BULLETIN DE LA S. M. F.

G. RÉMOUNDOS

# Généralisation d'un théorème de M. Landau

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 41 (1913), p. 340-346
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__340_0>

# GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE M. LANDAU;

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS.

1. Dans un travail récemment paru dans ce *Bulletin* (¹) nous avons donné une généralisation du théorème (²) de M. Landau par lequel il a complété le célèbre théorème de M. Picard en donnant une propriété commune à toute une famille de fonctions holomorphes dans le voisinage d'un point.

Cette généralisation est la suivante :

I. THÉORÈME. — *Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie en $z = 0$, ce point étant pour elle un point critique, et soient*

$$(1)\qquad \begin{cases} \alpha_{10} + \alpha_{11} z^{\frac{1}{n_1}} + \alpha_{12} z^{\frac{2}{n_1}} + \ldots, \\ \alpha_{20} + \alpha_{21} z^{\frac{1}{n_2}} + \alpha_{22} z^{\frac{2}{n_2}} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{m0} + \alpha_{m1} z^{\frac{1}{n_m}} + \alpha_{m2} z^{\frac{2}{n_m}} + \ldots \end{cases}$$

*les séries qui représentent dans le voisinage de $z = 0$ les branches des divers systèmes circulaires. Si nous supposons*

$$(2)\qquad \alpha_{11} \neq 0, \qquad \alpha_{21} \neq 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{m1} \neq 0,$$

*il existe un nombre positif*

$$R = g(\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1})$$

*dépendant seulement des deux premiers coefficients de chacune des séries* (1)

$$\alpha_{10}, \quad \alpha_{11}, \qquad \alpha_{20}, \quad \alpha_{21}, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{m0}, \quad \alpha_{m1}$$

(*et nullement des autres coefficients de ces séries*), *tel que, à*

---

(¹) *Généralisation d'un théorème de M. Landau*, t. XLI, 1913, p. 19-24.

(²) *Ueber eine Verallgemeinerung des Picardschen Satzes* (*Sitzungsberichte der Königlich. preussischen Akademie der Wissenschaften*, Berlin, 1904, p. 1118-1133).

*l'intérieur du cercle*

$$(3) \qquad |z| < R = g(\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1}),$$

*la fonction donnée* $u = \varphi(z)$ *ou bien possède un point singulier différent de* $z = 0$, *ou bien prend une fois au moins l'une des valeurs zéro et un.*

Soit

$$(4) \qquad u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = f(z, u) = 0$$

l'équation qui détermine la fonction donnée $u = \varphi(z)$ algébroïde en $z = 0$; les fonctions $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_n(z)$ seront holomorphes dans le voisinage de $z = 0$ :

$$(5) \qquad \begin{cases} A_1(z) = a_1 + b_1 z + \ldots, \\ A_2(z) = a_2 + b_2 z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_n(z) = a_n + b_n z + \ldots. \end{cases}$$

Nous allons, dans ce travail, compléter le théorème ci-dessus énoncé en démontrant que le rayon R peut s'exprimer en fonctions des coefficients $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, ..., $a_n$, $b_n$ et des nombres entiers $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$, que nous appellerons *degrés des systèmes circulaires*.

**2.** Si dans l'équation (4) nous faisons la substitution $z = z_1^{n_1}$, l'équation transformée

$$(6) \qquad \begin{aligned} &u^n + (a_1 + b_1 z_1^{n_1} + \ldots)u^{n-1} \\ &\quad + (a_2 + b_2 z_1^{n_1} + \ldots)u^{n-2} + \ldots + (a_n + b_n z_1^{n_1} + \ldots) = F(z_1, u) = 0 \end{aligned}$$

définit une fonction $u = \Phi(z_1)$ algébroïde en $z_1 = 0$ dont une détermination est holomorphe dans le voisinage de $z_1 = 0$ et a le développement

$$\alpha_{10} + \alpha_{11} z_1 + \alpha_{12} z_1^2 + \ldots.$$

Nous remarquons que toute dérivée $\dfrac{\partial^{p+q} F}{\partial z_1^p \partial u^q}$ d'ordre total inférieur à $n_1 (p + q < n_1)$ s'annule pour les valeurs $z_1 = 0$, $u = \alpha_{10}$.

Si donc nous dérivons l'équation $F(z_1, z) = 0$ $k$ fois, où $k$ est inférieur à $n_1$, nous obtiendrons une équation qui devient une identité pour les valeurs $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$ et ne donne la valeur correspondante d'aucune dérivée. Si nous faisons $n_1$ dérivations successives, nous obtenons une équation qui, pour les valeurs $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, devient

$$(7) \qquad (u')^{n_1}\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}}\right)_{z_1=0,\,u=\alpha_{10}} + \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}}\right)_{z_1=0,\,u=\alpha_{10}} = 0.$$

Supposons que

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}}\right)_{z_1=0,\,u=\alpha_{10}} \neq 0,$$

alors il doit en être de même de la valeur $\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial u^{n_1}}\right)_{z_1=0,\,u=\alpha_{10}}$, parce que, dans le cas contraire, nous n'aurions pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$ aucune valeur finie de la dérivée $u'$ et, par conséquent, il n'y aurait pas de branche de $u = \Phi(z)$ holomorphe dans le voisinage de $z_1 = 0$ et prenant pour $z_1 = 0$ la valeur $\alpha_{10}$.

Or, nous avons

$$\left(\frac{\partial^{n_1} F}{\partial z_1^{n_1}}\right)_{z_1=0,\,u=\alpha_{10}} = (n_1)!\,(b_1\alpha_{10}^{n-1} + b_2\alpha_{10}^{n-2} + \ldots + b_n) = (1.2.3\ldots n_1)\,q(\alpha_{10}),$$

et, par conséquent, l'hypothèse (8) est équivalente à l'hypothèse

$$(9) \qquad q(\alpha_{10}) = b_1\alpha_{10}^{n-1} + b_2\alpha_{10}^{n-2} + \ldots + b_n \neq 0.$$

Si nous posons

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

le nombre $\alpha_{10}$ est une racine du polynome $p(x)$ et, par conséquent, notre hypothèse (9) consiste en ce que les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ ne doivent avoir aucune racine commune. Avec cette hypothèse la valeur $\alpha_{11}$ sera tirée de l'équation (7) qui peut s'écrire

$$(10) \qquad p^{(n_1)}(\alpha_{10})(u')^{n_1} + (1.2.3\ldots n_1)\,q(\alpha_{10}) = 0.$$

Nous en concluons que le nombre $\alpha_{11}$ ne dépend que de $\alpha_{10}$ et des nombres $n_1$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $a_3$, $b_3$, …, $a_n$, $b_n$ et $n$; d'autre part, le nombre $\alpha_{10}$ étant une racine du polynome $p(x)$, ne dépend que des $n$, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$; donc, le coefficient $\alpha_{11}$ ne dépend que des nombres $n$, $n_1$; $a_1$, $a_2$, …, $a_n$; $b_1$, $b_2$, …, $b_n$ [et nullement des autres coefficients des séries (5)], et il en est de même des coefficients analogues $\alpha_{21}$, $\alpha_{31}$, …, $\alpha_{m_1}$ : c'est-à-dire, le coefficient $\alpha_{k_1}(k = 1, 2, 3, \ldots, m)$ ne dépend que des nombres $n$, $n_k$; $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$; $b_1$, $b_2$, ..., $b_n$, tandis que les coefficients $\alpha_{10}$, $\alpha_{20}$, ..., $\alpha_{m0}$, qui sont des racines du polynome $p(x)$, ne dépendent que des nombres $n$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$.

Nous sommes ainsi conduits à la conclusion que, si les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ n'ont aucune racine commune, le rayon R indiqué dans le théorème I ne dépend que des nombre $a_1$, $a_2$, $a_3$, ..., $a_n$; $b_1$, $b_2$, $b_3$, ..., $b_n$ des degrés [1] $n_1$, $n_2$, ..., $n_m$ des systèmes circulaires et du nombre $n$ des branches de la fonction multiforme donnée.

*Remarque.* — Si nous désignons par $z_1$ et $\zeta$ deux valeurs de $z^{\frac{1}{n_1}}$, on aura $\zeta = z_1 r$, où $r$ est une $n^{\text{ième}}$ racine de l'unité et, par conséquent, la première série (1) se transforme, au fond, par la substitution $z^{\frac{1}{n_1}} = \zeta = z_1 r$ à $n_1$ fonctions holomophes :

$$\begin{array}{l}
\alpha_{10} + \alpha_{11} \quad\;\; z_1 + \ldots, \\
\alpha_{10} + \alpha_{11} r_1 \quad z_1 + \ldots, \\
\alpha_{10} + \alpha_{11} r_2 \quad z_1 + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\alpha_{10} + \alpha_{11} r_{n_1-1} z_1 + \ldots,
\end{array}$$

où les $1$, $r_1$, $r_2$, ..., $r_{n_1-1}$, sont les $n_1$ racines de l'unité.

Donc aux $n_1$ branches du premier des systèmes circulaires (1) correspondent ces $n_1$ branches holomophes en $z_1 = 0$ de la fonction $u = \Phi(z_1)$; c'est pour cela que l'équation (10) est du degré $n_1$ et donne, pour $z_1 = 0$ et $u = \alpha_{10}$, $n_1$ valeurs de la dérivée $u'$, qui sont les $n^{\text{ièmes}}$ racines d'un nombre.

Nous avons établi le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie à $n$ branches* [2] *dans le voisinage de $z = 0$, déterminée par*

---

[1] Qui sont ici égaux aux degrés de multiplicité des racines du polynome $p(x)$, puisque nous avons

$$p^{(n_1)}(\alpha_{10}) \neq 0, \qquad p^{(n_2)}(\alpha_{20}) \neq 0, \qquad p^{(n_3)}(\alpha_{30}) \neq 0, \qquad \ldots, \qquad p^{(n_m)}(\alpha_{m0}) \neq 0,$$

par suite de l'hypothèse (9).

[2] Si la fonction possède une infinité de branches, nous envisageons un nombre

*l'équation*

$$(11)\quad f(z, u) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(z)u + A_n(z) = 0,$$

$$(12)\quad \begin{cases} A_1(z) = a_1 \;\; + \;\; b_1 z + \ldots, \\ A_2(z) = a_2 \;\; + \;\; b_2 z + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_{n-1}(z) = a_{n-1} + b_{n-1} z + \ldots, \\ A_n(z) = a_n \;\; + \;\; b_n z + \ldots. \end{cases}$$

*Supposons que les polynomes*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$
$$q(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

*n'aient aucune racine commune et désignons par* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *les degrés de multiplicité des racines du polynome* $p(x)$.

*Il existe un nombre positif*

$$R = \theta(n, n_1, n_2, \ldots, n_m;\, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n)$$

*ne dépendant que du nombre n des branches, des degrés de multiplicité* $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *et des coefficients* $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n$ [*et nullement des autres coefficients des séries* (12)], *tel que, à l'intérieur du cercle*

$$|z| < R = \theta(n, n_1, n_2, \ldots, n_m;\, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, \ldots, a_n, b_n),$$

*la fonction donnée ou bien possède un point singulier différent de* $z = 0$, *ou bien prend au moins une fois l'une des valeurs zéro et un.*

3. Comme nous avons démontré dans le travail précédent [*Généralisation d'un théorème de M. Landau* (ce *Bulletin*, t. XLI, 1913, p. 19-24)], le rayon R du théorème ci-dessus énoncé doit être plus grand que les nombres $\varphi(\alpha_{10}, \alpha_{11})$, $\varphi(\alpha_{20}, \alpha_{21})$, $\ldots$, $\varphi(\alpha_{m0}, \alpha_{m1})$, où $\varphi$ désigne la fonction indiquée par M. Landau dans son travail : *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Jahrgang 51, 1906) et déterminée par M. Carathéodory [*Sur quelques*

---

fini $n$ de branches algébroïdes en $z = 0$. On pourrait, d'ailleurs, sans diminuer la généralité de la question, partir du point $z = 0$ avec un seul système circulaire de branches.

*généralisations du théorème de M. Picard* (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXLI, 1905, p. 1213-1215)].

Les nombres $\alpha_{10}, \alpha_{20}, \alpha_{30}, \ldots, \alpha_{m0}$ sont les racines du polynome $p(x)$ et le module des nombres $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}, \ldots, \alpha_{m1}$ est donné par la formule

$$|\alpha_{k1}| = \left| \sqrt[n_k]{\frac{(1.2.3\ldots n_k)\,q(\alpha_{k0})}{p^{(n_1)}(\alpha_{k0})}} \right| \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

où $p^{(n_1)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre $n_1$ du polynome $p(x)$; on sait que les nombres $\varphi(\alpha_{k0}, \alpha_{k1})$ ne dépendent que du module de $\alpha_{k1}$.

Il faut remarquer que notre théorème II est beaucoup plus intéressant que le premier, parce qu'il exprime le rayon R en fonction des nombres donnés $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n; n, n_1, n_2, \ldots, n_m$, au lieu des nombres $\alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{20}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{m0}, \alpha_{m1}$ qui sont difficiles à trouver et exigent la connaissance des systèmes circulaires des branches qui se permutent autour du point $z = 0$. On sait que la détermination des degrés de multiplicité des racines d'un polynome $p(x)$ est un problème élémentaire de l'Algèbre facile à résoudre, tandis que la détermination des systèmes circulaires [1] se fait par une méthode de Puiseux qui est assez compliquée (*Voir* É. Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 348-360).

Nous tenons ici à appeler l'attention du lecteur sur le fait que la méthode que nous avons suivie pour établir le théorème II nous a donné l'occasion d'obtenir le résultat suivant :

*Soit $u = \varphi(z)$ une fonction algébroïde et finie à n branches dans le voisinage de $z = 0$, déterminée par l'équation*

$$u^n + A_1(z)u^{n-1} + A_2(z)u^{n-2} + \ldots + A_n(z) = 0,$$
$$A_1(z) = a_1 + b_1 z + \ldots,$$
$$A_2(z) = a_2 + b_2 z + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_n(z) = a_n + b_n z + \ldots.$$

*Si les polynomes*

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$
$$q(x) = b_1 x^{n-1} + b_2 x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} x + b_n$$

[1] Pour les fonctions algébriques.

*n'ont aucune racine commune, les branches qui, pour $z = 0$, prennent la même valeur forment un seul système circulaire : c'est-à-dire à chaque racine du polynome $p(x)$ correspond un seul système circulaire formé par des branches dont le nombre est égal au degré de multiplicité de la racine.*

4. Si la fonction donnée $u = \varphi(z)$ du théorème II est holomorphe, nous pouvons prendre $n = 1$ et nous aurons

$$p(x) = x + a_1, \qquad q(x) = b_1;$$

il faut donc supposer $b_1 \neq 0$ pour que les polynomes $p(x)$ et $q(x)$ n'aient aucune racine commune et cela suffit évidemment. Nous retombons ainsi au théorème de M. Landau, qui se présente parfaitement comme cas particulier de notre théorème II correspondant à la valeur $n = 1$.

En terminant ce travail, je tiens à faire une comparaison de ces résultats avec les autres que j'ai publiés dans les *Comptes rendus* des séances de l'Académie des Sciences de Paris et les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Les théorèmes I et II de ce travail apportent au théorème de M. Landau une généralisation concernant seulement le point $z = 0$ qui peut être un point critique algébrique pour un ensemble fini de branches, tandis que les autres (publiés dans les *Comptes rendus* et les *Rendiconti*), apportent une généralisation plus étendue comme concernant tout le domaine, dans lequel on envisage les valeurs exceptionnelles, qui peut avoir des points critiques algébriques quelconques, mais elle est moins précise et moins fidèle à d'autres points de vue.