Bulletin de la S. M. F.

Et. Delassus

Sur les systèmes de Lagrange à paramètre principal

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 126-146

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__126_1>

SUR LES SYSTÈMES DE LAGRANGE A PARAMÈTRE PRINCIPAL;

PAR M. ÉT. DELASSUS.

1. Nous dirons qu'un système S_2 de n équations différentielles du second ordre définissant n paramètres $a, b_1, \ldots, b_{n-1}$ en fonction de la variable t est à paramètre principal a, s'il possède n intégrales premières

$$\theta_1 = C_1, \quad \ldots, \quad \theta_n = C_n, \tag{1}$$

où les paramètres secondaires b ne figurent que par leurs dérivées b'. L'élimination des b' entre les équations (1) fournira immédiatement *l'équation principale*

$$F(a, a', t, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

déterminant a et fournissant l'intégration complète de S_2 par quadratures chaque fois qu'elle sera elle-même intégrable par quadratures, ce qui arrivera, par exemple, quand les n intégrales seront indépendantes de t, car cette variable ne figurera évidemment pas alors dans l'équation principale.

2. Nous donnant *a priori* l'équation (2), on peut évidemment trouver d'une infinité de façons des fonctions θ de a, de a', de t et de $n - 1$ autres paramètres $b'_1, \ldots, b'_n$ telles que F résulte de l'élimination des b' entre les équations (1), puis former un système S_2 admettant ces n intégrales premières; donc, *l'équation principale peut être une équation absolument quelconque.*

3. Le système S_2 est équivalent au système S'_2 déduit de (1) par dérivation, ce qui n'introduit pas les b et donne pour les a'', b''_1, $b''_2, \ldots, b''_{n-1}$ des expressions contenant a, a', t et les b'; réciproquement, soit un système de la forme

$$(S_2) \qquad \begin{cases} a'' = A(a, a', b', t), \\ b''_i = B_i(a, a', b', t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{cases}$$

On obtiendra des intégrales premières indépendantes des b comme solutions de l'équation linéaire

$$\frac{\partial\theta}{\partial a'} A + \sum \frac{\partial\theta}{\partial b'} B + \frac{\partial\theta}{\partial a} a' + \frac{\partial\theta}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Comme cette équation est à $n + 2$ variables, on peut, d'une infinité de façons, trouver un système de n intégrales principales, c'est-à-dire indépendantes des b. Le même système pourra donc donner naissance à une infinité d'équations principales.

4. Soit un groupe de $n - 1$ intégrales principales

$$(G) \qquad \theta_1 = C_1, \quad \ldots, \quad \theta_{n-1} = C_{n-1},$$

c'est-à-dire satisfaisant à l'équation (3).

Soit θ une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale quelconque. Les équations G définissent les b' en fonction de a, a', t, $C_1, \ldots, C_{n-1}$ et en portant dans la $n^{\text{ième}}$ intégrale

$$\theta = C,$$

on a évidemment l'équation principale correspondante

$$(4) \qquad F(a, a', t, C_1, \ldots, C_{n-1}) = C.$$

Tout système de fonctions a, $b'_1, \ldots, b'_{n-1}$ vérifiant (S_2) vérifiera, pour des valeurs convenables de $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, C, les équations (G), (4) et la première équation de S_2, donc aussi toutes les équations qu'on pourra en déduire par dérivations et combinaisons. En particulier, il vérifiera l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} a'' + \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

déduite de (4) par dérivation, et l'équation

$$(5) \qquad a'' = \mathcal{A}(a, a', t, C_1, \ldots, C_{n-1})$$

obtenue en portant dans la première équation de (S_2) les valeurs des b' fournies par les équations (G) et, par suite, l'équation

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} \mathcal{A} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0$$

qui en résulte par élimination de a''.

C'est une identité en t, mais comme S_2 admet une solution correspondant à des valeurs arbitraires de $C_1, \ldots, C_{n-1}$ et à des valeurs initiales quelconques a_0, a'_0 pour $t = t_0$, c'est, en réalité, une identité par rapport à toutes les variables a, a', t, $C_1, \ldots, C_{n-1}$. Nous l'appellerons *l'équation fondamentale du groupe* G et nous remarquerons immédiatement qu'elle exprime ce fait presque intuitif que *toute équation principale obtenue en complétant le groupe* G *au moyen d'une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale est une intégrale première de l'équation*

$$a'' = \mathcal{A}(a, a', t, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

à laquelle se réduit (S_2) *en vertu des intégrales* (G).

5. Étudions le cas important des équations principales indé-

pendantes de t, cas dans lequel on a l'intégration de (S_2) par quadratures.

Pour que (G) puisse, par adjonction d'une $n^{\text{ième}}$ intégrale principale, fournir une telle équation principale, il faut que l'équation fondamentale de G admette des intégrales indépendantes de t, ce qui exige manifestement que t ne figure pas dans $\mathcal{A}$. Nous désignerons par (Γ) les groupes (G) satisfaisant à cette condition. Les équations principales indépendantes de t seront alors fournies par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} \mathcal{A} = 0$$

qui admet une intégrale indépendante de t, soit

$$f(a, a', C_1, \ldots, C_{n-1})$$

et donne

$$F = \Phi(f, t, C_1, \ldots, C_{n-1}).$$

F ne doit pas contenir t qui, ne figurant pas dans f, ne doit pas figurer dans Φ ; les équations principales indépendantes du temps sont donc de la forme

$$\Phi(f, C_1, \ldots, C_{n-1}) = C$$

et se réduisent toutes à l'équation unique

$$f = \text{const.}$$

Ainsi : *toutes les équations principales indépendantes de t qui peuvent être obtenues au moyen d'un même groupe* (Γ) *se réduisent à une seule.*

Si l'on remarque que l'équation principale n'est que l'intégrale complémentaire

$$\theta = C,$$

réduite au moyen des intégrales (Γ), on voit que *les intégrales principales susceptibles de fournir avec* (Γ) *une équation principale indépendante de t se réduisent toutes, en vertu des intégrales* (Γ) *à la même relation*

$$f(a, a', C_1, \ldots, C_{n-1}) = \text{const.}$$

6. Appliquons ces généralités aux systèmes (S_2) satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A *est une forme quadratique, homogène ou non, de* a' *et des* b' ;

2° (S_2) *possède un système* (Γ) *d'intégrales principales linéaires;*

3° (S_2) *possède une intégrale principale* J *algébrique et entière par rapport à* $a', b'_1, \ldots, b'_n$;

4° *Les intégrales* (Γ) *et* J *conduisent à une équation principale indépendante de* t.

Les intégrales (Γ) fournissent les b' fonctions linéaires de a' et, en portant dans J, on a une équation principale

$$F(a, a', C_1, \ldots, C_{n-1}) = C,$$

dont le premier membre est un polynome entier en a' satisfaisant à

$$(7) \qquad \frac{\partial F}{\partial a} a' + \frac{\partial F}{\partial a'} \mathcal{A} = 0,$$

$\mathcal{A}$ étant ici un polynome du second degré en a'

$$\mathcal{A} = \alpha a'^2 + \beta a' + \gamma,$$

à coefficients fonctions de $a, C_1, \ldots, C_{n-1}$.

Supposons d'abord que le groupe (Γ) soit tel qu'on ait

$$\gamma = 0,$$

l'équation (7) se réduit à

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial a'}(\alpha a' + \beta) = 0$$

et possède une intégrale linéaire en a'

$$f = \lambda a' + \mu,$$

donc

$$F = \Phi(\lambda a' + \mu),$$

et l'équation principale algébrique et entière à l'inconnue a' possède la propriété de se transformer en une équation à coefficients constants par un simple changement linéaire d'inconnue. Dans ce cas, on peut dire que *l'intégrale* J *ou bien est linéaire, ou bien est réductible à une relation linéaire en vertu des intégrales* (Γ).

Supposons en second lieu qne (Γ) ne donne pas un cofficient γ identiquement nul. L'équation (7) est alors

$$\frac{\partial F}{\partial a'}(\alpha a'^2 + \beta a' + \gamma) = - a' \frac{\partial F}{\partial a},$$

les deux membres sont des polynomes entiers en a', le second contient a' en facteur et comme γ n'est pas nul, a' doit être en facteur dans $\frac{\partial F}{\partial a'}$, ce qui revient à dire que F ne contient pas de terme du premier degré en a', donc :

Si l'intégrale J *n'est pas réductible à la forme linéaire au moyen des intégrales* (Γ), *le terme du premier degré en a' n'existe jamais dans l'équation principale supposée indépendante de t.*

En particulier :

Si une intégrale quadratique, non réductible à la forme linéaire au moyen des intégrales (Γ), *fournit une équation principale indépendante de t, cette équation est de la forme*

$$a'^2 = \Psi(a, C_1, \ldots . C_{n-1}, C).$$

II.

7. Les équations de Lagrange du mouvement d'un système holonome soumis à des forces ne dépendant que de la position sont de la forme considérée dans la première partie. Mises sous forme résolue, elles donnent des fonctions A et B_i qui sont toutes quadratiques par rapport aux q'. Donc, elles sont dans le cas particulier qui a été examiné en dernier lieu. Nous pourrons donc dire :

Si un système de Lagrange possède $n - 1$ intégrales linéaires et une intégrale quadratique indépendantes des $n - 1$ paramètres $b_1, \ldots, b_{n-1}$ et conduisant à une équation principale indépendante du temps, cette équation est de la forme

$$a'^2 = \Psi(a)$$

ou de la forme

$$\alpha(\lambda a' + \mu)^2 + \beta(\lambda a' + \mu) + \gamma = 0,$$

α, β, γ *étant des constantes et* λ, μ *des fonctions de a.*

8. Additionnons les équations de Lagrange après les avoir respectivement multipliées par les q' correspondants et convenons de dire qu'on a *l'intégrale des forces vives* chaque fois que cette combinaison sera une dérivée exacte. On peut l'écrire en décomposant la force vive $2T$ en groupes homogènes

$$\frac{d}{dt}(T_2 - T_0) + \frac{\partial T}{\partial t} - \Sigma Q q' = 0,$$

il faudra donc supposer

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{d\Omega}{dt}, \tag{8}$$

et l'intégrale des forces vives, sous sa forme générale, sera

$$T_2 - T_0 + \Omega = C. \tag{9}$$

9. La condition (8) exige que T_2 ne contienne pas t et que l'on ait

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{\delta \Omega}{\delta t},$$

en désignant par $\frac{\delta}{\delta t}$ la dérivée prise en ne tenant pas compte du t qui peut figurer explicitement.

Nous conviendrons de dire qu'*un système de Lagrange est un système à fonction* V si T_2 est indépendant de t et si la quantité

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q'$$

est la dérivée exacte $\frac{\delta}{\delta t}$ d'une fonction des q et de t, fonction que nous conviendrons de toujours représenter par la lettre V.

Nous considérerons ces systèmes en même temps que *les systèmes à fonction* U définis par la condition

$$\Sigma Q q' = \frac{\delta U}{\delta t}.$$

10. On sait qu'un système à fonction U possède une infinité de fonctions génératrices G

$$G = T + U + \frac{d\theta}{dt},$$

θ fonction arbitraire des q et de t, permettant de l'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial G}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial G}{\partial q_i} = 0.$$

Considérons de même un système à fonction V. L'égalité de définition

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \Sigma Q q' = \frac{\delta V}{\delta t}$$

donne

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T_1}{\partial q'_i} - Q_i = \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

ou, puisque T_2 ne contient pas T et que T_0 ne contient pas les q',

$$Q_i = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}.$$

Portant ces expressions des Q_i dans les équations de Lagrange, celles-ci deviennent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial q'_i}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial(T-V)}{\partial q'_i} - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = 0$$

ou enfin

$$\frac{\delta}{\delta t}\left[\frac{\partial(T-V)}{\partial q'_i}\right] - \frac{\partial(T-V)}{\partial q_i} = 0.$$

Si alors on pose

$$\Gamma = T - V + \frac{\delta\theta}{\delta t} + f(t),$$

θ étant une fonction arbitraire des q et de t et $f(t)$ une fonction arbitaire de t, les équations de Lagrange s'écriront sous la forme

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0.$$

Les systèmes à fonction V possèdent donc des fonctions génératrices Γ donnant une forme canonique analogue à celle des systèmes à fonction U, mais où l'opération $\frac{d}{dt}$ est remplacée par l'opération $\frac{\delta}{\delta t}$.

11. Les systèmes à intégrale des forces vives sont forcément des systèmes à fonction V, mais la condition (8) montre alors que l'on a

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t}.$$

si donc on prend

$$\Gamma = T - V$$

et si l'on décompose en groupes homogènes, on aura

$$\Gamma_2 = T_2,$$
$$\Gamma_1 = T_1,$$
$$\Gamma_0 = T_0 - V,$$

de sorte que Γ_0 sera, comme Γ_2, indépendante de t. En outre, au moyen de cette fonction Γ, l'intégrale (9) des forces vives s'écrira simplement

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = \text{const.}$$

qui met en évidence le fait que *l'intégrale des forces vives est toujours indépendante de t.*

Réciproquement, partons du système à fonction V, écrit au moyen d'une quelconque de ses fonctions génératrices Γ et effectuons la combinaison des forces vives

$$\Sigma q' \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right] = 0,$$

on aura

$$\frac{\delta}{\delta t}\Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} - \left[\Sigma q'' \frac{\partial \Gamma}{\partial q'} + \Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q}\right] = 0$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta t}\Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q} - \frac{\delta \Gamma}{\delta t} = 0$$

ou

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\Sigma q' \frac{\partial \Gamma}{\partial q} - \Gamma\right) = 0$$

ou enfin

$$\frac{\delta}{\delta t}(\Gamma_2 - \Gamma_0) = 0.$$

Si on l'écrit

$$\frac{d}{dt}(\Gamma_2 - \Gamma_0) + \frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} = 0,$$

puisque Γ_2 ne contient pas t, on voit que la condition nécessaire et suffisante d'existence de l'intégrale des forces vives est que

$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t}$ soit une dérivée exacte et, comme elle ne contient pas les q', il faut que ce soit une fonction de t seulement, soit

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial t} = f(t),$$

et alors, la nouvelle fonction génératrice

$$\Gamma - \int f(t)\,dt$$

ne contiendra plus t dans sa portion de degré zéro. Ainsi :

Pour qu'un système à fonction V *possède l'intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il possède une fonction génératrice* Γ *ne contenant le temps que dans sa portion* Γ_1 *et alors, au moyen de cette fonction* Γ, *l'intégrale des forces vives s'écrit*

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = \text{const.},$$

théorème qui est l'analogue du suivant démontré ailleurs (¹) :

Pour qu'un système à fonction U *possède l'intégrale des forces vives, il faut et il suffit qu'il possède une fonction génératrice* G *ne contenant pas le temps, et alors l'intégrale des forces vives s'écrit, au moyen de cette fonction* G,

$$G_2 - G_0 = \text{const.}$$

Ajoutons enfin la remarque bien évidente qui suit : *si un système à fonction* V *possède une fonction génératrice* Γ *indépendante du temps, c'est, en même temps, un système à fonction* U car, pour une telle fonction Γ, l'opération $\frac{\delta}{\delta t}$ est équivalente à l'opération $\frac{d}{dt}$ et les équations ainsi écrites montrent que Γ est une fonction G, de sorte qu'il existe bien une fonction U.

12. La forme générale

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0 \qquad (\Gamma_2 \text{ et } \Gamma_0 \text{ indépendants de } t),$$
$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = h$$

(¹) Et. Delassus, *Sur les forces vives équivalentes* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1912).

des systèmes à intégrale des forces vives et de cette intégrale va nous permettre d'étudier complètement *les systèmes de Lagrange à intégrale des forces vives et à paramètre principal mis en évidence par cette intégrale des forces vives et par n — 1 intégrales linéaires indépendantes du temps.*

Alors Γ_2 et Γ_0 ne contiennent ni t ni les b ; Γ_0 est une fonction de a et Γ_2 est de la forme

$$2\Gamma_2 = \text{A}\, a'^2 + 2a'\,\text{P}_1(b') + \text{P}_2(b'),$$

P_1 polynome homogène du premier degré aux b', P_2 polynome homogène du second degré aux b' ; A, les coefficients de P_1 et ceux de P_2 étant des fonctions de a.

Nous savons *a priori* que l'équation principale obtenue sera indépendante du temps et de l'une des deux formes

$$a'^2 = \text{F}(a),$$
$$\alpha(\lambda a' + \mu)^2 + \beta(\lambda a' + \mu) + \gamma = 0 \qquad (\alpha, \beta, \gamma \text{ constantes})$$

que, pour des raisons qui apparaîtront ultérieurement, nous appellerons *forme normale* et *forme accidentelle.*

Soient

$$(10) \qquad \text{I}_1 = \text{C}_1, \quad \ldots, \quad \text{I}_{n-1} = \text{C}_{n-1}$$

les $n - 1$ intégrales linéaires et

$$(11) \qquad \frac{d\text{I}_1}{dt} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d\text{I}_{n-1}}{dt} = 0$$

les équations du second ordre qu'on en tire par dérivation.

Des équations (10) nous tirerons les b' sous la forme

$$(12) \qquad b'_i = \lambda_i a' + \mu_i,$$

les λ étant des fonctions de a et les μ des fonctions linéaires des C à coefficients fonctions de a telles que a étant considéré comme donné, on puisse déterminer les C de façon que les μ prennent des valeurs arbitrairement choisies. Portons les b' dans l'intégrale des forces vives

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = h$$

et cherchons les conditions pour que le coefficient de a' soit nul, quels que soient les C. Il suffit de substituer dans Γ_2, on aura

$$\Gamma_2(a', \lambda a' + \mu),$$

et si l'on pose

$$\Gamma_2(1, \lambda) = \Lambda,$$

le coefficient de a' sera

$$\sum \mu \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda}$$

et ne pourra être nul, quels que soient les C, que si l'on a

$$(13) \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_{n-1}} = 0.$$

Considérons les équations (11) du second ordre ; en les résolvant par rapport aux b'', on en tirera

$$(14) \qquad b''_i = \lambda_i a'' + \ldots,$$

les λ étant ceux des formules (12). Portons dans l'équation de Lagrange qui correspond à un b quelconque et cherchons le coefficient de a'' ; il faudra prendre

$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_k},$$

y remplacer a' et les b' par a'' et les b'', puis les b'' par les $\lambda a''$. Le coefficient de a'' sera alors $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_k}$ où l'on aura remplacé a' par 1 et les b' par les λ, c'est-à-dire

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda_k}$$

donc sera nul. En vertu des équations (11), les équations de Lagrange qui correspondent aux b se réduisent à des relations du premier ordre, c'est-à-dire à des identités, puisque leurs paramètres et leurs dérivées premières peuvent être prises arbitrairement. Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation principale soit de la forme normale est que les $n - 1$ intégrales linéaires résultent de combinaisons faites uniquement sur les $n - 1$ équations de Lagrange qui correspondent aux paramètres secondaires b.

Et, par exclusion :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation principale soit de la forme accidentelle est que, parmi les n — 1 intégrales linéaires, il y en ait au moins une qui résulte d'une combinaison où figure effectivement l'équation de Lagrange qui correspond au paramètre a.

Commençons par étudier la forme accidentelle.

Soient

$$\mathcal{A}(\Gamma) = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial a'}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial a} = 0,$$
$$\mathcal{B}_i(\Gamma) = \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial F}{\partial b'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial b_i} = 0$$

les équations de Lagrange. Il existe alors une intégrale

$$I = \xi a' + \Sigma \eta b' + \zeta = \text{const.}$$

telle que l'on ait identiquement

$$\frac{dI}{dt} = \mu \mathcal{A}(\Gamma) + \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma)$$

avec

$$\mu \neq 0.$$

Si l'on groupe les termes par ordre, on voit immédiatement que cette identité se décompose en trois autres

$$\frac{d}{dt}(\xi a' + \Sigma \eta b') = \mu \mathcal{A}(\Gamma_2) + \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_2),$$
$$\frac{d\zeta}{da} a' = \mu \mathcal{A}(\Gamma_1) + \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_1),$$
$$0 = \mu \mathcal{A}(\Gamma_0) + \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_0).$$

Comme Γ_2 ne contient ni t ni les b, la première montre, par identification des coefficients de a'' et des b'', que μ et les λ sont indépendants de t et des b, ce sont des fonctions de a.

On a

$$\mu \mathcal{A}(\Gamma_2) + \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_2) = \mu \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a'}\right) + \Sigma \lambda_i \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i}\right) - \mu \frac{\partial \Gamma_2}{\partial a};$$

le premier terme et le second ne donnent que des termes en a'', des termes aux b'' et des termes du second degré contenant a' en facteur ; les seuls termes quadratiques aux b' proviennent de $\frac{\partial \Gamma_2}{\partial a}$ et leur ensemble est

$$\mu \frac{\partial P_2}{\partial a}.$$

Or ces termes ne figurent pas dans le premier membre; donc P_2 doit être indépendant de a, puisque μ n'est pas nul.

Considérons la troisième identité; elle se réduit à

$$0 = -\mu \frac{d\Gamma_0}{da}$$

et, comme μ n'est pas nul, Γ_0 est une constante que l'on peut supprimer dans Γ.

Considérons enfin la deuxième identité. Elle n'apprend rien par elle-même sur Γ_1, mais si nous tenons compte de l'existence des $n - 1$ intégrales linéaires, nous aurons $n - 1$ identités analogues, dans lesquelles un au moins des μ n'est pas nul, et auxquelles nous joindrons l'identité des forces vives

$$a' \mathcal{A}(\Gamma_1) + \Sigma b'_i \mathcal{B}_i(\Gamma_1) = 0,$$

qui a lieu parce que Γ_1 est linéaire et homogène.

Des $n - 1$ premières nous tirerons $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ (parce que l'un des μ n'est pas nul) et $n - 2$ des quantités $\mathcal{B}_i(\Gamma_1)$ en fonction par exemple de $\mathcal{B}_{n-1}(\Gamma)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\Gamma_1) &= u_0 \quad \mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1) + v_0 \quad a', \\
\mathcal{B}_1(\Gamma_1) &= u_1 \quad \mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1) + v_1 \quad a', \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\mathcal{B}_{n-2}(\Gamma_1) &= u_{n-2}\, \mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1) + v_{n-2} a',
\end{aligned}$$

les u et v étant des fonctions de a. Portant dans la $n^{\text{ième}}$ elle deviendra

$$\begin{aligned}
&(u_0 a' + u_1 b'_1 + \ldots + u_{n-2} b'_{n-2} + b'_{n-1})\, \mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1) \\
&\quad = - a'(v_0 a' + v_1 b'_1 + \ldots + v_{n-2} b'_{n-2}).
\end{aligned}$$

Le second membre ne contient pas b'_{n-1} et le second le contient effectivement si $\mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1)$ n'est pas nul. Si cette quantité est nulle, l'identité exige que tous les v soient nuls et alors tous les $\mathcal{B}(\Gamma_1)$ ainsi que $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ sont nuls.

Mais alors Γ_1 ne donne aucun terme dans les équations de Lagrange et l'on peut le supprimer dans Γ de sorte que le système admet des fonctions génératrices Γ ou G, puisque t n'y figure pas, de la forme

$$2\Gamma = 2G = Aa'^2 + 2a'P_1 + P_2,$$

P_2 étant à coefficients constants. Réciproquement G étant indépendant des b, un tel système admet les intégrales principales immédiates fournies par les équations relatives aux b

$$\frac{\partial G}{\partial b'_1} = C_1, \quad \ldots, \quad \frac{\partial G}{\partial b'_n} = C_n,$$

de sorte qu'en employant ces intégrales visibles *a priori* on est fatalement dans le cas de l'équation principale de forme normale. Pour obtenir une équation de forme accidentelle, il faut ne pas employer ces intégrales qui résultent uniquement des équations $\mathfrak{B}(\Gamma) = 0$. Effectivement il existe une autre intégrale. En effet, les équations de Lagrange sont toutes de la forme

$$R_1(b'') + Ha'' + Ka'^2 = 0,$$

les R_1 étant des fonctions linéaires à coefficients constants, les H et les K des fonctions de a. Si l'on fait une combinaison linéaire à coefficients constants de façon à éliminer les b'' on tombe sur une équation de la forme

$$f(a)a'' + \varphi(a)a'^2 = 0,$$

qui, bien visiblement, admet une intégrale linéaire de la forme

$$\psi(a)a' = \text{const.}$$

Cette $n^{\text{ième}}$ intégrale première est en réalité l'équation principale qu'on obtient ainsi sous forme linéaire sans passer par l'intégrale des forces vives.

Ainsi : *Lorsqu'un système est dans le cas qui pourrait conduire à la forme accidentelle de l'équation principale, il possède $n - 1$ intégrales immédiates au moyen desquelles il se trouve forcément dans le cas de la forme normale de l'équation principale.*

14. Étudions maintenant le cas où l'on a forcément la forme normale, c'est-à-dire où les $n - 1$ intégrales linéaires sont des conséquences des équations $\mathfrak{B}_i(\Gamma) = 0$; les identités analogues à celles du cas précédent se réduisent aux deux premières

$$\frac{d}{dt}(\xi a' + \Sigma \eta b') = \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_2) = \Sigma \lambda_i \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i}\right) = \frac{d}{dt}\Sigma \lambda_i \frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} - a' \Sigma \frac{d\lambda_i}{da}\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'},$$

$$\frac{d\zeta}{da} a' = \Sigma \lambda_i \mathcal{B}_i(\Gamma_1),$$

la première montre que

$$a' \Sigma \frac{d\lambda_i}{da}\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'}$$

doit être une dérivée exacte d'une forme linéaire de a' et des b' à coefficients fonctions de a, ce qui est absurde puisqu'elle ne contient pas les dérivées secondes et elle ne peut pas être la dérivée d'une fonction de a et des b puisqu'elle est quadratique aux a', b', elle doit être nulle, donc les $\frac{d\lambda}{da}$ sont nuls et les λ sont des constantes. Les quantités $\mathcal{B}_i(\Gamma)$ possèdent donc $n-1$ combinaisons linéaires distinctes et à coefficients constants qui sont des dérivées exactes de sorte que ces $n-1$ quantités elles-mêmes sont des dérivées exactes.

On a

$$\mathcal{B}_i(\Gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i}\right) + \mathcal{B}_i(\Gamma_1),$$

donc les $\mathcal{B}_i(\Gamma_1)$ sont des dérivées exactes. Or, l'identité des forces vives pour Γ_1

$$a' \mathcal{A}(\Gamma_1) + \Sigma b'_i \mathcal{B}_i(\Gamma_1) = 0$$

montre que, quels que soient les b', la quantité

$$\Sigma b'_i \mathcal{B}_i(\Gamma_1)$$

doit être divisible par a'. Il faut donc que tous les $\mathcal{B}_i(\Gamma_1)$ contiennent a' en facteur, et, comme ce sont des dérivées exactes, ce sont les dérivées de fonctions de a seulement

$$\mathcal{B}_1(\Gamma_1) = \frac{d}{dt}\omega_1(a), \qquad \ldots, \qquad \mathcal{B}_{n-1}(\Gamma_1) = \frac{d}{dt}\omega_{n-1}(a).$$

Posons alors

$$\Phi = \Gamma_1 - \Sigma \omega_i b'_i,$$

on aura

$$\mathcal{B}_1(\Phi) = 0, \qquad \ldots, \qquad \mathcal{B}_{n-1}(\Phi) = 0$$

et, en vertu de l'identité des forces vives pour Φ,

$$\mathcal{A}(\Phi) = 0.$$

Il en résulte que Γ_1 et $\Sigma\omega_i b'_i$ donneront les mêmes termes dans les équations de Lagrange de sorte que le système possédera une fonction génératrice Γ

$$\Gamma_2 + \Sigma\,\omega_i b'_i + \Gamma_0$$

indépendante de t et des b. Ce sera aussi une fonction G. Ainsi, et en tenant compte du résultat du paragraphe précédent, nous pouvons dire :

Les seuls systèmes qui sont à paramètre principal, au moyen de l'intégrale des forces vives et de $n - 1$ intégrales linéaires indépendantes du temps, sont les systèmes à fonction U *possédant une fonction génératrice* G *indépendante de t et des b. Cette fonction met en évidence et d'une façon immédiate l'intégrale des forces vives et $n - 1$ intégrales linéaires, et l'équation principale déduite de ces n intégrales est toujours de la forme normale.*

On peut dire plus simplement que les systèmes possédant cette propriété sont forcément dans le *cas régulier* d'intégration par quadratures (¹) et l'on peut remarquer, à un point de vue pratique, qu'il n'est pas nécessaire de chercher la fonction G indépendante de t et des b. Quelle que soit cette fonction G, les équations de Lagrange sont les mêmes, le changement de fonction G ne fait que modifier le groupement de leurs termes. Si l'on constate qu'on a l'intégrale des forces vives, que les équations relatives aux b sont des dérivées exactes et que toutes ces intégrales sont indépendantes de t et des b, on sera assuré d'obtenir, par élimination des b', une équation principale de forme normale.

15. Les systèmes de Lagrange à intégrale des forces vives et dont $n - 1$ équations sont des dérivées exactes possèdent des propriétés intéressantes. Désignons par $b_1, \ldots, b_{n-1}$ les paramètres qui correspondent à ces équations et par a le $n^{\text{ième}}$ paramètre. Par hypothèse Γ_2 et Γ_0 sont indépendants du temps.

(¹) Et. Delassus, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1912.

Et

$$\mathfrak{B}_i(\Gamma) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial b'_i}\right) - \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial b'_i} + \frac{\partial\Gamma_2}{\partial b_i} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial b_i} + \frac{\partial\Gamma_0}{\partial b_i}\right]$$

doit être une dérivée exacte, de sorte que le crochet doit aussi être une dérivée exacte, ce qui exige qu'il ne contienne pas de termes quadratiques $\frac{\partial\Gamma_2}{\partial b_i}$; donc Γ_2 doit être indépendant des b.

$\mathfrak{B}_i(\Gamma_2)$ est alors une dérivée exacte, donc les quantités

$$\mathfrak{B}_i(\Gamma_1 + \Gamma_0),$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{B}_i(\Gamma_1) - \frac{\partial\Gamma_0}{\partial b_i},$$

doivent être des dérivées exactes de fonctions ω_i de a, des b et de t. On aura donc

$$\mathfrak{B}_i(\Gamma_1) = \frac{\delta\omega_i}{\delta t},$$

$$-\frac{\partial\Gamma_0}{\partial b_i} = \frac{\partial\omega_i}{\partial t}.$$

D'après l'identité des forces vives pour Γ_1 les $\mathfrak{B}_i(\Gamma_1)$ doivent contenir a' en facteur, donc les ω_i ne contiennent pas les b et d'autre part, comme Γ_0 ne contient pas t, les $\frac{\partial\omega_i}{\partial t}$ sont indépendants de t et les ω_i sont de la forme

$$\omega_i = k_i t + h_i,$$

les k et les h étant des fonctions de a. Il en résulte

$$\frac{\partial\Gamma_0}{\partial b_i} = -k_i,$$

donc

$$\Gamma_0 = k_0 - \Sigma k_i b_i,$$

k_0 étant une nouvelle fonction de a.

Posons

$$\Phi = \Gamma_1 - \Sigma\,\omega_i b'_i.$$

On aura

$$\mathfrak{B}_i(\Phi) = \mathfrak{B}_i(\Gamma_1) - \frac{\delta\omega_i}{\delta t} = 0.$$

Les $\mathfrak{B}_i(\Phi)$ étant nuls, l'identité des forces vives pour Φ montre que $\mathfrak{A}(\Phi)$ est aussi nulle, de sorte que Γ_1 et $\Sigma\omega_i b'_i$ sont équivalentes au point de vue des équations de Lagrange et qu'on obtient une nouvelle fonction génératrice en remplaçant Γ_1 par

$$\Sigma \omega_i b'_i$$

qui ne dépend pas des b.

Finalement nous voyons que le système possède une fonction génératrice de la forme

$$\Gamma_2 + \Sigma(k_i t + h_i) b'_i + k_0 - \Sigma k_i b_i,$$

Γ_2 étant indépendant de t et des b et les k et h étant des fonctions de a.

Les n intégrales sont alors

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = (\Gamma_2 - k_0) + \Sigma k_i b_i = h.$$
$$\frac{\partial \Gamma_2}{\partial b'_i} + k_i t + h = C,$$

et l'on voit que l'intégrale des forces vives ne contient pas t, mais contient les b par une fonction linéaire additive à coefficients fonctions de a, tandis que les intégrales linéaires ne contiennent pas les b, mais contiennent chacune t par un terme additif dont le coefficient est celui que possède le b correspondant dans l'intégrale des forces vives. Si celle-ci, qui ne contient pas t, ne contient pas les b, les intégrales linéaires, qui ne contiennent pas les b, ne contiendront pas t.

D'ailleurs l'hypothèse que l'intégrale des forces vives ne contient pas les b, exigeant que les k_i soienl nuls, il en résulte que Γ est en même temps indépendante des b et de t, donc :

Pour être dans le cas régulier d'intégration par quadratures, il faut et il suffit :

1° *Que les équations de Lagrange, relatives à $n - 1$ des paramètres soient des dérivées exactes;*

2° *Que l'intégrale des forces vives existe et ne dépende pas de ces paramètres.*

Étant donné un système de Lagrange, on peut se proposer de chercher s'il existe un changement de paramètres le ramenant au cas régulier d'intégration. Cette recherche, impraticable dans le cas général, se fait aisément dans le cas particulier suivant qui se rencontre fréquemment.

Considérons *un système à intégrale des forces vives possédant $n-1$ intégrales linéaires obtenues en faisant, sur les n équations du système, des combinaisons linéaires au moyen de multiplicateurs constants.*

Une telle combinaison

$$\sum_i \lambda_k^i \left[\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\right] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n;\ k = 1, \ldots, n-1)$$

s'écrit, puisque les λ sont des constantes,

$$\frac{d}{dt}\sum_i \lambda_k^i \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i} - \sum_i \lambda_k^i \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\right] = 0,$$

ce qui exige

$$\sum_i \lambda_k^i \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\right] = \frac{d\omega_k}{dt}.$$

Effectuons le changement de paramètres

$$q_1 = \lambda_1^1 b_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^1 b_{n-1} + f_1(a),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$q_n = \lambda_1^n b_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^n b_{n-1} + f_n(a),$$

qui donne

$$q'_1 = \lambda_1^1 b'_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^1 b'_{n-1} + f'_1(a)a',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$q'_n = \lambda_1^n b'_1 + \ldots + \lambda_{n-1}^\mu b'_n \quad + f'_n(a)a',$$

de sorte que les q' ne dépendent pas des b. Soit Γ' la fonction transformée de Γ, on aura

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial b_k} = \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial b_k} = \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\lambda_k^i,$$

$$\frac{\partial \Gamma'}{\partial b'_k} = \sum \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\frac{\partial q'_i}{\partial b'_k} = \sum_i \frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\lambda_k^i.$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma'}{\partial b'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma'}{\partial b_i} = \sum_i \lambda_k^i \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}\right] = \frac{d\omega_k}{dt},$$

ce qui montre que, avec les nouveaux paramètres, les équations relatives aux paramètres b sont des dérivées exactes. Si donc les paramètres b ne figurent pas dans l'intégrale des forces vives transformée, le système se trouvera forcément ramené au cas régulier d'intégration par quadratures.