BULLETIN DE LA S. M. F.

J. TOUCHARD

Sur la fonction gamma

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 234-242

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__234_1>

SUR LA FONCTION GAMMA.

Par M. Jacques Touchard.

I. Je me propose de démontrer en premier lieu la formule

$$(1)\qquad e^x = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{x}{\pi}\int_0^\infty e^{-xz}\,\text{arc tang}\,\frac{\log z}{\pi}\,dz,$$

valable quand $\text{P.R.}\,x > 0$.

On a

$$e^x = \sum_0^\infty f(\nu),$$

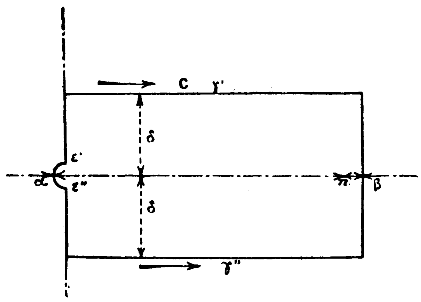
où

$$f(z)=\frac{x^z}{\Gamma(1+z)}.$$

Or, $\pi \cot \pi z$ admettant les pôles o, 1, 2, ... de résidus 1 et $f(z)$ étant holomorphe, on a

$$\sum_0^n f(\nu)=\mathcal{E}f(z)(\pi\cot\pi z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \pi\cot\pi z\, f(z)\,dz.$$

Le contour C est constitué par des droites rectangulaires et par



un demi-cercle de rayon infiniment petit ε, décrit de l'origine comme centre.

L'équation précédente s'écrit

$$\sum_0^n f(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\varepsilon''\gamma''\beta}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha\varepsilon'\gamma'\beta},$$

les intégrales étant prises dans les sens marqués par les flèches.

Suivons une voie tracée par M. Lindelöf (le calcul des résidus, p. 56) et substituons

$$\pi\cot\pi z=\quad \pi i+\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}\qquad \text{dans l'intégrale}\int_{\alpha\varepsilon''\gamma''\beta}$$

et

$$\pi\cot\pi z=-\pi i-\frac{2\pi i}{e^{-2\pi i z}-1}\qquad \text{dans l'intégrale}\int_{\alpha\varepsilon'\gamma'\beta}$$

il vient, en remarquant que

$$\int_{\alpha\varepsilon'\gamma'\beta} f(z)\,dz=\int_{\alpha\varepsilon''\gamma''\beta} f(z)\,dz=\int_\alpha^\beta f(z)\,dz,$$

$$\sum_0^n f(\nu)=\int_\alpha^\beta f(z)\,dz+\int_{\alpha\varepsilon''\gamma''\beta}\frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi i z}-1}+\int_{\alpha\varepsilon'\gamma'\beta}\frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi i z}-1};$$

comme

$$\frac{1}{e^x - 1} = \frac{1}{x} + h(x),$$

$h(x)$ désignant une fonction holomorphe, il vient

$$\int_{\alpha_{\varepsilon''}} \frac{f(z)\,dz}{e^{2\pi i z} - 1} = \int_{\alpha_{\varepsilon'}} \frac{f(z)\,dz}{e^{-2\pi i z} - 1} = \frac{1}{4} f(0) = \frac{1}{4}.$$

On a donc

$$(2) \quad \sum_0^n f(\nu) = \frac{1}{2} + \int_\alpha^\beta f(z)\,dz + i\int_\varepsilon^\delta \frac{f(zi)\,dz}{e^{2\pi z} - 1} - i\int_\varepsilon^\delta \frac{f(-zi)\,dz}{e^{2\pi z} - 1} + \mathrm{S},$$

S étant la somme des quatre intégrales

$$\int_0^\beta \frac{x^{i\delta+t}}{\Gamma(i\delta + t + 1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta - 2\pi i t} - 1} + \int_0^\beta \frac{x^{-i\delta+t}}{\Gamma(-i\delta + t + 1)} \frac{dt}{e^{2\pi\delta + 2\pi i t} - 1}$$
$$-i\int_0^\delta \frac{x^{\beta+it}}{\Gamma(\beta + it + 1)} \frac{dt}{e^{2\pi t - 2\pi i\beta} - 1} + i\int_0^\delta \frac{x^{\beta-it}}{\Gamma(\beta - it + 1)} \frac{dt}{e^{2\pi t + 2\pi i\beta} - 1}.$$

Quand on fait croître β et δ indéfiniment, S tend vers zéro. On s'en assure en employant l'expression donnée par Mathias Lerch

$$\operatorname{mod}\Gamma(\tau + it) = \sqrt{2\pi}(\tau^2 + t^2)^{\frac{1}{2}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)} e^{-\tau - t \operatorname{arctang}\frac{t}{\tau}}(1 + \varepsilon),$$

où ε est un nombre qui s'annule pour $\tau = +\infty$ ou $t = \pm\infty$.

Faisons donc, dans (2), β et δ infinis; il vient

$$e^x = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z)} + i\int_\varepsilon^\infty \frac{x^{zi}}{\Gamma(1+zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} - i\int_\varepsilon^\infty \frac{x^{-zi}}{\Gamma(1-zi)} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1}$$

et, à l'aide de la formule des compléments

$$(3) \quad e^x = \frac{1}{2} + \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z)} + \frac{1}{\pi}\int_0 \frac{e^{-\pi z}\,dz}{z} \frac{x^{-zi}\Gamma(1+zi) - x^{zi}\Gamma(1-zi)}{2i}.$$

Or

$$\frac{x^{-zi}\Gamma(1+zi) - x^{zi}\Gamma(1-zi)}{2i} = \int_0^\infty x\,e^{-xt}\sin(z\log t)\,dt.$$

Introduisant cette expression dans l'équation (3) et intervertissant l'ordre des intégrations dans l'intégrale double, on obtient finalement la formule (1) qui, à l'aide d'une intégration par parties, s'écrit encore

$$e^x = \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z)} + \int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{z(\pi^2+\log^2 z)}.$$

Si l'on retranche de la formule (1) l'équation évidente

$$(4) \qquad e^{-x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{2}\int_0^1 e^{-xt}\,dt + \frac{x}{2}\int_1^\infty e^{-xt}\,dt,$$

on obtient

$$e^x - e^{-x} = \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{x}{\pi}\int_0^\infty e^{-xt}\,\text{arc tang}\,\frac{\pi}{\log t}\,dt.$$

II. Appliquons la même méthode de M. Lindelöf à la série

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{x}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{x^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} + \ldots,$$

nous trouverons d'abord

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$
$$+ \frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,e^{-\pi t}\,dt \int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{\sqrt{z}}\sin(t\log z).$$

Intervertissons l'ordre des intégrations et remarquons que

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi t}+e^{-\pi t}}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\,e^{-\pi t}\sin at\,dt = -\int_0^\infty e^{-\pi t}\sin at\,dt + 2\int_0^\infty \frac{\sin at\,dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi}}$$
$$= -\frac{a}{a^2+\pi^2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^a-1}{e^a+1},$$

nous obtenons

$$(5) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} + \int_0^\infty \frac{x^z\,dz}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$
$$+ \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{\sqrt{z}}\,\frac{z-1}{z+1} - \frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{\sqrt{z}}\,\frac{\log z}{\pi^2+\log^2 z}.$$

Or on prouve aisément, d'une part, que,

$$\frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{\sqrt{z}}\,\frac{z-1}{z+1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} - \sqrt{x}\,e^x + 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}\,e^x\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt$$

et, d'autre part, que

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} + 2e^x\sqrt{\frac{x}{\pi}}\int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\,dt.$$

L'égalité (5) devient donc

$$(6)\qquad e^x = \int_0^\infty \frac{x^{z-\frac{1}{2}}dz}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-xz}\,dz}{\sqrt{z}}\,\frac{\log z}{\pi^2+\log^2 z},$$

formule valable tant que P.R. $x > 0$.

III. En remarquant que

$$e^x - \frac{1}{e} = \mathcal{E}x^z \cos\pi z\left[\frac{P(1-z)}{z}\right],$$

où $P(x)$ désigne la fonction de Prym, partie méromorphe de $\Gamma(x)$, on obtient une nouvelle expression de e^x, savoir

$$(7)\qquad e^x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty x^z \sin\pi z \frac{P(1-z)}{z}dz$$
$$+ \frac{x}{\pi}\int_0^{\frac{1}{x}} e^{-xz} \operatorname{arc\,tang}\frac{\log z}{\pi}\,dz,$$

équation valable quand x est réel et compris entre 0 et 1.

IV. Voici deux conséquences des formules (1) et (6). Si l'on pose

$$e^{e^x} = e\sum_0^\infty a_n\frac{x^n}{n!},$$

on a

$$ea_n = \int_0^\infty \frac{z^n\,dz}{\Gamma(1+z)} - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-x}\frac{\Gamma(n)\sin\left(n\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\log x}\right)}{(\pi^2+\log^2 x)^{\frac{n}{2}}}dx$$

et symboliquement

$$e\left(a+\frac{1}{2}\right)^n = \int_0^\infty \frac{z^n\,dz}{\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)}$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,\frac{\Gamma(n+1)\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tang}\frac{\pi}{\log x}\right]}{(\pi^2+\log^2 x)^{\frac{n+1}{2}}}dx,$$

formules qu'on peut généraliser.

Les nombres a_n, qui jouissent de propriétés élégantes, se présentent dans la partie holomorphe de $x^p \dfrac{P(1-x) \pm P(1+x)}{2} \cos \pi x$ et, de ce fait, on peut déduire la formule (7).

V. On peut tirer de l'équation (1), en la différentiant, la formule

$$(8) \qquad \int_{-n}^{\infty} \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + (-1)^n \int_0^{\infty} \frac{x^n\, e^{-x}\, dx}{\pi^2 + \log^2 x},$$

où n est un entier positif ou nul. Je vais généraliser cette formule. Supposons que a désigne un nombre quelconque réel et positif; on a

$$\int_0^a z^y \sin \pi y \, dy = \frac{z^a}{\pi^2 + \log^2 z} (\sin a\pi \log z - \pi \cos a\pi) + \frac{\pi}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Multiplions par $e^{-z} dz$ et intégrons de o à ∞; le premier membre devient

$$-\int_{-a}^{0} \frac{\pi}{\Gamma(z)} dz,$$

et l'on a

$$(9) \qquad \int_{-a}^{0} \frac{dz}{\Gamma(z)} = \cos a\pi \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \, dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z \, dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-z}\, dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

On trouve de même, $Q(x)$ désignant la fonction holomorphe de Prÿm,

$$(10) \qquad \int_a^{\infty} \sin \pi y \, Q(1-y)\, dy = \pi \cos a\pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a}\, dz}{\pi^2 + \log^2 z} + \sin a\pi \int_1^{\infty} \frac{e^{-z} z^{-a} \log z \, dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Cherchons une transformation analogue pour

$$(11) \qquad \int_a^{x} \sin \pi y \, P(1-y)\, dy = -\int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y \, dy}{y-1} + \frac{1}{1} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y \, dy}{y-2} - \frac{1}{1.2} \int_a^{\infty} \frac{\sin \pi y \, dy}{y-3} + \ldots.$$

On démontre facilement que

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\text{pour } a < n \\
&\qquad \int_a^\infty \frac{\sin \pi y \, dy}{y-n} = (-1)^n \pi - \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(n-a)\pi t}\, dt}{1+t^2} \\
&\qquad\qquad + \sin \pi a \int_0^\infty e^{-(n-a)\pi t} \frac{t\, dt}{1+t^2}; \\
&\text{pour } a = n \\
&\qquad \int_n^\infty \frac{\sin \pi y \, dy}{y-n} = (-1)^n \frac{\pi}{2}; \\
&\text{pour } a > n \\
&\int_a^\infty \frac{\sin \pi y \, dy}{y-n} = \cos \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z}\, dz}{1+z^2} + \sin \pi a \int_0^\infty \frac{e^{-(a-n)\pi z} z\, dz}{1+z^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Supposons d'abord, dans (11), $a = 0$; il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y \, P(1-y)\, dy = \pi e + \pi \int_0^1 \frac{e^{-z}\, dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

En ajoutant membre à membre avec (10), où l'on a fait $a = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \sin \pi y \, \Gamma(1-y)\, dy = \pi e + \pi \int_0^\infty \frac{e^{-z}\, dz}{\pi^2 + \log^2 z}$$

ou bien

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \int_0^\infty \frac{e^{-z}\, dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Ajoutant alors à (9), on trouve

$$(13)\quad \int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e + \cos a\pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a\, dz}{\pi^2 + \log^2 z} - \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z\, dz}{\pi^2 + \log^2 z}.$$

Si a est entier, on retrouve (8).

On déduit de (13)

$$
\begin{aligned}
\int_{-a}^\infty \frac{dz}{\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)} &= e + \sin a\pi \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a\, dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)} \\
&\quad + \frac{\cos a\pi}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-z} z^a \log z\, dz}{\sqrt{z}(\pi^2 + \log^2 z)}.
\end{aligned}
$$

Le calcul de $\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)}$ se fait ensuite à l'aide des formules (10), (11), (12) et donne le résultat suivant :

Supposons $n < a < n+1$ et posons

$$\varphi_{n-1}(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!},$$

on a

$$(14)\quad \int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a\pi \int_0^\infty \frac{z^{-a}\,dz}{\pi^2 + \log^2 z}\,[e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)]$$
$$+ \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^\infty \frac{z^{-a}\log z\,dz}{\pi^2+\log^2 z}[e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

Reportons-nous au Mémoire de Cauchy *Sur un nouveau genre d'intégrales* (anciens exercices d'Analyse, 1re année), nous verrons que la formule (14) peut s'écrire

$$\int_a^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + \cos a\pi \int_0^{\prime\infty} \frac{z^{-a}\,e^{-z}\,dz}{\pi^2 + \log^2 z}$$
$$+ \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\prime\infty} \frac{z^{-a}\,e^{-z}\log z\,dz}{\pi^2 + \log^2 z},$$

le symbole $\int'$ représentant ce que Cauchy appelle une intégrale extraordinaire. La formule (14) subsiste si a est entier, et l'on a

$$\int_n^\infty \frac{dz}{\Gamma(z)} = e - \varphi_{n-1}(1) + (-1)^n \int_0^\infty \frac{z^{-n}\,dz}{\pi^2+\log^2 z}[e^{-z} - \varphi_{n-1}(-z)].$$

VI. On peut généraliser l'équation (13) en cherchant la valeur principale des intégrales

$$\int_{-a}^\infty \frac{\sin b\pi y}{\sin \pi y}\frac{dy}{\Gamma(y)}, \qquad \int_{-a}^\infty \frac{\cos b\pi y}{\sin\pi y}\frac{dy}{\Gamma(y)},$$

où b est un nombre réel et positif.

En employant la marche que je viens de suivre au paragraphe V, on trouve

$$(15)\quad \text{val. pr.} \int_{-a}^{\infty} \frac{\sin b\pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}$$

$$= -e^{-\cos\pi b} \cos(\pi b - \sin\pi b)$$

$$+ b \cos\pi ba \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \, dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} - \frac{\sin\pi ba}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z \, dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z},$$

$$\text{val. pr.} \int_{-a}^{\infty} \frac{\cos b\pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)}$$

$$= e^{-\cos\pi b} \sin(\pi b - \sin\pi b)$$

$$+ b \sin\pi ba \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \, dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z} + \frac{\cos\pi ba}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} z^a \log z \, dz}{\pi^2 b^2 + \log^2 z},$$

a est un nombre réel positif ou nul.

Quand b est un nombre entier positif, le premier membre de (15) se réduit à

$$\int_{-a}^{\infty} \frac{\sin n\pi y}{\sin \pi y} \frac{dy}{\Gamma(y)},$$

car $\sin n\pi y$ est divisible par $\sin \pi y$.