BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur les correspondances entre les points de deux courbes

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 7-18
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__7_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur les correspondances entre les points de deux courbes; par M. Halphen.

(Séance du 15 novembre 1876.)

1. Dans ma Note *sur la conservation du genre* (¹), j'ai montré d'une manière directe que, si deux courbes se correspondent *point par point*, elles sont du même genre. L'analyse employée m'a conduit en même temps à une relation plus générale qui a lieu entre deux courbes, lorsqu'à un point de l'une correspond un point de l'autre, et à un point de la seconde *plusieurs* points de la première. M. Zeuthen était antérieurement parvenu, pour le cas où les courbes ne possèdent que des singularités ordinaires, à une relation plus générale concernant les correspondances quelconques (²). Cette relation s'étend avec facilité au cas où les courbes possèdent des singularités élevées. L'importance de ce sujet au point de vue des applications me détermine à y revenir. L'objet de cette Note est donc de démontrer le théorème de M. Zeuthen, étendu comme je viens de le dire, et d'en donner des applications.

2. Dans ma Note précitée, j'ai envisagé deux courbes S, Σ, telles

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 29.

(²) *Mathematische Annalen*, t. III.

qu'à un point a de S corresponde un point α de Σ, et qu'à un point α de Σ correspondent k points a de S. Pour passer de là à une correspondance quelconque entre deux courbes Σ, Σ', il suffit de concevoir une courbe S à chaque point de laquelle corresponde un seul couple de points correspondants α, α' de Σ et Σ'. La courbe S peut être réalisée d'une infinité de manières, et il est inutile d'insister sur ce point. Grâce à l'intermédiaire de cette courbe S, on peut étendre, d'une manière utile, les théorèmes I et II de ma Note précitée [1].

Soient (S), (Σ), (Σ') trois systèmes circulaires de branches, se correspondant sur les trois courbes, et n, ν, ν' leurs ordres respectifs de multiplicité. Je suppose qu'à un point de (Σ) répondent g points de (S). D'après le théorème I, à un point a pris sur (S) à distance infiniment petite d'ordre n de l'origine de (S), répond sur (Σ) un point α à distance infiniment petite d'ordre $\sigma = g\nu$ de l'origine de (Σ). Soit g' le nombre analogue à g pour (Σ'); alors à a répond sur (Σ') un point dont la distance à l'origine de (Σ') est infiniment petite de l'ordre $\sigma' = g'\nu'$.

De là résulte, en changeant les notations :

Théorème I. — *Si entre les points de deux courbes* S, S′ *existe une correspondance quelconque, et que* (S), (S′) *soient des systèmes circulaires de branches se correspondant, dont les ordres de multiplicité soient respectivement* n, n'; *si à un point de* (S) *correspondent* g *points de* (S′), *et à un point de* (S′) g' *points de* (S), *à un point placé sur* (S) *à distance infiniment petite d'ordre* gn *de l'origine de* (S) *correspondent sur* (S′) *des points à distance infiniment petite d'ordre* $g'n'$ *de l'origine de* (S′).

3. Reprenons les trois courbes S, Σ, Σ', et appliquons l'équation (16) (p. 38 du t. IV) aux couples S, Σ et S, Σ'. Nous obtenons

$$k(\gamma - 2\mu) + \Sigma\sigma = c - 2m + \Sigma n = k'(\gamma' - 2\mu') + \Sigma\sigma'.$$

Je change, comme précédemment, les notations, je remplace σ et σ' par leurs valeurs, et j'ai la proposition suivante :

Théorème II. — *Soient deux courbes* S, S′ *telles qu'à un point*

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. IV, p. 32.

de S *correspondent k points de* S′, *et à un point de* S′, *k′ points de* S. *Si l'on désigne par m, m′ les ordres et par c, c′ les classes de* S *et de* S′, *et par g, n, g′, n′ les mêmes nombres qu'au théorème I, on a*

$$(1) \qquad k(c-2m)-k'(c'-2m')=\Sigma(g'n'-gn),$$

la sommation s'étendant à tous les couples (S), (S′) *pour lesquels* $(g'n'-gn)$ *est différent de zéro.*

Dans la sommation, on peut, sans troubler l'égalité, introduire tant d'autres couples (S), (S′) que l'on voudra, pourvu qu'on n'omette aucun des précédents. J'écris (1) sous la forme

$$k(c-2m)-k'(c'-2m')+\Sigma g(n-1)-\Sigma g'(n'-1)=\Sigma(g'-g).$$

Pour évaluer séparément $\Sigma g(n-1)$, je puis, d'après la remarque précédente, adjoindre à chaque (S) tous les correspondants (S′) et par suite écrire

$$\Sigma g(n-1)=k\Sigma(n-1).$$

La même remarque s'applique à la somme suivante; j'ai donc

$$k[c-2m+\Sigma(n-1)]-k'[c'-2m'+\Sigma(n'-1)]=\Sigma(g'-g),$$

et, en désignant par p et p' les genres de S et S′,

$$(2) \qquad 2k(p-1)-2k'(p'-1)=\Sigma(g'-g).$$

C'est une autre forme de la relation (1), que l'on peut exprimer en disant :

Si a et a′ sont deux points correspondants sur S *et* S′ *et qu'à un point infiniment voisin de a répondent g points infiniment voisins de a′, et à un point infiniment voisin de a′, g′ points infiniment voisins de a; si, en outre, p et p′ sont les genres des courbes* S, S′, *la relation* (2) *a lieu, le signe sommatoire s'étendant à tous les couples a, a′, pour lesquels* $(g'-g)$ *est différent de zéro.*

C'est précisément sous cette forme que M. Zeuthen a énoncé la proposition, en la limitant au cas où les courbes S et S′ n'ont que des singularités ordinaires. Mais de ce cas particulier on peut remonter au cas général. Tous les éléments qui figurent dans (2) se conservent dans les transformations uniformes. Or on sait qu'il est possible de trouver une courbe correspondant point par point à une courbe quelconque, et qui n'ait que des singularités ordinaires. On peut même faire en sorte que la transformée n'ait que des branches simples, ainsi que je l'ai démontré de diverses manières. Donc la relation (2), démontrée pour le cas des singularités ordinaires, s'étend d'elle-même au cas général.

4. Si l'on considère deux courbes gauches dont S et S′ soient les perspectives, tous les éléments ci-dessus considérés sur les courbes ou sur les perspectives ont, dans l'un et l'autre cas, les mêmes définitions. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S *et* S′ *sont gauches.*

Autre remarque : dans les démonstrations de ma Note *sur la conservation du genre,* et dans les déductions actuelles, rien n'empêche de supposer que les courbes S et S′ soient égales. Donc :

Les théorèmes I et II s'appliquent aussi au cas où les courbes S *et* S′ *coïncident.* Dans ce cas, où, bien entendu, la courbe peut être gauche, la formule (1) devient

$$(3) \qquad (k - k')(c - 2m) = \Sigma(g'n' - gn).$$

5. Soient deux courbes algébriques planes ou gauches S, S′ et un système de surfaces A. On peut faire correspondre les points a et a' de S, S′, par la condition que les points correspondants a, a' soient sur une même surface A. Appliquant alors à cette correspondance le théorème II, on trouvera que : *le nombre des surfaces d'un système qui touchent une courbe gauche de degré* m, *arête de rebroussement d'une développable de degré* c, *est égal à* $m\nu + c\mu$, μ *étant le nombre des surfaces du système qui passent par un point, et* ν *le nombre de celles qui touchent une droite,* théorème bien connu et qui a été démontré de diverses autres manières. Je n'insiste pas ici sur cette application, à cause de l'analogie qu'elle présente avec celle que je vais faire en détail. J'y aurai recours à ce théorème même, restreint au cas où la courbe est plane, mais entendu, d'autre part, d'une manière un peu plus générale, savoir :

Théorème III. — *Le nombre des éléments d'un connexe plan qui sont composés d'un point d'une courbe et de la tangente en* *ce point, est égal au produit des ordres de la courbe et du connexe augmenté du produit de leurs classes.*

Je donnerai d'ailleurs à la fin de cette Note une démonstration directe d'un théorème un peu plus étendu que le théorème III. Pour le moment, j'en admettrai l'exactitude.

6. On donne une série doublement infinie (A) de courbes A dans un plan, et deux courbes de ce plan S, S'. Je fais correspondre les points a, a' de S, S', par la condition qu'une courbe A touche S en a et passe en a'. Je forme alors l'équation (1).

Soit ρ le nombre des courbes A qui passent en un point et y touchent une droite. Désignant par M le degré de A, j'ai $k = \rho M m'$.

Soit μ le nombre des courbes A qui passent par deux points, et soit ν le nombre de celles qui passent par un point et touchent une droite. D'après le théorème III, j'ai

$$k' = m\nu + c\mu.$$

Il s'agit maintenant de déterminer le second membre de (1), c'est-à-dire de chercher tous les binômes $(g'n' - gn)$ qui ne sont pas nuls. A cet effet, je considère deux divisions principales, savoir : B($n = n' = 1$ g ou g' *supérieur à l'unité*) ; et C(n ou n' *supérieur à l'unité*). J'envisage d'abord les cas B.

Je suppose que a, a' soient deux points simples correspondants, et que g soit supérieur à l'unité. Il peut arriver que, parmi les ρ courbes A qui touchent S en a, quelques-unes soient confondues en une seule. Si ce fait n'a pas lieu, quelques-unes des courbes A peuvent être réduites à des courbes plus simples comptant plusieurs fois dans le degré de A. Enfin les courbes A peuvent ne présenter aucune de ces particularités ; c'est qu'alors une d'elles est tangente à S' en a'. Je réunis les deux premières circonstances en admettant que, parmi les ρ courbes A touchant S en a, il y en ait h qui se réunissent en une seule, composée elle-même de différentes courbes A_i dont l'ordre M_i compte s_i fois dans M.

Si l'on suppose la courbe S placée d'une manière arbitraire dans le plan de (A), cette circonstance ne peut se présenter que si elle a lieu pour chaque point l du plan, sous la condition qu'on adjoigne à ce point une droite déterminée λ. On doit donc supposer que cette décomposition des courbes A a lieu toutes les fois que le point l

par où on les fait passer et la droite λ qu'on leur assigne pour tangente en ce point font partie d'un certain connexe. Soient alors ν'' et μ'' l'ordre et la classe de ce connexe. Le nombre des points a de S où cette circonstance se présente est, d'après le théorème III, $m\nu''+c\mu''$. On a alors

$$n=n'=1,\quad g=hs_i,\quad g'=1,\quad n'g'-ng=-(hs_i-1).$$

La courbe A_i donne lieu à $M_i\,m'$ points analogues a'. On a ensuite à envisager les autres courbes qui s'adjoignent à A_i pour former une courbe A. Il peut y avoir, en outre, d'autres décompositions analogues. On voit que la somme de tous les binômes $(g'n'-gn)$ qui y sont relatifs est de la forme

$$\Sigma_1=-(m\nu_1+c\mu_1)\,m',$$

ν_1 et μ_1 étant des nombres qui ne dépendent que de (A).

Le second cas où, n et n' étant égaux à l'unité, g est supérieur à l'unité, est celui où A touche S et S'. Le contact avec S' est alors du premier ordre, si l'on suppose les courbes S et S' placées d'une manière arbitraire. Chacun de ces contacts donne

$$n=n'=1,\quad g=2,\quad g'=1,\quad n'g'-ng=-1.$$

Le théorème III fournit le nombre de ces contacts, qui est celui des courbes A touchant S et S'. D'où, pour la somme des binômes $(g'n'-gn)$, l'élément

$$\Sigma_2=-[mm'\mu'+(mc'+m'c)\,\nu+cc'\mu],$$

formule dans laquelle μ' désigne le nombre des courbes A qui touchent deux droites. Cette formule, je le répète, est une conséquence facile et connue du théorème III.

Dans la division B, j'ai à considérer maintenant les cas où g' diffère de l'unité. Ce cas s'offre ou bien si le système des courbes A passant en a' présente une décomposition analogue à la précédente, ou bien si A a, avec S, un contact du second ordre. Pour le cas de décomposition, on a une somme d'éléments

$$\Sigma_3=(m\nu_2+c\mu_2)\,m',$$

que l'on trouve en raisonnant comme ci-dessus. Tout d'abord, la décomposition étant supposée avoir lieu en a', les éléments de la somme relatifs à a' sont d'une forme telle que $(m\nu_2 + c\mu_2)$. Secondement, pour que cette décomposition ait lieu en a', il faut qu'il y ait, dans le plan, un lieu de points où elle se produise ; d'où le facteur m' dans l'expression de Σ_3.

Enfin, si l'on désigne par N le nombre des courbes A ayant avec S des contacts de second ordre, le second cas donne lieu à l'élément suivant de la somme cherchée :

$$\Sigma_4 = \mathrm{M}\, m' \mathrm{N}.$$

J'arrive maintenant à la division C, relative aux cas où les nombres n, n' sont différents de l'unité. A ces cas ne répond aucune des décompositions ci-dessus; en outre, un seul des nombres n, n' est supérieur à l'unité. Les hypothèses contraires répondraient à des positions particulières des courbes S, S'. Soit donc d'abord $n' > 1$. On a alors

$$n = 1, \quad g = n', \quad n' > 1, \quad g' = 1, \quad n'g' - ng = 0.$$

Ainsi ce cas ne donne lieu à aucun élément de la somme cherchée. Soit enfin $n > 1$. Ici g est l'unité; il faut déterminer g'. C'est à quoi on peut utilement employer le théorème I. Soient a, a' les points considérés sur S et S'. Si, sur une des branches de (S), système circulaire dont l'origine est en a, on prend un point a_1, à distance infiniment petite d'ordre n de a, il y correspond un point a'_1 dont l'ordre infinitésimal de la distance à a' est égal à g'. Par suite, g' est égal à l'ordre de la variation de la courbe A quand on passe de a à a_1. Soit ν l'ordre infinitésimal de l'angle dont la tangente de S a tourné quand on passe de a en a_1. La variation de la courbe A a pour ordre le plus petit des deux nombres ν, n. Donc g' est le plus petit de ces deux nombres; d'où résulte aisément ce dernier élément de la somme cherchée :

$$\Sigma_5 = -\rho \mathrm{M}\, m' \Sigma(n - \nu) = -\rho \mathrm{M}\, m' r,$$

le nombre r représentant la somme des nombres $(n - \nu)$ relatifs à tous les systèmes circulaires de branches de S pour lesquels ν est inférieur à n. Ce nombre r est donc ce que j'appelle le nombre des *inflexions effectives* des courbes corrélatives de S; c'est aussi le nombre des rebroussements ordinaires qui remplacent les singularités de la courbe S dans les équations de *Plücker*.

J'ai maintenant tous les éléments de l'équation (1) et je puis la former. On voit aisément que les termes contenant c' en facteur disparaissent, et que m' se trouve alors en facteur commun. Ce facteur supprimé, il ne reste plus aucun élément de la courbe S′, et l'on obtient une relation de la forme

$$N = \alpha c + \beta m + \rho r, \tag{4}$$

où α, β, ainsi que ρ, ne dépendent que de la série (A). La formule (4) donne le nombre des courbes A qui ont des contacts du second ordre avec la courbe S. C'est celle que j'ai obtenue par une voie toute différente dans un autre travail, et à un point de vue un peu plus étendu [1]. La formule elle-même fixe le sens des lettres α, β; quant à ρ, sa signification est déjà connue. De là l'énoncé suivant :

Théorème IV. — *Soit une série doublement infinie de courbes algébriques* A *dans un plan, et telle que* β *soit le nombre de ces courbes qui ont une droite pour tangente d'inflexion,* ρ *le nombre de celles qui passent par un point et y touchent une droite,* $(\alpha - 3\rho)$ *le nombre de celles qui ont un point donné pour point de rebroussement : le nombre des courbes* A *qui ont un contact du second ordre avec une courbe donnée est* $(\alpha c + \beta m + \rho r)$, *$c$ et m étant la classe et l'ordre de cette courbe, et r le nombre des rebroussements ordinaires qui représentent ses singularités dans les équations de Plücker.*

En désignant par s le nombre corrélatif de r, c'est-à-dire le nombre des inflexions qui représentent les singularités de S dans les équations de Plücker, et posant

$$2q = r + 3c = s + 3m,$$

mettant en outre les lettres P, D, initiales de *point* et *droite* au lieu de $(\alpha - 3\rho)$ et β, et désignant par C le nombre des courbes A qui ont des contacts du second ordre avec une conique, on peut mettre la relation (4) sous la forme

$$N = \frac{1}{3}(qC - rP - sD).$$

---

[1] Mémoire *Sur la recherche des points d'une courbe*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 3e série, t. II, p. 277.)

C'est sous cette forme que j'ai employé la relation (4) dans ma Note *Sur les degrés et les classes de certains lieux géométriques* (¹).

7. Au moyen de la même série (A) on peut faire correspondre de la même manière les points d'une même courbe S. Grâce à la formule (3) et au résultat précédent, on pourra ainsi calculer le nombre des courbes A qui touchent en deux points différents la courbe S. Je me borne à cette indication, la formule à laquelle on parvient étant, dans sa généralité, trop compliquée pour être utile. J'arrête ici ce qui concerne les applications de la formule de M. Zeuthen, et je vais donner une démonstration directe d'un théorème comprenant la proposition III, ainsi que je l'ai annoncé.

8. Soient, dans un plan, deux courbes S, S' entre les points desquelles existe comme ci-dessus une correspondance (k, k'). On considère un *connexe* C du même plan, c'est-à-dire une série triplement infinie de couples composés chacun d'un point l et d'une droite λ. Si l'on se donne λ, l décrit une courbe dont l'ordre est celui du connexe; je le désigne par ν. Si l'on se donne l, λ enveloppe une courbe dont la classe est celle du connexe; je la désigne par μ. Je vais chercher le nombre des éléments (l, λ) du connexe, qui sont composés d'un point a de S et de la tangente α' en un point a' de S', correspondant à a.

A chaque point a' correspondent divers points a. A chacun de ces points a correspondent, dans le connexe, diverses droites α passant par a'. L'ensemble de ces droites enveloppe une courbe dont je désigne par ω la classe. Je fais correspondre, sur une droite arbitraire L, les points A où L est rencontrée par les droites α, avec le point A' où L est rencontrée par la tangente α' en a'. Au point A correspondent ω points A', et aux points A', $k'c'\mu$ points A. On a donc $\omega + k'c'\mu$ coïncidences, parmi lesquelles chaque point a' situé sur L en entraîne $k'\mu$. Il reste donc pour le nombre des points cherchés

$$N = \omega + c'k'\mu - m'k'\mu.$$

Il reste à déterminer ω. Soit p un point arbitraire : pour chaque

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXIII, p. 705.

droite B menée par p, je détermine les points a qui lui correspondent dans le connexe et qui sont situés sur S. Je prends les points a correspondants sur S′, et je les joins à p par des droites B′. Je considère B et B′ comme des droites correspondantes de deux faisceaux issus de p. Les coïncidences répondent aux tangentes menées de p à l'enveloppe des droites α; leur nombre est donc ω.

A une droite B répondent $m\nu$ points a, et par suite $mk\nu$ droites B′. A une droite B′ répondent m' points a', $m'k'$ points a, $m'k'\mu$ droites B; donc

$$(5)\qquad \begin{cases} \omega = mk\nu + m'k'\mu. \\ \mathrm{N} = c'k'\mu + mk\nu. \end{cases}$$

Théorème V. — *Si entre deux courbes* S, S′ *a lieu la correspondance définie au théorème II, le nombre des éléments d'un connexe d'ordre ν et de classe μ, qui sont composés d'un point de* S *et d'une tangente correspondante de* S′, *est égal à $c'k'\mu + mk\nu$.*

Si S et S′ coïncident, k et k' sont égaux à l'unité, et l'on obtient comme corollaire le théorème III.

9. La conception du couple (l, λ) comme élément du plan donne lieu à celle des trois êtres géométriques : *connexe* triplement infini; *coïncidence* doublement infinie; *couple de courbes* simplement infini. A la proposition qui, dans la Géométrie plane ordinaire, fournit le nombre des points d'intersection de deux courbes, répondent ici deux propositions. La première donne le nombre des intersections d'un connexe avec un couple de courbes : c'est le théorème V. La seconde donne le nombre des intersections de deux coïncidences. Cette seconde proposition se déduit immédiatement du théorème suivant établi par M. Zeuthen [1] :

Soit donnée dans un plan une correspondance telle :

1° *Qu'à un point quelconque* X *correspondent α' points* X′, *et à un point* X′ *α points* X;

2° *Que le lieu des points* X *ou* X′ *dont les homologues se trouvent sur une droite donnée soit une courbe d'ordre β.*

Alors il existe dans le plan $\alpha + \alpha' + \beta$ points où deux points homologues X *et* X′ *coïncident.*

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVIII, p. 1553.

Soit G une coïncidence, c'est-à-dire une série doublement infinie de couples (l, λ) telle, qu'à une droite λ correspondent c points l, et à un point l, γ droites λ, et en outre, que h soit le nombre des couples (l, λ) dans lesquels l est sur une droite donnée et λ passe par un point donné. Je considère une seconde coïncidence analogue G′, et je désigne par c', γ', h' les nombres analogues. Je fais correspondre les points l et l' par la condition que les droites correspondantes λ, λ' coïncident. Si alors l et l' coïncident en même temps, j'obtiens une intersection des deux figures G, G′. Il suffit donc d'appliquer ici la proposition de M. Zeuthen. On a évidemment

$$\alpha' = c'\gamma, \quad \alpha = c\gamma', \quad \beta = hh';$$

d'où, pour le nombre des intersections de G et G′,

$$N = c\gamma' + hh' + c'\gamma. \tag{6}$$

Les deux formules (5) et (6) se confondent dans un seul énoncé si l'on emploie les notations symboliques que j'ai introduites dans cet ordre de recherches et que M. Schubert a employées avec tant de succès (¹).

Par la lettre D j'indique la condition, pour le point l, d'être situé sur une droite donnée, et par la lettre P, la condition, pour la droite λ, de passer par un point. Par D^2P^2 on indique alors le nombre des couples (l, λ) tels, que l soit l'intersection de deux droites données, c'est-à-dire un point donné, et que λ soit une droite donnée. Ainsi le symbole D^2P^2 est égal à l'unité; les autres symboles du quatrième ordre sont nuls. Cela posé, j'appelle *modules* d'un connexe et d'un couple de courbes les quantités

$$(\mu P + \nu D), \quad PD(c'k'D + mkP),$$

et *module* d'une coïncidence la quantité

$$\gamma P^2 + hPD + cD^2.$$

On peut alors énoncer les formules (5) et (6) en disant que *l'ensemble des éléments (l, λ) défini par i équations* $(i = 1, 2, 3)$ *est*

(¹) Notamment dans son Mémoire : *Beiträge zur abzählenden Geometrie* (*Math. Annalen*, t. X, p. 1).

représenté par un module, qui est une fonction homogène et d'ordre i des symboles P, D. *Le nombre des intersections de deux pareils êtres est égal au produit symbolique de leurs modules.*

Ce théorème s'étend à la Géométrie, où l'on considère comme élément de l'espace le couple formé par un point et un plan. Je le montrerai dans une autre occasion.