BULLETIN DE LA S. M. F.

R. GARNIER

Sur les simplifications du potentiel élastique dues à la symétrie cristalline

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 228-234
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__228_1>

SUR LES SIMPLIFICATIONS DU POTENTIEL ÉLASTIQUE DUES A LA SYMÉTRIE CRISTALLINE;

PAR M. R. GARNIER.

1. Soient Σ un système élastique homogène et f son potentiel élastique. On sait que toute symétrie dans la molécule de Σ (symétrie cristalline) entraîne une simplification dans la forme de f : c'est ainsi qu'aux différents groupements cristallins correspondent 11 formes possibles pour f. Inversement, si l'on propose de rechercher *a priori* les différents types de symétrie moléculaire susceptibles de produire des simplifications dans la forme de f, on retrouve précisément les types de symétrie cristalline connus, ainsi que les formes correspondantes du potentiel. Cette belle réciproque est due à M. C. Somigliana qui l'a obtenue ([1]) par une méthode analytique. Dans cette Note, je me propose d'établir cette réciproque par des considérations géométriques.

2. Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées rectangulaires, ds^2 et ds_1^2 le carré de l'élément linéaire de Σ avant et après la déformation infiniment petite subie par Σ; on a

$$\begin{aligned} ds_1^2 - ds^2 = {} & 2\varepsilon_1\, dx^2 + 2\varepsilon_2\, dy^2 + 2\varepsilon_3\, dz^2 \\ & + 2\gamma_1\, dy\, dz + 2\gamma_2\, dz\, dx + 2\gamma_3\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Le potentiel élastique f, forme quadratique des six composantes de la déformation ε_1, ε_2, ε_3, γ_1, γ_2, γ_3, dépend dans le cas le plus

([1]) *Rend. della R. Acc. dei Lincei*, 5e série, t. III, 1894, 1er semestre, p. 238 et t. IV, 1895, 1er semestre, p. 25; *Ann. di Mat.*, 3e série, t. VII, 1902, p. 129.

général de 21 coefficients distincts. Supposons que la molécule de Σ se reproduise par une rotation $\overrightarrow{\omega}$, d'amplitude θ, autour d'un axe donné, et examinons la réduction correspondante subie par f. Prenons Ox comme direction de l'axe de rotation, et accentuons toutes les quantités relatives à la molécule de Σ *après* la rotation ; nous aurons d'abord

$$\begin{aligned} dx' &= \cos\theta\, dx - \sin\theta\, dy, \\ dy' &= \sin\theta\, dx + \cos\theta\, dy, \\ dz' &= \qquad\qquad\quad\;\; dz. \end{aligned}$$

Écrivons d'abord l'identité

$$ds_1'^2 - ds'^2 = ds_1^2 - ds^2;$$

il en résulte immédiatement $\varepsilon'_3 = \varepsilon_3$. De plus, dans le plan xOy, le point M′, de coordonnées γ'_1, γ'_2, se déduira du point $M(\gamma_1, \gamma_2)$ par une rotation de θ autour de l'origine ; enfin, d'après la théorie des coniques on a $\zeta' = \zeta$, en posant

$$\zeta' = \varepsilon'_1 + \varepsilon'_2 \qquad \text{et} \qquad \zeta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

et, dans le plan xOy, le point N′ de coordonnées $\xi' = \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2$, $\eta' = \gamma'_3$ se déduira du point $N(\xi = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \eta = \gamma_3)$ par une rotation de -2θ autour de l'origine. Or on peut évidemment écrire le potentiel élastique sous la forme

$$\begin{aligned} (1) \qquad f = {} & (\xi, \eta)_2 + (\gamma_1, \gamma_2)_2 + (\zeta, \varepsilon_3)_2 \\ & + (\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \varepsilon_3) + (\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta) + (\xi, \eta)(\gamma_1, \gamma_2), \end{aligned}$$

en désignant par $(u, v)_2$ une forme quadratique en u, v et par $(u, v)(u_1, v_1)$ une forme bilinéaire aux variables u, v, u_1, v_1 ; et, si f reste invariant par rotation $\overrightarrow{\omega}$, il doit en être de même des six formes qui figurent dans (1). Ainsi, la conique

$$(\xi, \eta)_2 = 1,$$

devant se reproduire en elle-même par $\overrightarrow{\omega}$, est nécessairement un cercle, sauf si $-2\theta = -k\pi$ ou $\theta = \frac{k\pi}{2}$. De même, la conique

$$(\gamma_1, \gamma_2)_2 = 1$$

est un cercle, à moins qu'on n'ait $2\theta = 2k\pi$ ou $\theta = k\pi$. Enfin, aucune condition n'est imposée à la conique

$$(\zeta, \varepsilon_3) = 1.$$

Envisageons maintenant les formes bilinéaires $(\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \varepsilon_3)$ et $(\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta)$; si leurs coefficients ne sont pas identiquement nuls, les équations

$$(\gamma_1, \gamma_2)(\zeta, \varepsilon_3) = 1 \quad \text{et} \quad (\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta) = 1$$

(où ζ et ε_3 sont considérées comme des constantes) représentent deux droites; mais ces droites ne peuvent se reproduire par une rotation non identiquement nulle sauf, pour la seconde, si l'on a $\theta = k\pi$. Reste enfin la forme (supposée non identiquement nulle)

$$(2) \qquad (\xi, \eta)(\gamma_1, \gamma_2) \equiv (a\gamma_1 + b\gamma_2)\xi + (c\gamma_1 + d\gamma_2)\eta;$$

prenons pour M et N deux points du cercle trigonométrique Γ; lorsque M décrit Γ, le point P, de coordonnées

$$(3) \qquad \begin{cases} x = a\gamma_1 + b\gamma_2, \\ y = c\gamma_1 + d\gamma_2, \end{cases}$$

décrit une ellipse Δ, de centre O. Or quand M varie, les point M et M' décrivent deux divisions homographiques sur Γ, de même P et P' sur Δ. Choisissons N de telle sorte que $\widehat{PON}$ soit droit; l'angle $\widehat{P'ON'}$ devra être droit et l'on aura

$$\widehat{POP'} = \widehat{NON'} = -2\theta;$$

mais ceci exige que les rayons doubles des faisceaux homographiques OP et OP' coïncident avec les droites isotropes issues de O; la conique Δ est donc un cercle de rayon R et l'on a

$$c + di = \varepsilon i(a + bi) \qquad (\varepsilon = \pm 1),$$

d'où

$$c = -\varepsilon b, \qquad d = \varepsilon a$$

et

$$\widehat{POP'} = \varepsilon\theta.$$

On aura donc

$$\varepsilon\theta = -2\theta + 2k\pi$$

d'où, en supposant $\vec{\omega} \not\equiv 0$,

$$\varepsilon = +1 \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{3}.$$

Réciproquement, s'il en est ainsi, l'expression (2), égale à $R \cos \widehat{PON}$, est évidemment invariante par la rotation $\vec{\omega}$ qui vient d'être définie.

3. De tout ce qui précède résulte immédiatement la conséquence suivante :

Si le potentiel élastique f est invariant par une rotation $\vec{\omega}$, d'amplitude θ, autour d'un axe δ, ou bien on a

$$\theta = \frac{2k\pi}{n},$$

avec $n = 1, 2, 3, 4$, ou bien f est invariant quel que soit θ; dans ce dernier cas δ s'appelle un *axe d'isotropie*.

Nous indiquerons plus loin (n° 5) les formes correspondantes du potentiel que nous désignerons par $f_n (n = 2, 3, 4)$ ou f_∞ (pour le cas de l'axe d'isotropie).

4. Nous allons rechercher maintenant tous les groupes de rotation G formés par les rotations $\vec{\omega}$ définies au n° 3. Soient $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ deux rotations autour de deux axes OA et OA′, le produit des deux rotations successives $\vec{\omega}$ et $\vec{\omega}'$ est une rotation $\vec{\omega}''$ dont l'axe OA″ et l'amplitude θ'' se déterminent de la façon suivante : appelons A, A′, A″ les traces des axes de rotation (dirigés) sur une sphère σ de centre O; le triangle AA′A″ a pour angles $A''AA' = -\frac{\theta}{2}$, $AA'A'' = \frac{\theta'}{2}$, $A'A''A = \pi - \frac{\theta''}{2}$.

Il résulte immédiatement de la construction précédente que si OA et OA′ sont deux axes d'isotropie, il en est de même d'un axe quelconque OA″ issu de O; dans ce cas Σ est dit *isotrope* et nous désignerons son potentiel par f_∞^∞.

Supposons maintenant que Σ possède un seul axe d'isotropie OA; et soit OA′ un axe d'ordre $n (= 2, 3, 4)$. Dans le triangle AA′A″ l'angle A′ est constant, l'angle en A est variable, tandis que l'angle en A″, qui ne peut varier par continuité, est nécessairement constant. Le grand cercle A′A″, coupant sous un angle constant les grands cercles issus de A, les rencontre nécessairement à angle droit; par suite, les angles en A′ et A″ sont droits, ainsi que les côtés AA′ et AA″. Le corps Σ possède donc un axe d'isotropie OA orthogonal à une infinité d'axes d'ordre 2; et, évidemment, il ne peut posséder d'autres axes de symétrie. Nous désignerons par f_∞^2 la forme correspondante de f.

Supposons enfin que Σ n'admette aucun axe d'isotropie : *le groupe* G *est alors nécessairement fini.* En effet, si les angles θ, θ′, θ″ ne prennent que des valeurs de la forme $\frac{2k\pi}{n}$, les triangles correspondants AA′A″, en nombre limité, admettent pour leurs côtés une limite inférieure λ. Mais si G est infini, Σ possède une infinité d'axes de rotation OA dont les traces A sur σ admettent au moins un point d'accumulation, et, par suite, il existe deux de ces traces dont sa distance sphérique et inférieure à λ, ce qui est impossible. Cela étant, puisque le groupe G est fini et ne possède que des rotations d'ordre 2, 3, 4, il coïncide nécessairement avec l'un des groupes suivants (où les formes correspondantes du potentiel sont mises en regard) :

1° Groupe du dièdre, avec $n = 2, 3, 4$; potentiel : f_n^2;
2° Groupe du tétraèdre; potentiel : f_2^3;
3° Groupe de l'octaèdre; potentiel : f_4^3.

D'ailleurs f_4^3 et f_2^3 coïncident; en effet, dans le cas du tétraèdre Σ admet les droites $x = 0 = y$ et $x = y = z$ comme axes d'ordres 2 et 3 respectivement; f_2^3 est donc une fonction symétrique des deux ensembles ε_i et γ_i qui ne peut renfermer les γ_i au premier degré; on a donc

$$f_2^3 = c_{11}\Sigma\varepsilon_i^2 + 2c_{12}\Sigma\varepsilon_i\varepsilon_j + c_{44}\Sigma\gamma_i^2.$$

Or on peut obtenir le groupe de l'octaèdre en multipliant celui du tétraèdre par une symétrie autour de la droite $x + y = 0 = z$; cette symétrie permute simultanément les indices 1 et 2 des deux ensembles ε_i et γ_i; elle ne change donc pas f_2^3 et l'on a bien $f_2^3 = f_4^3$.

5. En définitive, s'il existe des symétries moléculaires qui sim-

plifient la forme de f, il ne peut y avoir pour f que dix formes réduites distinctes : ce sont précisément les dix formes auxquelles conduit l'étude des différents groupements cristallins et des corps isotropes, et la correspondance entre les formes réduites et ces groupements se fait de la façon suivante (où f désigne la forme générale du potentiel) :

	Système.		Système.
f	triclinique	f_2^2	rhombique
f_2	monoclinique	f_3^2	rhomboédrique
f_3	rhomboédrique	f_4^2	quadratique
f_4	quadratique	f_4^3	cubique
f_∞	hexagonal	f_∞^2	hexagonal

f_∞^∞ .... corps isotropes

6. Il nous reste à énumérer explicitement les différentes formes possibles pour f ; mais ce dernier problème ne présente aucune difficulté. On sait, en effet, que le groupe de l'octaèdre peut être engendré par deux rotations d'ordre 4 (et d'axes distincts). Il suffira donc d'exprimer, dans chacun des dix cas précédents que Σ admet deux axes rectangulaires Oz et Ox comme axes d'ordre 2, 3, 4 ou d'isotropie. Si l'on connaît la forme de f correspondant à une rotation $\overleftarrow{\omega}$ d'amplitude θ autour de Oz, une permutation circulaire effectuée sur les indices 1, 2, 3 des variables ε_i et γ_j de f donnera la forme de f correspondant à une rotation de même amplitude autour de Ox. Mais il résulte immédiatement du n° 2 qu'on a

$$
\begin{aligned}
f_2 &= (\xi, \eta)_2 + (\gamma_1, \gamma_2)_2 + (\zeta, \varepsilon_3)_2 + (\zeta, \varepsilon_3)(\xi, \eta),\\
f_3 &= a(\xi^2 + \gamma^2) + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2 + c(-\gamma_2\xi + \gamma_1\eta) + d(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta),\\
f_4 &= (\xi, \eta)_2 + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2,\\
f_\infty &= a(\xi^2 + \eta^2) + b(\gamma_1^2 + \gamma_2^2) + (\zeta, \varepsilon_3)_2.
\end{aligned}
$$

Soient alors

$$\varepsilon_i = X_i, \qquad \gamma_j = X_{j+3} \qquad \text{et} \qquad c_{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial X_h\, \partial X_k};$$

on déduit aisément de ce qui précède les relations suivantes qui caractérisent dans chaque cas la forme de f :

$$f_2 \qquad c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{46} = c_{56} = 0;$$

$$f_3 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{16} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = 0; \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{14} = - c_{24} = c_{56}, \\ c_{15} = - c_{25} = - c_{46}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{array} \right.$$

$$f_4 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{14} = c_{15} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{16} = - c_{26}, \quad c_{44} = c_{55}; \end{array} \right.$$

$$f_\infty,\ f_\infty^2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{array} \right.$$

$$f_2^2 \qquad c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0;$$

$$f_3^2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{15} = c_{16} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \\ c_{14} = - c_{24} = c_{56}, \quad c_{44} = c_{55}, \quad c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}); \end{array} \right.$$

$$f_4^2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22}, \quad c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55}; \end{array} \right.$$

$$f_4^3 \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{26} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66}; \end{array} \right.$$

$$f_\infty^\infty \qquad \left\{ \begin{array}{l} c_{14} = c_{15} = c_{16} = c_{24} = c_{25} = c_{34} = c_{35} = c_{36} = c_{45} = c_{46} = c_{56} = 0, \\ c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23}, \quad c_{44} = c_{55} = c_{66} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12}). \end{array} \right.$$