

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. BRATU

Sur les équations intégrales non linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 41 (1913), p. 346-350

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1913__41__346_1

© Bulletin de la S. M. F., 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES;

PAR M. G. BRATU.

1. Soit l'équation intégrale du premier ordre

$$(1) \quad \Phi[x, \varphi(x)] = \lambda \int_0^1 K(x, y) F[y, \varphi(y)] dy,$$

dans laquelle nous supposons le noyau $K(x, y)$ une fonction continue et les fonctions données $\Phi(x, z)$, $F(y, z)$ des séries entières en z pour $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq 1$.

Soit, pour $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$ une solution de cette équation. En faisant $\lambda = \lambda_0 + \mu$, $\varphi = \varphi_0 + \psi$, la forme intégrale linéaire en ψ est

$$(2) \quad \Phi'(x, \varphi_0) \Psi(x) - \lambda_0 \int_0^1 K(x, y) F'(y, \varphi_0) \Psi(y) dy,$$

Φ' et F' désignant des dérivées par rapport à φ . Il y a trois cas à distinguer :

1° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \neq 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de deuxième espèce.

2° Si $\Phi'(x, \varphi_0)$ admet des racines isolées dans l'intervalle $(0, 1)$, $\varphi_0(x)$ sera une solution de troisième espèce.

3° Si $\Phi'(x, \varphi_0) \equiv 0$ pour $0 \leq x \leq 1$, la solution $\varphi_0(x)$ sera de première espèce.

Dans le premier cas, le noyau de l'expression (2) peut se mettre sous la forme

$$(3) \quad K_{\varphi_0}(x, y) = K(x, y) F'[y, \varphi_0(y)] \frac{1}{\Phi'[x, \varphi_0(x)]}.$$

2. Si $\varphi = \varphi_0(x)$, finie pour $0 \leq x \leq 1$, annule l'expression $\Phi(x, \varphi)$, l'équation (1) admet pour $\lambda = 0$ la solution $\varphi = \varphi_0(x)$ de deuxième espèce. Comme la fonction déterminante de Fredholm $D(\lambda)$ formée avec le noyau (3) est égale à 1 pour $\lambda = 0$, il résulte d'après le théorème de Schmidt (1) que l'équation (1) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$ se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = 0$.

Ainsi le nombre des solutions de l'équation (1), régulières autour de $\lambda = 0$, est au moins égal au nombre des solutions finies de l'équation $\Phi(x, \varphi) = 0$.

Dans le plan de la variable imaginaire λ , en dehors de l'origine, on peut, après M. Schmidt, énoncer le théorème suivant :

Si l'équation (1) admet, pour $\lambda = \lambda_0$, la solution finie

(1) Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen (Math. Ann., t. LXV, 1908).

$\varphi = \varphi_0(x)$ et si le déterminant de Fredholm $D(\lambda)$ formé avec le noyau (3) est différent de zéro pour $\lambda = \lambda_0$ et $\varphi = \varphi_0$, l'équation (1) admet une solution et une seule $\varphi(x, \lambda)$, holomorphe en λ autour de λ_0 et se réduisant à $\varphi_0(x)$ pour $\lambda = \lambda_0$.

Si $D(\lambda)$ est nul pour $\lambda = \lambda_0$ et $\varphi = \varphi_0$, il y a ramification autour de λ_0 , et $\varphi_0(x)$ est une solution limite.

3. La forme particulière $K(x, y)A(x)B(y)$, sous laquelle se présente le noyau (3), nous permet de faire une remarque pour le cas où le noyau donné $K(x, y)$ serait *symétrique et défini*. Le noyau (3) est alors symétrisable et toutes ses constantes caractéristiques sont *réelles*. Donc si l'équation (1) admet une solution finie $\varphi_0(x)$ pour une valeur λ_0 en dehors de l'axe réel, cette solution est régulière autour de λ_0 .

Le théorème de M. Schmidt ne nous apprend rien sur les solutions de première et de troisième espèce. On peut remarquer que, si $\Phi(x, \varphi)$ est de premier degré en φ , toutes les solutions de l'équation (1) sont *de même espèce*.

4. Si $K(x, y) = 0$ pour $y > x$, on a l'équation du type de Volterra. Comme dans ce cas le noyau (3) n'admet aucune constante caractéristique, l'équation (1) ne peut pas admettre des solutions limites.

5. *Équations intégrales algébriques*. — C'est le cas des équations de la forme (1) dans lesquelles les fonctions Φ et F sont des polynômes en φ .

Soit, par exemple, l'équation

$$(4) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y) P_n[y, \varphi(y)] dy + f(x),$$

dans laquelle

$$K(x, y) = \sum_{i=1}^p X_i(x) Y_i(y)$$

et

$$P_n(y, \varphi) = A_0(y) + A_1(y)\varphi + \dots + A_n(y)\varphi^n.$$

En posant

$$t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y) P_n[y, \varphi(y)] dy,$$

la solution de l'équation (4) prend la forme

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{i=0}^p X_i(x) t_i(\lambda) + f(x),$$

les fonctions $t_i(\lambda)$ étant les solutions du système d'équations algébriques

$$(6) \quad t_i = \lambda \int_0^1 Y_i(y) P_n \left[y, \sum_{j=0}^p X_j(y) t_j + f(y) \right] dy,$$

que nous appellerons *système implicite adjoint à l'équation intégrale (4)*.

Par suite :

1° Toute solution de l'équation (4) est *fonction algébrique de λ* .

2° Autour de $\lambda = 0$, *une solution et une seule est holomorphe*; elle s'annule pour $\lambda = 0$. *Toutes les autres branches ont $\lambda = 0$ comme pôle ou point critique d'ordre négatif*.

3° Pour $\lambda \neq 0$, l'équation (4) admet en général et au plus n^p solutions.

4° Toutes ces solutions n'admettent comme points singuliers $\lambda \neq 0$ que *des points critiques de deuxième ordre*, c'est-à-dire qu'autour de toute solution *limite* $\varphi_0(x)$ il y a *birémification*.

Comme les fonctions $t_i(\lambda)$ peuvent se mettre sous la forme $t_i = R_i(\lambda, \Lambda)$, R_i étant *rationnelle* en λ et Λ , et Λ représentant une *fonction algébrique* de λ (1), l'expression (5) prend la forme

$$\varphi(x, \lambda) = \frac{F_1(x, \lambda, \Lambda)}{F_2(\lambda, \Lambda)},$$

F_1 et F_2 étant des polynomes entiers en λ et Λ .

6. Le cas de $p = \infty$ est beaucoup plus difficile, car on a à résoudre un nombre infini d'équations implicites à une infinité d'inconnues.

M. R. d'Adhémar (2), en employant la méthode de M. E. Picard,

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III, p. 53 et 470.

(2) R. D'ADHÉMAR, *Les fonctions implicites en nombre infini et l'équation intégrale non linéaire* (*Bull. Soc. math.*, 1908, p. 195).

a démontré l'existence d'une solution holomorphe autour de $\lambda = 0$. Nous l'avons démontrée dans un cas plus général à l'aide des majorantes (1).

7. *Équations intégrales transcendentes.* — Soit l'équation avec un noyau de M. Goursat

$$(7) \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \sum_{i=1}^p A_i(x) B_i(y) F[\varphi(y)] dy,$$

dans laquelle $F(\varphi)$ est une fonction *entière* en φ . Sa résolution se réduit à celle du système implicite adjoint

$$(8) \quad \begin{cases} t_i = \lambda \int_0^1 B_i(y) F[A_1(y)t_1 + A_2(y)t_2 + \dots + A_p(y)t_p] dy \\ (i = 1, 2, \dots, p). \end{cases}$$

Si, pour $\lambda = \lambda_0$, ce système admet les solutions $t_1^0, t_2^0, \dots, t_p^0$ et si le jacobien correspondant $D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p)$ est différent de zéro pour ces valeurs, le système (8) admet des solutions t_1, t_2, \dots, t_p régulières autour de $\lambda = \lambda_0$. Or, si l'on désigne par F'_φ la dérivée de $F(\varphi)$ et si l'on pose

$$X_i = A_i, \quad Y_i = B_i F'_\varphi(A_1 t_1 + A_2 t_2 + \dots + A_p t_p),$$

d'après un calcul de M. Goursat (2) dans le cas de l'équation de Fredholm, on trouve comme jacobien le polynome intégral

$$D(\lambda, t_1, t_2, \dots, t_p) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p-v} \lambda^v}{v!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K \begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_v \\ x_1, x_2, \dots, x_v \end{pmatrix} \prod_{i=1}^v F'_\varphi[\varphi(x_i)] dx_1 \dots dx_v$$

qui n'est que le déterminant de Fredholm correspondant au noyau $K(x, y) F'_\varphi[\varphi(y)]$. On retrouve ainsi, dans ce cas, le théorème de M. Schmidt.

(1) G. BRATU, *Sur l'équation intégrale exponentielle* (C. R. Acad. Sc., 18 avril 1911).

(2) E. GOURSAT, *Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm* (Bull. de la Soc. math. de France, t. XXXV, 1907, p. 163).