BULLETIN DE LA S. M. F.

O. SCHMIDT

Sur les produits directs

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 161-164
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__161_0>

SUR LES PRODUITS DIRECTS;

PAR M. O. SCHMIDT.

Dans le Tome 139 du *Journal de Crelle* M. Remak a démontré plusieurs théorèmes sur les produits directs, dont le principal est le suivant :

Si un groupe fini est représenté de deux manières comme produit direct de facteurs indécomposables (c'est-à-dire qui ne sont plus produits directs), les facteurs seront deux à deux centralement isomorphes.

La démonstration de tous ces théorèmes a été simplifiée par moi avec quelques généralisations dans une Note parue sous le titre *Ueber die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, dans les *Comptes rendus de la Société mathématique* à Kieff (janvier 1912). En laissant de côté les autres théorèmes de M. Remak, je donnerai plus loin une nouvelle et courte démonstration du théorème principal.

Dans le fascicule III du Tome XL de ce *Bulletin* (p. 219) M. de Séguier s'occupe du même théorème, le trouvant « bien classique ». M. de Séguier donne une démonstration simplifiée sans connaître ma Note; cependant cette démonstration n'est pas tout à fait exacte, car les formules $\mathcal{A}_i \,|\, D_i \equiv G \,|\, \Pi_1^n D_k$ (p. 220, ligne 4) et $D_{1,2,\ldots,k} = \Pi_1^k D_i \, (k < n)$ (p. 220, ligne 12) ne sont pas vraies dans tous les cas. Soit, par exemple, $A = \Pi_1^3 A_i$ le produit direct des groupes de substitutions $A_1 = \{1, (a, b)\}$, $A_2 = \{1, (\alpha, \beta)\}$ et $A_3 = \{1, (x, y)\}$. Prenons le diviseur $G = \{1, (a, b)(\alpha, \beta)(x, y),$ $(a, b)(\alpha, \beta)(x, y)\}$. Il est aisé de voir que, avec les notations de M. de Séguier, $D_1 = D_2 = 1$, $D_3 = \mathcal{A}_3 = A_3 = \{1, (x, y)\}$, c'est-à-dire $\mathcal{A}_3 \,|\, D_3 = 1 \,|$, tandis que $G \,|\, \Pi_1^3 D_3 = G \,|\, A_3$ est d'ordre 2 ; de même nous avons $D_{12} = \{1, (a, b)(\alpha, \beta)\}$, tandis que $\Pi_1^2 D_i = 1$ (1).

(1) M. Remak nous a aussi adressé un exemple mettant en défaut la formule $\mathcal{A}_i \,|\, D_i \equiv G \,|\, \Pi_1^n D_k$: Soit a_1, a_2, a_3 la base d'un groupe abélien $\mathcal{A}$ ($a_1^p = 1$, $a_2^p = 1$, $a_3^p = 1$, p est un nombre premier quelconque), $\mathcal{G}$ le diviseur de $\mathcal{A}$ contenant tous les éléments $g = a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} a_3^{\alpha_3}$ pour lesquels $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \equiv 0 \pmod p$. Pour les éléments de D_1, il résulte de la congruence précédente et de $\alpha_2 \equiv 0 \pmod p$,

Voici une démonstration nouvelle du théorème de M. Remak.

Chaque élément g du groupe

$$(1)\qquad \mathcal{G} = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k$$

(le point désigne le produit direct) est le produit de certains éléments $h_1, h_2, \ldots, h_k$ des groupes $\mathcal{H}_i$. Les h_i seront dits les *composants* de g. Il est aisé de voir que, d'après les définitions du produit direct et de l'isomorphisme central :

1° Chaque g peut être représenté *d'une seule* manière comme produit de composants relatifs à la décomposition (1);

2° Si a et b sont deux éléments permutables, chaque composant de a sera permutable à chaque composant de b;

3° Le central d'un produit direct est le produit direct des centraux des facteurs;

4° Deux groupes centralement isomorphes à un troisième sont centralement isomorphes entre eux.

Soit

$$\mathcal{G} = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_l$$

un groupe fini représenté de deux manières différentes comme produit direct de groupes indécomposables. Nous pouvons supposer le théorème de Remak vrai pour les groupes d'ordre moindre que celui de $\mathcal{G}$, car il est évident pour les groupes indécomposables.

D'ailleurs, le théorème est bien connu pour les groupes abéliens; supposons donc $\mathcal{G}$ *non abélien.* Si nous réussissons à trouver deux facteurs non abéliens centralement isomorphes, le théorème sera démontré. En effet, soit par exemple $\mathcal{H}_1 \simeq P_1$ ($\simeq$ étant le signe de l'isomorphisme central), où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{P}_1$ ne sont pas abéliens. Alors, si $\mathcal{H}_1^c$, $\mathcal{P}_1^c$ sont les centraux de $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{P}_1$, nous obtenons $\mathcal{H}_1^c \simeq \mathcal{P}_1^c$ et

$$\mathcal{H}_1^c \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k = \mathcal{P}_1^c \cdot \mathcal{P}_2 \cdots \mathcal{P}_l = \mathcal{G}',$$

car le composant relatif à $\mathcal{H}_1$ de chaque élément de $\mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{P}_3 \cdots \mathcal{P}_l$ doit appartenir à $\mathcal{H}_1^c$, parce que ces éléments sont permutables aux éléments de $\mathcal{P}_1$, et de même pour $\mathcal{H}_2 . \mathcal{P}_3 \ldots \mathcal{P}_k$. Mais

---

$\alpha_3 \equiv 0 \pmod{p}$ que $\alpha_1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou que $D_1 = 1$. De même $D_2 = 1$, $D_3 = 1$, $\Pi_1^3 D_i = 1$. L'isomorphisme donnerait $A_i \equiv \mathcal{G}$, ce qui est impossible puisque l'ordre de $\mathcal{A}_i$ est égal à p et l'ordre de $\mathcal{G}$ est égal à p^2 [N. D. L. R.].

comme $\mathcal{H}_1$ n'est pas abélien, $\mathcal{H}_1^c < \mathcal{H}_1$ et par conséquent $\mathcal{G}' < \mathcal{G}$, le théorème est donc supposé vrai pour $\mathcal{G}'$, donc

$$k = l, \qquad \mathcal{H}_i \simeq \mathfrak{P}_i \qquad (i = 2, 3, \ldots, k).$$

Mais nous avons déjà $\mathcal{H}_1 \simeq \mathfrak{P}_1$, le théorème sera ainsi démontré.

Cherchons donc deux facteurs centralement isomorphes non abéliens. Soit $\mathcal{H}_1$ le facteur non abélien *d'ordre maximum* dans nos représentations (ou l'un d'eux, s'ils sont plusieurs). Deux cas sont à distinguer :

a. $\mathcal{H}_1$ n'est pas le seul groupe non abélien parmi les facteurs de la première décomposition. Soient alors $\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2, \ldots, \mathfrak{P}'_l$ les groupes composés par tous les éléments de $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_l$ qui sont composants des éléments de $\mathcal{H}_1$. Ajoutons les éléments nécessaires pour obtenir le produit direct des $\mathfrak{P}'_i$. Nous avons évidemment

$$\mathfrak{P}'_1 \cdot \mathfrak{P}'_2 \cdots \mathfrak{P}'_l = \mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}.$$

Tous les éléments de $\mathcal{H}$ sont permutables aux éléments de $\mathcal{H}_1$ et par conséquent d'après 2° à tous les éléments de $\mathfrak{P}'_1, \mathfrak{P}'_2, \ldots, \mathfrak{P}'_l$, c'est-à-dire que $\mathcal{H}$ appartient au central de $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}$. Mais alors, nous avons $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H} < \mathcal{G}$, car autrement $\mathcal{H}_1$ serait l'unique facteur non abélien. Le théorème est donc supposé vrai pour $\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}$. Le groupe $\mathcal{H}_1$ doit être centralement isomorphe à un facteur indécomposable de $\mathfrak{P}'_1 \cdot \mathfrak{P}'_2 \cdots \mathfrak{P}'_l$, par exemple à un facteur $\mathfrak{P}''_1$ de $\mathfrak{P}_1$; mais comme $\mathcal{H}_1$ est d'ordre maximum, nous devons avoir $\mathfrak{P}''_1 = \mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{P}_1$, $\mathcal{H}_1 \simeq \mathfrak{P}_1$. C'est le résultat qu'il nous fallait chercher.

b. $\mathcal{H}_1$ est le seul groupe non abélien parmi les $\mathcal{H}_i$. Soit $\mathfrak{P}_1$ un facteur non abélien de la seconde décomposition. Formons, comme plus haut, le produit direct des groupes $\mathcal{H}'_1, \mathcal{H}'_2, \ldots, \mathcal{H}'_k$ des composants des éléments de $\mathfrak{P}_1$; nous obtenons $\mathcal{H}'_1 \cdot \mathcal{H}'_2 \cdots \mathcal{H}'_k = \mathfrak{P}_1 . \mathfrak{P} = \mathcal{X}$. Si $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1$ le théorème est démontré, $\mathcal{H}_1 \simeq \mathfrak{P}_1$, car $\mathcal{H}_1$ est d'ordre maximum et tous les $\mathcal{H}_i$ $(i > 1)$ appartiennent au central de $\mathcal{G}$. Si $\mathcal{H}'_1 < \mathcal{H}_1$ nous avons $\mathcal{X} < \mathcal{G}$ et $\mathfrak{P}_1$ doit être centralement isomorphe à un facteur $\mathcal{H}''_1$ et $\mathcal{H}_1$. Mais l'ordre de $\mathcal{H}'_1$ ne peut dépasser l'ordre de $\mathfrak{P}_1$, c'est-à-dire $\mathcal{H}''_1 = \mathcal{H}'_1$, $\mathcal{H}'_1 \simeq \mathfrak{P}_1$. Le même raisonnement peut s'appliquer au lieu de $\mathfrak{P}_1$ au facteur $\mathcal{H}'_1$ de $\mathcal{X}$ et nous obtiendrons le résultat que $\mathcal{H}'_1$ est centralement isomorphe au groupe de ses composants dans $\mathfrak{P}_1$, c'est-à-dire que $\mathfrak{P}_1$ même est ce groupe des composants. Chaque élément de $\mathcal{H}'_1$, excepté l'unité, a ainsi un composant dans $\mathfrak{P}_1$ différent de l'unité et nous voyons que d'après 1° les groupes $\mathcal{H}'_1$ et $\mathfrak{P}_2 \cdot \mathfrak{P}_3 \cdots \mathfrak{P}_l$ sont premiers entre eux. Nous pouvons former le produit direct $\mathcal{H}'_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_l$ qui est égal à $\mathcal{G}$ parce que son ordre est égal à celui de $\mathfrak{P}_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_l = \mathcal{G}$. Nous sommes parvenus à l'égalité

$$\mathcal{H}_1 \cdot \mathcal{H}_2 \cdots \mathcal{H}_k = \mathcal{H}'_1 \cdot \mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_l,$$

d'où $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}'_1 \cdot \mathfrak{P}'$. Le groupe $\mathcal{H}_1$ étant supposé indécomposable, on doit avoir $\mathfrak{P}' = 1$, $\mathcal{H}'_1 = \mathcal{H}_1$ et par conséquent

$$\mathcal{H}_1 \simeq \mathfrak{P}_1.$$

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.