BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GARNIER

Sur la rationalisation des coefficients d'une équation différentielle algébrique

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 146-148
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__146_1>

SUR LA RATIONALISATION DES COEFFICIENTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE ALGÉBRIQUE;

PAR M. R. GARNIER.

Considérons une équation différentielle du troisième ordre (pour simplifier l'écriture), soit

$$y''' = \mathrm{R}(y'', y', y; x), \tag{1}$$

où R est rationnelle en y'' et y', algébrique en y, analytique en x, et dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. Je me propose de démontrer qu'on peut toujours trouver une relation algébrique

$$f(y, z; x) = 0 \tag{2}$$

telle que les coefficients de la fonction rationnelle R de y'' et y' soient *rationnels en y et z et que la fonction $z(x)$ définie par* (2) [où l'on a remplacé y par l'intégrale générale de (1)] *ait aussi ses points critiques fixes.*

Tout d'abord, la fonction R étant algébrique en y, on peut toujours l'exprimer en fonction rationnelle de y et d'une irrationnelle $\zeta(y; x)$ liée à y par l'équation irréductible

$$\varphi(y, \zeta; x) = 0, \tag{3}$$

algébrique en y et ζ, analytique en x. L'équation (1) s'écrira alors

$$y''' \Sigma_h \Sigma_k a_{hk}(y, \zeta; x) y''^h y'^k = \Sigma_i \Sigma_j b_{ij}(y, \zeta; x) y''^i, y'^j,$$

les a_{hk} et b_{ij} étant rationnels en y et ζ.

Cela étant, soient E l'ensemble des points singuliers du coefficient différentiel $\mathrm{R}(y'', y', y, x)$ et e l'ensemble des points critiques des intégrales $y(x)$ de (1); ajoutons à E les points $x = \xi$ pour lesquels l'équation (3) devient réductible, et soit $\bar{x}$ un point n'appartenant pas à l'ensemble ainsi formé. Appelons y_0, y'_0, y''_0 un ensemble de valeurs régulières [1] attribuées à y, y', y'', et ζ_0 une des racines de l'équation algébrique $\varphi(y_0, \zeta; \bar{x}) = 0$. D'après le théorème de Cauchy il existe une intégrale de (1) répondant aux conditions initiales précédentes; soit D le domaine d'existence de cette intégrale. Relions les points de e situés à l'intérieur de D par des coupures que x ne pourra franchir, et soit D' ce que devient le domaine D après le tracé des coupures. L'intégrale $y(x)$ est une fonction uniforme à l'intérieur de D'; dès lors, deux cas sont à distinguer :

1° Ou bien, pour tout chemin fermé $\mathcal{L}$ décrit par x à l'intérieur de D' sans rencontrer les points ξ, le point $\zeta(y)$ décrit sur la surface de Riemann (3) un cycle *nul* $\mathcal{C}$ [2], et cela quelles que soient les conditions initiales choisies;

2° Ou bien il existe des chemins fermés $\mathcal{L}$ et des conditions initiales tels que le cycle $\mathcal{C}$ ne se réduit pas à zéro.

Dans le premier cas, il est clair que la fonction $\zeta(x)$ définie par l'équation (3), dans laquelle on a remplacé y par $y(x)$, n'a pas d'autres points critiques que les points de e. Nous n'avons donc à nous occuper que du second cas.

Appelons ζ_1 la valeur prise par ζ quand x a décrit le chemin $\mathcal{L}$ en vertu de la fixité des points critiques de y on aura

$$(4)\qquad \begin{aligned} y'''_0 \Sigma_h \Sigma_k [a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y''^h_0 y'^k_0 \\ = \Sigma_i \Sigma_j [b_{ij}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) - b_{ij}(y_0, \zeta_0; \bar{x})] y''^i y'^j. \end{aligned}$$

Ceci posé, attribuons à y'' et y' des valeurs initiales Y''_0 et Y'_0 très voisines de y''_0 et y'_0, et prenons toujours $Y_0 = y_0$, $Z_0 = \zeta_0$. D'après des théorèmes de M. H. Poincaré le chemin $\mathcal{L}$ restera intérieur au domaine D' correspondant à la nouvelle intégrale $Y(x)$ de (1) et le nouveau cycle $\mathcal{C}$ décrit par ζ sera très voisin du premier. Quand x aura décrit $\mathcal{L}$, la valeur finale de ζ sera donc encore ζ_1;

---

(1) Ceci exige que y_0 ne soit pas un point critique de la fonction $\zeta(y; \bar{x})$.

(2) A vrai dire, la surface (3) se déforme quand x varie; mais elle reste toujours équivalente à elle-même (au point de vue de l'*analysis situs*) si x ne rencontre pas de points ξ.

en définitive, on pourra encore écrire l'identité (4) en remplaçant y''_0 et y'_0 par d'autres valeurs très voisines, mais *arbitrairement choisies*. Or ceci exige que l'on ait :

$$a_{hk}(y_0, \zeta_1; \bar{x}) = a_{hk}(y_0, \zeta_0; \bar{x}),$$
$$b_{ij}\,(y_0, \zeta_1; \bar{x}) = b_{ij}\,(y_0, \zeta_0; \bar{x});$$

il en résulte nécessairement que si a_{hk}, par exemple, dépend de ζ, la fonction

$$z = a_{hk}(y, \zeta; x),$$

où l'on a remplacé y par une intégrale *quelconque* de (1) et ζ par une branche de la fonction algébrique $\zeta(x)$ définie par (3), ne peut avoir de points critiques n'appartenant pas à e : il suffira d'exprimer ζ en fonction rationnelle de y et z pour avoir la représentation cherchée.

Le théorème précédent généralise une proposition énoncée dans dans ma Thèse [1]; il s'étend évidemment à une équation d'ordre quelconque. Il est d'une grande importance au point de vue de la recherche des équations différentielles dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes; il fournit, en effet, des conditions supplémentaires qui doivent être vérifiées dans le domaine des points critiques de l'irrationnelle $z(y)$.

---

[1] *Ann. sc. Ec. Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 13.