ε, un nombre η tel que sous la seule condition que

$$q > \eta$$

on ait

$$|\mathrm{I}_{2q}^{a,b}(x)| < \varepsilon,$$

et cela si grand que soit b, autrement dit la quantité $\mathrm{I}_{2q}^{a,+\infty}(x)$ tend vers 0 quand q augmente indéfiniment, si x est inférieur à a; on démontrerait de même que la quantité $\mathrm{I}_{2q}^{-\infty,a}(x)$ tend vers 0, si x est un nombre supérieur à a.

Or, on peut écrire, x étant inférieur à a,

$$\mathrm{I}_{2q}^{x,+\infty}(x) = \mathrm{I}_{2q}^{x,a}(x) + \mathrm{I}_{2q}^{a,+\infty}(x).$$

La limite de $\mathrm{I}_{2q}^{a,+\infty}(x)$ est nulle, celle de $\mathrm{I}_{2q}^{x,+\infty}(x)$ est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; donc la quantité $\mathrm{I}_{2q}^{x,a}(x)$ a pour limite $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ quand q augmente indéfiniment.

On démontrerait de même que la limite de $\mathrm{I}_{2q}^{a,x}(x)$ est la même que celle de $\mathrm{I}_{2q}^{-\infty,x}(x)$, autrement dit est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Si β est un nombre compris entre x et a, a étant supérieur à x, on peut écrire

$$\mathrm{I}_{2q}^{x,a}(x) = \mathrm{I}_{2q}^{x,\beta}(x) + \mathrm{I}_{2q}^{\beta,a}(x).$$

Supposons que β tende vers x, de telle sorte que $x - \beta$ tende vers zéro comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif; l'inégalité (27) donne alors

$$|\mathrm{I}_{2q}^{\beta,a}(x)| < \frac{\mathrm{K}\,e^{x^2}}{q^{\frac{1}{2}-\mu}}.$$

Si μ est inférieur à $\frac{1}{2}$, la limite de $\mathrm{I}_{2q}^{\beta,a}(x)$ pour q infini est nulle et la limite de $\mathrm{I}_{2q}^{x,\beta}(x)$ est encore $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On démontrerait de même que $I_{2q}^{\beta,x}(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, β tendant vers x par valeurs inférieures à x, de telle sorte que la différence $x - \beta$ tende vers o comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$.

Nous examinerons encore le cas où la limite supérieure de l'intégrale $I_{2q}^{a,b}(x)$ est un nombre b tendant vers x par valeurs supérieures à x, quand q augmente indéfiniment, de telle sorte que la différence $b - x$ tende vers o comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$ tandis que la limite inférieure a est un nombre quelconque assujetti à rester compris entre x et b, mais pouvant d'ailleurs varier avec q. Dans ces conditions, l'intégrale $I_{2q}^{a,b}(x)$ reste finie quand q augmente indéfiniment.

En effet, à l'intervalle (x, b) appartient le point β dont la distance au point x est égale à $q^{-\frac{1}{2}}$; il est clair que si le point a est situé entre le point β et le point b ou coïncide avec le point β, on a, en vertu de l'inégalité (27),

$$|I_{2q}^{(a,b)}(x)| < \frac{K e^{x^2}}{q^{-\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}} = K e^{x^2}.$$

Supposons donc que le point a soit situé entre le point x et le point β, et considérons $I_{2q}^{a,\beta}(x)$; en posant

$$\alpha = x + \lambda,$$

il vient

$$(28)\quad I_{2q}^{a,\beta}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1}\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)} \times \int_{a-x}^{\beta-x} \frac{P_{2q+1}(x)P_{2q}(x+\lambda) - P_{2q}(x)P_{2q+1}(x+\lambda)e^{-(x+\lambda)^2}d\lambda}{\lambda}.$$

Or,

$$\begin{aligned} P_{2q+1}(x+\lambda) &= P_{2q+1}(x) + \lambda P'_{2q+1}(x+\theta\lambda) \\ &= P_{2q+1}(x) - 2(2q+1)\lambda P_{2q}(x+\theta\lambda), \end{aligned}$$

$$P_{2q}(x+\lambda) = P_{2q}(x) + \lambda P'_{2q}(x+\theta'\lambda) = P_{2q}(x) - 4q\lambda P_{2q-1}(x+\theta'\lambda),$$

et l'on a finalement

$$(29)\quad \mathrm{I}_{2q}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2^{4q+1}\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$$
$$\times\int_{\alpha-x}^{\beta-x}[2(2q+1)\mathrm{P}_{2q}(x)\mathrm{P}_{2q}(x+\theta\lambda)$$
$$-4q\,\mathrm{P}_{2q+1}(x)\mathrm{P}_{2q-1}(x+\theta'\lambda)]\,e^{-(x+\lambda)^2}\,d\lambda.$$

Mais λ variant dans l'intervalle d'intégration, on a

$$(30)\quad \left|\frac{2(2q+1)\,\mathrm{P}_{2q}(x)\,\mathrm{P}_{2q}(x+\theta\lambda)}{2^{4q+1}\,\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}\right| < \mathrm{A}\,\frac{(2q+1)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)}$$

et

$$(31)\quad \left|\frac{4q\,\mathrm{P}_{2q+1}(x)\mathrm{P}_{2q-1}(x+\theta'\lambda)}{2^{4q+1}\,\Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}\right| < \mathrm{B}\,\frac{2q\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)},$$

A et B étant deux nombres finis.

Des inégalités (30) et (31), dont les seconds membres augmentent avec q comme $q^{\frac{1}{2}}$, on conclut que la quantité sous le signe $\int$ est inférieure à $\mathrm{K}q^{\frac{1}{2}}$, pour des valeurs suffisamment grandes de q, K étant un nombre fini convenablement choisi; mais comme, d'autre part, l'intervalle auquel est étendu l'intégration tend vers o comme $q^{-\frac{1}{2}}$, l'intégrale $\mathrm{I}_{2q}^{\alpha,\beta}(x)$ reste finie.

IV.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, finie et continue dans l'intervalle (a, b), et considérons la série

$$(32)\quad \int_a^b f(\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha + \frac{\mathrm{P}_1(x)}{2.1!}\int_a^b f(\alpha)\,\mathrm{P}_1(\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$
$$+\frac{\mathrm{P}_2(x)}{2^2.2!}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{P}_2(\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha+\ldots$$
$$+\frac{\mathrm{P}_n(x)}{2^n.n!}\int_a^b f(\alpha)\mathrm{P}_n(\alpha)\,e^{-\alpha^2}\,d\alpha+\ldots.$$

En désignant par $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ la somme des $2q$ premiers termes de cette série, on a

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = \int_a^b f(\alpha)\, S_{2q}(x, \alpha)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ ne soit jamais croissante, ou jamais décroissante; on peut écrire

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = f(a) \int_a^\xi S_{2q}(x, \alpha)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha + f(b) \int_\xi^b S_{2q}(x, \alpha)\, e^{-\alpha^2}\, d\alpha$$

ou

$$(33) \qquad \varphi_{2q}^{a,b}(x) = f(a)\, I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b)\, I_{2q}^{\xi,b}(x),$$

ξ désignant un certain nombre de l'intervalle (a, b).

Si x est à l'extérieur de l'intervalle (a, b) les quantités $I_{2q}^{a,\xi}(x)$ et $I_{2q}^{\xi,b}(x)$ tendent vers o quand q augmente indéfiniment; il en est donc de même de la somme $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$.

Supposons que la fonction $f(x)$, finie et continue dans l'intervalle (x, b), n'y soit jamais croissante ou jamais décroissante, et choisissons un nombre a situé entre x et b; on peut alors écrire

$$\varphi_{2q}^{x,b}(x) = f(a)\, I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b)\, I_{2q}^{\xi,b}(x),$$
$$\varphi_{2q}^{x,a}(x) = f(x)\, I_{2q}^{x,a}(x) + [f(a) - f(x)]\, I_{2q}^{\eta,a}(x),$$

ξ étant un certain nombre compris entre a et b, et η un certain nombre compris entre x et a. En ajoutant ces deux égalités membre à membre, il vient

$$(34) \qquad \begin{aligned} \varphi_{2q}^{x,b}(x) = {} & f(x)\, I_{2q}^{x,a}(x) + [f(a) - f(x)]\, I_{2q}^{\eta,a}(x) \\ & + f(a)\, I_{2q}^{a,\xi}(x) + f(b)\, I_{2q}^{\xi,b}. \end{aligned}$$

Faisons tendre le point a vers le point x, de telle sorte que la différence $a - x$ tende vers o comme $q^{-\mu}$, quand q augmente indéfiniment, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$; dans ces conditions $I_{2q}^{x,a}(x)$ tend vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $I_{2q}^{a,\xi}(x)$ et $I_{2q}^{\xi,b}$ tendent vers o, $I_{2q}^{\eta,a}(x)$ reste fini et $f(a) - f(x)$ tend vers o; la limite de la somme $\varphi_{2q}^{x,b}(x)$ est donc égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2} f(x)$.

On démontrerait de même que la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,x}(x)$, a étant un nombre inférieur à x, est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x)$.

La démonstration précédente serait encore applicable si la fonction $f(x)$ présentait au point x une discontinuité, pourvu que $f(\alpha)$ tende vers une limite bien déterminée $f(x+\varepsilon)$ quand α tend vers x par valeurs supérieures à x; la limite de la somme $\varphi_{2q}^{x,b}(x)$ serait alors $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x+\varepsilon)$. De même si $f(\alpha)$ tend vers une limite $f(x-\varepsilon)$ quand α tend vers x par valeurs inférieures à x la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,x}(x)$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(x-\varepsilon)$.

En résumé, si la fonction $f(x)$ finie dans l'intervalle (a, b) y est en général continue, n'admet qu'un nombre fini de discontinuités du genre de celles qui viennent d'être définies et n'est jamais croissante ou jamais décroissante, la somme de la série (32) est égale à

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}[f(x+\varepsilon)+f(x-\varepsilon)]$ si x est compris entre a et b, soit

$\sqrt{\pi}f(x)$ si la fonction est continue au point x;

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(a)$ si x est égal à a;

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(b)$ si x est égal à b;

o si x est extérieur à l'intervalle a, b.

Ces résultats s'étendent manifestement au cas d'une fonction en général continue dans l'intervalle (a, b), qui n'y admet qu'un nombre fini de discontinuités de l'espèce indiquée et qui présente un nombre fini de maxima et de minima; car, on peut alors diviser l'intervalle (a, b) en un nombre fini d'intervalles partiels dans chacun desquels s'appliquent les démonstrations.

Dans un cas étendu, on peut même s'affranchir de la condition que la fonction $f(x)$ reste finie, comme nous allons le montrer.

Considérons une fonction $f(x)$ devenant infinie pour $x = x_0$; on suppose que de $x_0 - \varepsilon$ à x_0 et de x_0 à $x_0 + \varepsilon$ la fonction conserve un signe constant; de plus

$$\int^{x} f(x)\,dx$$

tend vers une limite quand x tend vers x_0 en lui étant inférieur ou supérieur. On a toujours

$$\left|\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[U_{2q}(\alpha)U_{2q+1}(x)-U_{2q}(x)U_{2q+1}(\alpha)]e^{-\alpha^2}\right|<\frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que quand α varie dans l'intervalle $x_0-\varepsilon$, x_0, la différence $x-\alpha$ soit positive; on a alors

$$\frac{-2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}(x-\alpha)}<S_{2q}(x,\alpha)e^{-\alpha^2}<\frac{2e^{x^2}}{\sqrt{\pi}(x-\alpha)}$$

ou, en désignant par m une limite supérieure de $\frac{1}{x-\alpha}$ quand α varie dans l'intervalle $x_0-\varepsilon$, x_0,

$$\frac{-2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}}<S_{2q}(x,\alpha)e^{-\alpha^2}<\frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}}.$$

Si, dans ce même intervalle, la fonction $f(x)$ est positive, on a donc

$$-\frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}f(\alpha)\,d\alpha<\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}S_{2q}(x,\alpha)f(\alpha)e^{-\alpha^2}\,d\alpha<\frac{2e^{x^2}m}{\sqrt{\pi}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}f(\alpha)\,d\alpha.$$

Mais, d'après les hypothèses faites, on peut choisir ε assez petit pour que $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}f(\alpha)\,d\alpha$ soit inférieur à toute quantité donnée à l'avance; il en résulte qu'on peut choisir ε assez petit pour que l'intégrale

$$\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0}S_{2q}(x,\alpha)f(\alpha)e^{-\alpha^2}\,d\alpha$$

soit en module inférieure à toute quantité donnée à l'avance, si grand d'ailleurs que soit le nombre q.

La même remarque s'applique évidemment à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon}S_{2q}(x,\alpha)f(\alpha)e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Ainsi, si l'on écrit

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x)=\varphi_{2q}^{a,x_0-\varepsilon}(x)+\varphi_{2q}^{x_0-\varepsilon,x_0}(x)+\varphi_{2q}^{x_0,x_0+\varepsilon}(x)+\varphi_{2q}^{x_0+\varepsilon,b}(x),$$

la seconde et la troisième intégrale tendent vers o quand ε tend vers o, q augmentant indéfiniment; les résultats énoncés précédemment pour la limite de $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ sont donc encore exacts.

Nous considérerons encore le cas où l'une des limites de l'intervalle (a, b) devient infinie; supposons par exemple que ce soit la limite supérieure b; on peut alors écrire, en désignant par x_0 un nombre positif très grand,

$$\left| \int_{x_0}^{+\infty} S_{2q}(x, \alpha) f(\alpha) e^{-\alpha^2} d\alpha \right| < \frac{2 e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{+\infty} \left| \frac{f(\alpha)}{x - \alpha} \right| d\alpha.$$

Si l'intégrale du second membre converge, autrement dit, si elle tend vers o quand x_0 augmente indéfiniment, on pourra toujours choisir ce dernier nombre assez grand pour que l'intégrale du premier membre soit inférieure à toute quantité donnée à l'avance, si grand que soit q; ainsi, sous la seule condition que

$$\int_a^{+\infty} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$$

ait un sens, les résultats énoncés s'appliquent encore à la limite de la somme $\varphi_{2q}^{a,+\infty}(x)$; de même sous la seule condition que

$$\int_{-\infty}^{b} \left| \frac{f(x)}{x} \right| dx$$

ait un sens; ils s'appliquent à la limite de la somme $\varphi_{2q}^{-\infty,b}(x)$.

Il en est encore de même si, quand x augmente indéfiniment, la fonction $f(x)$ n'est jamais croissante ou jamais décroissante et si le rapport $\frac{f(x)}{x}$ reste fini.

Soit, en effet, un nombre a supérieur à x, à partir duquel la fonction $f(x)$ n'est jamais croissante ou jamais décroissante; quand α croît depuis a jusqu'à $+\infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x - \alpha}$ n'est alors jamais croissant ou jamais décroissant et l'on peut écrire

$$\varphi_{2q}^{a,b}(x) = \frac{f(a)}{x-a} \int_a^{\xi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)}$$
$$+ \frac{f(b)}{x-b} \int_{\xi}^{b} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)[P_{2q}(x) P_{2q+1}(\alpha) - P_{2q+1}(x) P_{2q}(\alpha)] e^{-\alpha^2} d\alpha}{2^{4q+1} \Gamma\left(\frac{2q+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{2q+1}{2}\right)},$$

b étant un nombre quelconque supérieur à a et ξ un nombre compris entre a et b; le module de chacune des intégrales du second membre est inférieur à une quantité de la forme $\frac{A}{q^{\frac{1}{2}}}$, où A est un nombre fini indépendant de a, b et q.

Comme les rapports $\frac{f(a)}{x-a}$ et $\frac{f(b)}{x-b}$ sont finis, on a donc finalement

$$|\varphi_{2q}^{a,b}(x)| < \frac{K}{q^{\frac{1}{2}}}$$

et cela si grand que soit b; la quantité $\varphi_{2q}^{a,+\infty}(x)$ tend donc vers o quand q augmente indéfiniment, et dans la série (32) on peut rejeter à l'infini la limite supérieure des intégrales. On démontrerait évidemment un résultat analogue dans le cas où la limite inférieure a de ces intégrales serait $-\infty$.

V.

Quand la fonction $f(x)$, finie dans l'intervalle (a, b), y admet des points de discontinuité de l'espèce définie précédemment, la série (32) ne peut être uniformément convergente dans cet intervalle. Il en est autrement si, dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est continue.

Désignons, en effet, par $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les maxima et minima en nombre fini présentés par la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b) et par ε un nombre fixe, choisi aussi petit qu'on veut; nous allons démontrer que la différence

$$\sqrt{\pi} f(x) - \varphi_{2q}^{a,b}(x)$$

tend uniformément vers o quand q augmente indéfiniment, a appartenant à l'intervalle $(a_p + \varepsilon, a_{p+1} - \varepsilon)$.

On peut écrire

$$(35) \qquad \begin{aligned} \varphi_{2q}^{a,b}(x) = \varphi_{2q}^{a,a_1}(x) + \varphi_{2q}^{a_1,a_2}(x) + \ldots \\ + \varphi_{2q}^{a_p,x}(x) + \varphi_{2q}^{x,a_{p+1}}(x) + \ldots + \varphi_{2q}^{a_r,b}(x). \end{aligned}$$

D'autre part, l'égalité analogue à (33) relative à un intervalle tel que (a_m, a_{m+1}) s'écrit en désignant par ξ un nombre compris entre a_m et a_{m+1}

$$\varphi_{2q}^{a_m, a_{m+1}}(x) = f(a_m)\, I_{2q}^{a_m, \xi}(x) + f(a_{m+1})\, I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}.$$

Les modules de $I_{2q}^{a_m, \xi}$ et $I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}$ sont au plus égaux à

$$\frac{K e^{x^2}}{|x-\lambda|\, q^{\frac{1}{2}}},$$

λ étant la valeur de α qui rend maximum le module de $\frac{1}{|x-\alpha|}$ et K étant un nombre fini indépendant de x et q; on a donc

$$(36) \qquad |\varphi_{2q}^{a_m, a_{m+1}}(x)| < \frac{K' e^{b^2}}{\varepsilon q^{\frac{1}{2}}},$$

K étant un nombre indépendant de a_m, a_{m+1}, x et q.

D'autre part, l'égalité analogue à (34) s'écrit

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{x, a_{p+1}}(x) &= f(x)\, I_{2q}^{x, \beta}(x) + [f(\beta) - f(x)]\, I_{2q}^{\eta, \beta}(x) \\ &\quad + f(\beta) I_{2q}^{\beta, \xi}(x) + f(a_{p+1})\, I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}, \end{aligned}$$

β étant un nombre compris entre x et a_{p+1}, η un nombre compris entre x et β, et ξ un nombre compris entre β et a_{p+1}; de même on a

$$\begin{aligned} \varphi_{2q}^{a_p, x}(x) &= f(x) I_{2q}^{\beta', x}(x) + [f(\beta') - f(x)]\, I_{2q}^{\beta', \eta'}(x) \\ &\quad + f(\beta') I_{2q}^{\xi', \beta'}(x) + f(a_p) I_{2q}^{a_p, \xi'}(x); \end{aligned}$$

en ajoutant membre à membre et en retranchant $\sqrt{\pi} f(x)$, il vient

$$\begin{aligned} &\varphi_{2q}^{a_p, x}(x) + \varphi_{2q}^{x, a_{p+1}}(x) - \sqrt{\pi} f(x) \\ &= f(x)\left[I_{2q}^{\beta', x}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} + I_{2q}^{x, \beta}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] \\ &\quad + [f(\beta) - f(x)]\, I_{2q}^{\eta, \beta} + [f(\beta') - f(x)]\, I_{2q}^{\beta', \eta'} + f(\beta) I_{2q}^{\beta, \xi}(x) \\ &\quad + f(a_{p+1}) I_{2q}^{\xi, a_{m+1}} + f(\beta') I_{2q}^{\xi', \beta'} + f(a_p) I_{2q}^{a_p, \xi'}. \end{aligned}$$

Supposons que les distances des points β et β' au point x tende vers o comme $q^{-\mu}$, μ étant un nombre positif inférieur à $\frac{1}{2}$.

En se reportant aux démonstrations du Chapitre II, on constate que le module des quantités $I_{2q}^{\beta, \xi}(x)$, $I_{2q}^{\xi, a_{m+1}}(x)$, $I_{2q}^{\xi', \beta'}(x)$, $I_{2q}^{a_p, \xi'}(x)$

est inférieur à

$$\frac{A\, e^{b^2}}{q^{\frac{1}{2}-\mu}}$$

où A est un nombre fini indépendant de x.

Les quantités $I_{2q}^{x,\beta}(x)$ et $I_{2q}^{\beta',x}(x)$ tendent uniformément vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$; enfin, comme la fonction $f(x)$ est continue, les différences $f(\beta)-f(x)$ et $f(\beta')-f(x)$ tendent uniformément vers o.

On peut donc trouver un nombre n tel que sous la seule condition que q soit supérieur à n, la différence

$$|\sqrt{\pi} f(x) - \varphi_{2q}^{a,b}(x)|$$

soit inférieure à un nombre η choisi aussi petit qu'on veut, quel que soit x appartenant à l'intervalle $a_p+\varepsilon$, $a_{p+1}-\varepsilon$.

La série (32) converge donc uniformément quand x est compris dans l'un des intervalles

$$(a+\varepsilon,\ a_1-\varepsilon),\quad (a_1+\varepsilon,\ a_2-\varepsilon),\quad \ldots,\quad (a_r+\varepsilon,\ b-\varepsilon).$$

Il est aisé de montrer qu'il en est encore de même quand x est voisin de l'un des maxima ou minima $a_1, a_2, \ldots, a_r$. Soit par exemple $x=a_p$ correspondant à un maximum $y_p=f(a_p)$ de la fonction $f(x)$ positive dans le voisinage de a_p; $f(x)$ croît de $a_p-\varepsilon$ à a_p et décroît de a_p à $a_p+\varepsilon$. Je considère la fonction continue $Q(x)$ ainsi définie dans l'intervalle $(a_p-\varepsilon,\ a_p+\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} &Q(x)=f(x) \quad \text{de} \quad a_p-\varepsilon \ \text{à} \ a_p,\\ &Q(x)=y_p+\mu[y_p-f(x)] \quad \text{de} \quad a_p \ \text{à} \ a_p+\varepsilon \qquad (\mu>1). \end{aligned}$$

Cette fonction est croissante dans l'intervalle $(a_p-\varepsilon,\ a_p+\varepsilon)$.

Considérons maintenant la fonction

$$P(x)=Q(x)+f(x),$$

on a

$$\begin{aligned} &P(x)=2f(x) \quad \text{de} \quad a_p-\varepsilon \ \text{à} \ a_p,\\ &P(x)=y_p(1+\mu)-(\mu-1)f(x) \quad \text{de} \quad a_p \ \text{à} \ a_p+\varepsilon. \end{aligned}$$

$P(x)$ sera aussi croissant dans l'intervalle $(a_p-\varepsilon,\ a_p+\varepsilon)$. Par suite $f(x)$ est la différence de deux fonctions variant dans le même sens de part et d'autre de a_p. Si l'on développe $P(x)$ et $Q(x)$

en séries, il n'y aura aucune difficulté relativement à la valeur a_p. La série (32) représentant $f(x)$ est donc uniformément convergente dans l'intervalle $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$.

L'uniformité de la convergence ne s'étend pas à l'intervalle (a, b) tout entier; il convient d'en exclure les extrémités a et b; il est d'ailleurs évident que ces points, où la somme de la série est respectivement égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(a)$ et $\frac{\sqrt{\pi}}{2}f(b)$ sont des points de discontinuités de la fonction représentée par la somme de la série.

Le terme général de la série (32) est

$$u_n = \frac{P_n(x)}{2^n . n!}\int_a^b f(\alpha)P_n(\alpha)e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ ne soit jamais croissante ou jamais décroissante; on a

$$u_n = \frac{P_n(x)}{2^n n!}\left\{f(a)[P_{n-1}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_a^\xi - f(b)[P_{n-1}(\alpha)e^{-\alpha^2}]_\xi^b\right\}.$$

Si l'on désigne par M un nombre supérieur aux modules de $f(a)$ et de $f(b)$, on a donc

$$|u_n| < \frac{2^{2n+1}M}{2^n n!}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\pi}\,e^{x^2},$$

d'où

$$|u_n| < \frac{A}{n},$$

A étant un nombre fini indépendant de n.

Le terme général de la série (32) tend vers 0 comme $\frac{1}{n}$ quand les intégrations sont étendues à un intervalle dans lequel la fonction $f(x)$ reste finie.

Dans les démonstrations relatives à la convergence de la série (32), nous avons toujours envisagé des sommes $\varphi_{2q}^{a,b}(x)$ ayant un indice pair; elles s'appliquent donc, en réalité, non à la série (32), mais à la série qu'on en déduit en groupant les termes consécutifs deux à deux; comme u_n tend uniformément vers 0, il est clair que si cette dernière série est convergente ou uniformément convergente et a pour somme S, il en est de même de la série (32); les différents résultats énoncés s'appliquent donc bien à la série (32) elle-même.