BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DONTOT

Sur les invariants intégraux et quelques points d'optique géométrique

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 53-91

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__53_1>

SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX ET QUELQUES POINTS D'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. R. DONTOT.

INTRODUCTION.

Considérons une suite de milieux de nature quelconque, les milieux extrêmes étant isotropes à indice constant : un rayon lumineux se transformant en un autre rayon, on définit ainsi une transformation de droites en droites vérifiant une relation connue, à savoir le théorème de Malus. Si nous nous contentons, avec M. Bruns, de chercher quelles transformations de droites en droites satisfont à cet important théorème, nous sommes amenés à écrire six conditions (les conditions de Malus) que doivent vérifier les quatre fonctions définissant la transformation ; elles expriment qu'une certaine quantité

$$n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z})$$

est une différentielle totale. Nous avons, au paragraphe I du présent travail, en employant les méthodes de l'*Eikonal* et en les simplifiant seulement sur deux ou trois points, établi cet important résultat.

La condition imposée, indépendante des milieux intermédiaires, est certainement satisfaite pour des transformations par rayons lumineux ; mais la réciproque n'est peut-être pas exacte : il n'est pas possible d'affirmer qu'une transformation de droites en droites vérifiant le théorème de Malus, soit optiquement réalisable. Cependant, cette condition nécessaire suffit pour l'étude de l'aplanétisme point par point de deux surfaces ou de deux espaces et permet d'établir ce résultat essentiel : la transformation point par point de deux volumes aplanétiques est une similitude.

Il était intéressant d'arriver à ces conclusions par des voies différentes, en cherchant un invariant intégral attaché aux rayons lumineux, considérés comme des trajectoires et de le transformer par les méthodes de M. Poincaré, en un autre géométrique en quelque sorte attaché aux trajectoires et indépendant du mouvement. Ce procédé, indiqué par M. Hadamard, conduit à la considération de l'invariant

$$n^2 \cos\theta \, ds \, d\omega.$$

Cet invariant donne sur le champ le rapport de similitude dans le cas de l'aplanétisme point par point et il apparaît ainsi que ce rapport ne saurait être différent de 1 quand les milieux extrêmes sont identiques. La quantité $n^2 \cos\theta \, ds \, d\omega$ intervient d'ailleurs dans un théorème d'optique important, le théorème de Straubel, dont il est fait aujourd'hui grand usage.

Il nous a paru nécessaire de donner de ce théorème une démonstration simple et rigoureuse et d'indiquer qu'il se généralise sans peine, au cas où les rayons sont remplacés par les bicaractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles analogues à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - n^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0.$$

I.

LES CONDITIONS DE MALUS ET « L'EIKONAL ».

Le théorème de Malus (et plus généralement celui de Thomson et Tait pour les trajectoires en dynamique) exprime que les rayons lumineux normaux à une surface demeurent après réfraction normaux à une autre surface. On peut se proposer avec M. Bruns [1] d'étudier la transformation de droites en droites, telle qu'une congruence de normales se transforme en une autre congruence de normales. Le problème ainsi posé dans toute sa généralité, comporte une solution fort simple exposée dans le Mémoire déjà cité.

---

[1] *Das Eikonal* (*Abhandlungen der Sächs. Gesellsch.*, t. XXI, 1895).

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface S, rapportée à trois axes rectangulaires; m, p, q les paramètres directeurs d'une droite D passant par ce point : la condition nécessaire et suffisante pour que les droites D forment une congruence de normales, c'est que m, p, q soient trois fonctions des deux paramètres définissant la position du point (x, y, z) sur la surface, telles que

$$m\,dx + p\,dy + q\,dz$$

soit une différentielle totale (¹). M. Bruns choisit pour surface (S) le plan des yz, pour paramètres $y = h$, $z = k$; il suppose de plus h et k fonctions de p, q. La condition est alors que $hdp + kdq$ soit une différentielle totale (¹), c'est-à-dire

$$\frac{\partial h}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial p}.$$

Soit dF la différentielle d'une fonction des quatre variables h, k, p, q ; nous conviendrons avec lui de la noter

$$dF = F_1\,dh + F_2\,dk + F_3\,dp + F_4\,dq$$

et nous désignerons par le symbole $(FG)_{ij}$ le déterminant

$$(FG)_{ij} = \begin{vmatrix} F_i & F_j \\ G_i & G_j \end{vmatrix}.$$

Nous appellerons *transformation de Malus* toute transformation de droites en droites conservant les congruences de normales. Soit alors dans un premier espace ou milieu trois axes $Oxyz$ rectangulaires auxquels sont rapportées les droites (h, k, p, q) et dans un second trois autres $O'XYZ$ auxquels sont rapportées les droites (H, K, P, Q).

Supposons alors la transformation définie par les équations

$$\begin{aligned} H &= A(h, k, p, q), & P &= C(h, k, p, q), \\ K &= B(h, k, p, q), & Q &= D(h, k, p, q), \end{aligned}$$

et réversible $\dfrac{D(H, K, P, Q)}{D(h, k, p, q)} \neq 0$.

(¹) Darboux, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 274.

Quand h et k sont deux fonctions de p et de q, H, K, P, Q sont fonctions des deux paramètres p et q : cherchons dans cette hypothèse par un calcul direct à quelle condition $\mathrm{H}\,d\mathrm{P} + \mathrm{K}\,d\mathrm{Q}$ est une différentielle totale. En utilisant les notations dont nous venons de convenir, et en posant

$$dh = h_1\,dp + h_2\,dq,$$
$$dk = k_1\,dp + k_2\,dq,$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\mathrm{H}\,d\mathrm{P} + \mathrm{K}\,d\mathrm{Q} = \quad & [(\mathrm{AC}_1 + \mathrm{BD}_1)h_1 + (\mathrm{AC}_2 + \mathrm{BD}_2)k_1 + (\mathrm{AC}_3 + \mathrm{BD}_3)]\,dp \\ & + [(\mathrm{AC}_1 + \mathrm{BD}_1)h_2 + (\mathrm{AC}_2 + \mathrm{BD}_2)k_2 + (\mathrm{AC}_3 + \mathrm{BD}_3)]\,dq, \\ = {} & a\,dp + b\,dq.\end{aligned}$$

Cette quantité est une différentielle exacte si

$$\frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\partial b}{\partial p},$$

ce qui nous donne après réductions

$$\begin{aligned}(1)\quad \mathrm{o} = (h_1 k_2 - h_2 k_1) & \\ [(\mathrm{AC})_{12} + (\mathrm{BD})_{12}] & + h_1[(\mathrm{AC})_{14} + (\mathrm{BD})_{14}] + h_2[(\mathrm{AC})_{31} + (\mathrm{BD})_{31}] \\ + k_1[(\mathrm{AC})_{24} + (\mathrm{BD})_{24}] & + k_2[(\mathrm{AC})_{32} + (\mathrm{BD})_{32}] + [(\mathrm{AC})_{34} + (\mathrm{BD})_{34}].\end{aligned}$$

Nous nous sommes proposé de rechercher quelle devait être la transformation pour que la condition

$$\frac{\partial h}{\partial q} = \frac{\partial k}{\partial p}$$

entraîne celle-ci. Prenons donc

$$h = \frac{\partial \theta}{\partial p}, \qquad k = \frac{\partial \theta}{\partial q},$$
$$h_1 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial p^2}, \qquad k_2 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial q^2}, \qquad h_2 = k_1 = \frac{\partial^2 \theta}{\partial q\,\partial p};$$

comme θ est une fonction absolument arbitraire de p et q, les quantités $h_1 k_2 - h_2 k_1$, h_1, h_2, k_2 peuvent être considérées comme des variables indépendantes ; pour que $\mathrm{H}\,d\mathrm{P} + \mathrm{K}\,d\mathrm{Q}$ demeure une différentielle totale, il faut donc et il suffit que

$$
(2) \qquad \begin{cases} (AC)_{12} + (BD)_{12} = 0, \\ (AC)_{14} + (BD)_{14} = 0, \\ (AC)_{23} + (BD)_{23} = 0, \\ (AC)_{34} + (BD)_{34} = 0, \\ (AC)_{13} + (BD)_{13} = (AC)_{24} + (BD)_{24} = E. \end{cases}
$$

Les six conditions ainsi déterminées sont dites *premières conditions de Malus*. Elles expriment que l'expression (1) se réduit à

$$(k_1 - h_2)E = 0,$$

c'est-à-dire que si $hdp + kdq$ est une différentielle totale, $HdP + KdQ$ en est une autre et, réciproquement, si nous supposons $E \neq 0$, que si $HdP + KdQ$ est une différentielle totale, $hdp + kdq$ en est une autre. Cette dernière propriété s'exprime par six nouvelles conditions, dites *secondes conditions de Malus*, qui sont par suite la conséquence de celles déjà écrites. Proposons-nous d'en faire la recherche : pour cela considérons h, k, p, q comme des fonctions de H, K, P, Q définies par

$$
\begin{aligned}
H &= A(h, k, p, q), \\
K &= B(h, k, p, q), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

$$
(3) \qquad \begin{cases} dH = A_1\, dh + A_2\, dk + A_3\, dp + A_4\, dq, \\ dK = B_1\, dh + B_2\, dk + B_3\, dp + B_4\, dq, \\ dP = C_1\, dh + C_2\, dk + C_3\, dp + C_4\, dq, \\ dQ = D_1\, dh + D_2\, dk + D_3\, dp + D_4\, dq. \end{cases}
$$

Résolvons ce système d'équations en dh, dk, dp, dq : il est bon de remarquer qu'en vertu des identités (2)

$$(BCD)_{234} = EC_3.$$

En effet,

$$(BCD)_{234} = - C_2(BD)_{34} + C_3(BD)_{24} - C_4(BD)_{23}$$

c'est-à-dire

$$
\begin{aligned}
(BCD)_{234} &= E_2(AC)_{34} - C_3(AC)_{24} + C_4(AC)_{23} + EC_3 \\
&= (ACC)_{234} + EC_3.
\end{aligned}
$$

De même aurait-on,

$$(ACD)_{234} = -ED_3, \qquad (ABD)_{234} = -EA_3, \qquad (ABC)_{234} = EB_3, \qquad \ldots,$$

et enfin

$$\begin{aligned}(ABCD)_{1234} &= E(A_1C_3 + B_1D_3 - A_3C_1 - B_3D_1)\\ &= E[(AC)_{13} + (BD)_{13}]\\ &= E^2.\end{aligned}$$

On voit en particulier que E étant la racine carrée du déterminant fonctionnel de la transformation ne s'annule jamais. Nous pouvons donc toujours résoudre les équations linéaires (3) en dh, dk, dp, dq, ce qui donne

$$\begin{aligned}dh &= \frac{1}{E}(C_3\,dH + D_3\,dK - A_3\,dP - B_3\,dQ),\\ dk &= \frac{1}{E}(C_4\,dH + D_4\,dK - A_4\,dP - B_4\,dQ),\\ dp &= \frac{1}{E}(C_1\,dH + D_1\,dK - A_1\,dP - B_1\,dQ),\\ dq &= \frac{1}{E}(C_2\,dH + D_2\,dK - A_2\,dP - B_2\,dQ).\end{aligned}$$

A_1, B_1, ..., D_4 sont des fonctions de H, K, P, Q par l'intermédiaire de h, k, p, q. Écrivons les quatre premières conditions de Malus, nous obtenons

$$\begin{aligned}(AB)_{13} + (AB)_{24} &= 0,\\ (AD)_{13} + (AD)_{24} &= 0,\\ (BC)_{13} + (BC)_{24} &= 0,\\ (CD)_{13} + (CD)_{24} &= 0.\end{aligned}$$

Les deux dernières

$$(AC)_{13} + (BD)_{13} = (AC)_{24} + (BD)_{24} = \sqrt{\frac{D(H, K, P, Q)}{D(h, k, p, q)}}$$

deviennent

$$\frac{1}{E^2}[(AC)_{13} + (AC)_{24}] = \frac{1}{E^2}[(BD)_{13} + (BD)_{24}] = \sqrt{\frac{D(h, k, p, q)}{D(H, K, P, Q)}} = \pm\frac{1}{E}.$$

Donc

$$(AC)_{13} + (AC)_{24} = (BD)_{13} + (BD)_{24} = E.$$

La question de signe ne saurait soulever d'ambiguïté, car l'identité doit avoir lieu encore, quand $A = h$, $K = k$, $P = p$, $Q = q$ et E ne s'annule jamais.

Ces six dernières conditions, sont les secondes conditions de Malus. Désignons par le symbole (u, v), l'opération $(u, v)_{13} + (u, v)_{24}$ faite sur les fonctions u, v de h, k, p, q : les conditions deviennent, avec ce système de notations,

$$(4) \qquad \begin{cases} (AB) = 0, \quad (AD) = 0, \quad (BC) = 0, \quad (CD) = 0, \\ (AC) = (BD) = E. \end{cases}$$

Si v est une fonction composée de h, k, p, q par l'intermédiaire de φ, ψ, θ..., on a

$$(u, v) = \frac{\partial v}{\partial \varphi}(u, \varphi) + \frac{\partial v}{\partial \psi}(u, \psi) + \ldots.$$

Ceci posé, partons de l'identité

$$[u(v, w)] + [v(w, u)] + [w(u, v)] = 0,$$

et faisons-y, par exemple,

$$u = A, \qquad v = B, \qquad w = C;$$

nous obtiendrons, en vertu des relations (4),

$$(A, O) + (B, E) + (C, O) = 0,$$

c'est-à-dire $(B, E) = 0$; de même on trouverait

$$(A, E) = (B, E) = (C, E) = (D, E) = 0.$$

La condition $(A, E) = 0$ peut s'écrire, à cause de l'identité,

$$(A, E) = \frac{\partial E}{\partial A}(A, A) + \frac{\partial E}{\partial B}(A, B) + \frac{\partial E}{\partial C}(A, C) + \frac{\partial E}{\partial D}(A, D),$$

$$\frac{\partial E}{\partial C} = 0.$$

De même

$$\frac{\partial E}{\partial A} = \frac{\partial E}{\partial B} = \frac{\partial E}{\partial C} = \frac{\partial E}{\partial D} = 0.$$

La fonction E de h, k, p, q, considérée comme fonction de H, K, P, Q, est indépendante de ces variables ; c'est donc une constante en H, K, P, Q et par suite en h, k, p, q.

Dans une première transformation, faisant correspondre aux droites d'un milieu Ω_1 celles d'un milieu Ω_2, dans chacun desquels des axes rectangulaires ont été choisis, on obtient, en exprimant les conditions de Malus, une constante E_{12} : de même dans le passage de Ω_2 à un autre milieu Ω_3 obtiendrait-on une constante E_{23}. Cette double transformation équivaut évidemment à une transformation faisant passer d'une droite du milieu Ω_1 à une droite du milieu Ω_3 : cette transformation nous donne une nouvelle constante E_{13} et comme en général

$$E^2 = \frac{D(H, K, P, Q)}{D(h, k, p, q)},$$

la règle de multiplication des déterminants fonctionnels donne

$$E_{13}^2 = E_{12}^2 E_{23}^2,$$

et par suite, sans ambiguïté pour une raison déjà donnée,

$$E_{13} = E_{12} E_{23}.$$

Il en résulte que la constante E est indépendante du choix des axes : changer les axes, c'est par rapport aux axes primitifs effectuer un certain déplacement de l'espace; or tout déplacement peut être obtenu par deux symétries par rapport à un plan, c'est-à-dire deux réflexions. On passera donc de l'espace d'où l'on est parti à l'espace rapporté aux nouveaux axes, en passant d'abord à ce même espace rapporté aux anciens, ce qui donne la constante E, puis à l'espace symétrique par rapport à un certain plan qu'on choisira comme plan des yz ce qui donne la constante -1, ... On obtiendra en définitive

$$E(-1)(-1) = E.$$

La constante E est donc caractéristique de la transformation. Nous conviendrons d'affecter un nombre n_α à chaque espace Ω_α, de sorte que le passage de l'espace Ω_α à l'espace Ω_β soit caractérisé par $\frac{n_\alpha}{n_\beta}$,

$$E(\Omega_\alpha, \Omega_\beta) = \frac{n_\alpha}{n_\beta}.$$

Cette notation met en évidence la propriété du nombre E

$$E(\Omega_\alpha, \Omega_\beta) E(\Omega_\beta, \Omega_\gamma) = E(\Omega_\alpha, \Omega_\gamma).$$

Si l'on considère les six conditions de Malus comme des équations aux dérivées partielles définissant les fonctions inconnues H, K, P, Q, la physique nous en donne une solution avec fonctions arbitraires (réfraction sur une suite de surfaces quelconques); il est d'ailleurs facile de résoudre complètement le problème de la recherche des fonctions H, K, P, Q. Les conditions de Malus expriment en effet que la quantité

$$n(p\,dh + q\,dk) + N(H\,dP + Q\,dK)$$

est la différentielle totale d'une fonction S de h, k, p, q. Supposons les équations

$$(5)\qquad \begin{cases} P = C(h, k, p, q), \\ Q = D(h, k, p, q), \end{cases}$$

résolubles en C et D, $(CD)_{33} \neq 0$: remplaçons dans $S(h, k, p, q)$ p et q par leurs valeurs tirées des deux équations (5), S deviendra une fonction $E(h, k, P, Q)$ et l'on aura évidemment

$$dE = n(p\,dh + q\,dk) + N(H\,dP + Q\,dK),$$

et par suite

$$np = \frac{\partial E}{\partial h}, \qquad nq = \frac{\partial E}{\partial k}, \qquad NH = \frac{\partial E}{\partial P}, \qquad NK = \frac{\partial E}{\partial Q}.$$

Inversement, soit E une fonction de h, k, P, Q, choisie en sorte que ces équations soient résolubles en H, K, P, Q. Les fonctions $H = (h, k, p, q), \ldots$ qu'on en tire définissent une transformation, et si $(CD)_{34} \neq 0$, cette transformation répond aux conditions de Malus.

Cette solution du problème est en quelque sorte connue depuis longtemps : considérons en effet h, k comme des variables représentant deux des coordonnées x et y d'un point, p, q, -1 les paramètres d'un plan, si l'on prend pour X, Y, Z, P, Q coordonnées d'un point et d'un plan passant par ce point, des fonctions de x, y, z, p, q,

$$(6)\qquad \begin{cases} X = A(x, y, p, z), & P = C(x, y, p, q), \\ Y = B(x, y, p, q), & Q = D(x, y, p, q), \\ Z = +\dfrac{n}{N} z - E(x, y, p, q), \end{cases}$$

choisies de manière que,

$$N(P\,dX + Q\,dY) + dE(x, y, p, q) = n(p\,dx + q\,dy),$$

on définit par les formules (6) une transformation de contact en (x, p) [1], et il est évident que si $pdx + qdy$ est une différentielle totale, $PdX + QdY$ en est une autre. Un théorème bien connu, démontré par Sophus Lie, nous apprend que les fonctions A, B, P, Q doivent vérifier les équations aux dérivées partielles

$$(A,B) = (A,D) = (B,C) = (C,D) = 0,$$
$$(C,A) = (D,B) = -\frac{n}{N}.$$

Ce sont donc bien là six conditions suffisantes : la démonstration précédente met en évidence qu'elles sont nécessaires.

La fonction $E(h, k, P, Q)$ génératrice de la transformation s'appelle *Eikonal.* Il est évident qu'on peut obtenir 16 Eikonals différents, car, le remplacement de HdP par PdH par exemple n'altère pas l'intégrabilité de la quantité primitivement considérée. M. Bruns a démontré (mais ceci sortirait du cadre que nous nous sommes imposé) que pour une transformation donnée, il existait toujours au moins quatre Eikonals, c'est-à-dire que par exemple des quatre quantités $(CD)_{34}$, $(CD)_{14}$, $(CD)_{23}$, $(CD)_{12}$, trois au plus était nulles à la fois.

II.

LES CONDITIONS NÉCESSAIRES D'APLANÉTISME.

Les transformations de Malus, sont donc telles que la quantité

$$n(p\,dh + q\,dk) - N(P\,dH + Q\,dK)$$

soit une différentielle totale, ou encore que

$$n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - N(M\,dX + P\,dY + Q\,dZ)$$

en soit une.

Au lieu de poursuivre, comme l'a fait M. Bruns, la recherche des conditions d'aplanétisme par l'application brutale des conditions de Malus, il nous a paru plus facile d'exprimer simplement que la quantité

$$(7) \qquad n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - N(M\,dX + P\,dY + Q\,dZ)$$

---

[1] GOURSAT, *Equations aux dérivées partielles,* p. 281.

est une différentielle exacte. Cette méthode a l'avantage de permettre d'aborder le problème de l'aplanétisme, sans avoir approfondi les méthodes de l'Eikonal, quand on borne son étude aux transformations optiquement réalisables ; la différence (7) est pour ces transformations la différentielle du chemin optique, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.

Rapportons pour l'instant les différents points de l'espace à un seul système d'axes rectangulaires : on sait qu'un rayon (m, p, q), se réfractant en un point d'une surface où la normale a pour paramètres directeurs α, β, γ, prend une nouvelle direction MPQ définie par

$$\begin{aligned} nm - \mathrm{NM} &= \lambda\alpha, \\ np - \mathrm{NP} &= \lambda\beta, \\ nq - \mathrm{NQ} &= \lambda\gamma, \end{aligned}$$

(n, N sont des indices des milieux successifs, et le sens positif sur chaque rayon est par exemple le sens inverse de propagation de la lumière).

Soient u_i, v_i, w_i les coordonnées du point de passage du milieu d'indice n_i au milieu d'indice n_{i+1}, m_i, p_i, q_i les paramètres directeurs d'un rayon aboutissant dans le milieu d'indice n_i; désignons par ρ_i la distance entre le point $(u_{i-1}, v_{i-1}, w_{i-1})$ et le point (u_i, v_i, w_i)

$$u_i = u_{i-1} + m_i \rho_i, \qquad \ldots$$

par suite,

$$du_i = du_{i-1} + dm_i \rho_i + m_i\, d\rho_i.$$

Il en résulte que

$$n_i(m_i\, du_i + p_i\, dv_i + q_i\, dw_i) - n_i(m_i\, du_{i-1} + p_i\, dv_{i-1} + q_i\, dw_{i-1}) = n_i\, d\rho_i.$$

Soient alors (x, y, z), (m, p, q) un point et un rayon du premier milieu n, (X, Y, Z), (H, P, Q) du rayon réfracté dans le milieu final N, on aura, en sommant toutes les égalités obtenues en faisant $i = 1, 2, \ldots$,

$$n(m\, dx + p\, dy + q\, dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\, d\mathrm{X} + \mathrm{P}\, d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\, d\mathrm{Z}) = \Sigma\, dn_i \rho_i.$$

On peut interpréter géométriquement cette formule : soient A, B les extrémités du chemin optique ; AA', BB' les segments dont les projections sur les axes sont dx, dy, dz, $d\mathrm{X}$, $d\mathrm{Y}$, $d\mathrm{Z}$; ASBS' le rayon lumineux; l'égalité équivaut à

$$n\,AA'\cos(AA', AS) - N.BB'\cos(BB', BS') = d(ns).$$

Si donc on rapporte les éléments du premier milieu à trois axes rectangulaires quelconques, les éléments du second à trois autres, on aura toujours

$$(7) \quad n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - N(M\,dX + P\,dY + Q\,dZ) = d\Sigma\,ns.$$

Le second membre est la différentielle du chemin optique : la fonction Eikonal n'est donc pas autre chose que le chemin optique entre le point (x, y, z) et le point (X, Y, Z), ou avec les notations du premier Chapitre, entre le point (o, h, k) et le point (o, H, K).

Réciproquement, si cette quantité est une différentielle totale, la transformation est une transformation de Malus. Nous nous bornerons à montrer qu'on trouve bien les six conditions (4) en exprimant que

$$n(p\,dh + q\,dk) - N(P\,dH + Q\,dK) = d\Sigma\,ns.$$

c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}[np - N(CA_1 + DB_1)]\,dh + [nq - N(CA_2 + DB_2)]\,dk \\ - N(CA_3 + DB_3)\,dp - N(CA_4 + DB_4)\,dq = d\Sigma\,ns.\end{aligned}$$

Pour que le premier membre soit une différentielle, il faut et il suffit que

$$\begin{aligned}(AC)_{12} + (BD)_{12} &= 0,\\ n - N[(AC)_{13} + (AD)_{13}] &= 0,\\ (AC)_{14} + (BD)_{14} &= 0,\\ (AC)_{23} + (BD)_{23} &= 0,\\ n - N[(AC)_{24} + (BD)_{24}] &= 0,\\ (AC)_{34} + (BD)_{34} &= 0.\end{aligned}$$

Ce sont les premières conditions de Malus : nous apercevons de plus la valeur de la quantité E que nous avons été amenés à considérer comme le quotient de deux nombres caractérisant les milieux extrêmes : ces nombres désignés dans le premier paragraphe par n_α sont proportionnels aux indices de réfraction et E est l'indice de passage du premier milieu au milieu extrême.

Nous obtenons donc les conditions de Malus par un procédé qui met en lumière le résultat fondamental de la synthèse de M. Bruns, pour une transformation optiquement réalisable, à savoir que

$$(8) \qquad n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - N(M\,dX + P\,dY + Q\,dZ)$$

est une différentielle totale. La réciproque est bien facile à établir, si cette quantité (8) est une différentielle exacte, la transformation est une transformation de Malus. L'avantage des démonstrations du Mémoire déjà cité consiste en ce qu'elles montrent qu'on a bien là une condition nécessaire pour que la transformation, optiquement réalisable ou non, conserve les congruences de normales.

Pour l'étude que nous poursuivons, et qui est de rechercher les conditions d'aplanétisme point par point de deux variétés à deux ou trois dimensions, il nous a paru plus commode d'exprimer sans recourir aux conditions explicites de Malus, que la quantité (8) est une différentielle totale.

Supposons par exemple que les points d'un espace ω correspondent aplanétiquement à ceux de l'espace Ω : la transformation point par point ainsi définie est évidemment une transformation homographique ; nous distinguerons deux cas, suivant qu'elle transforme le plan de l'infini de l'un des milieux en un plan à distance fini dans l'autre, c'est-à-dire qu'elle est générale, ou bien qu'elle transforme ce plan dans le plan à l'infini.

Dans ce dernier cas, nous dirons [1] qu'elle est *affine* (de l'allemand *affine*, couramment employé dans le sens précédent). Supposons donc d'abord que les points d'un certain plan (p) de l'espace ω correspondent dans Ω à des points à l'infini, prenons dans ω ce plan comme plan des yz, et choisissons de même dans Ω le correspondant (P) du plan de l'infini de (ω) comme plan des YZ. Au point à l'infini dans la direction perpendiculaire à (p), correspond dans Ω un point O' situé dans (P) et de même il y a un point O de (p) dont le correspondant de Ω est à l'infini dans la direction perpendiculaire à (P). Choisissons pour axes des z les perpendiculaires Oz, $O'Z$ aux plans p et P; ces deux droites se correspondent dans la transformation : à deux plans rectangulaires

---

(1) D'OCAGNE, *Cours de l'École Polytechnique*, 1912-1913.

passant par O′Z, correspondront deux plans passant par Oz; et lorsque les deux premiers tourneront autour de O′Z, les deux autres formeront autour de Oz les couples d'une involution : choisissons, pour plans des xz et des yz, le couple de deux plans rectangulaires de cette involution, leurs correspondants seront dans l'espace (Ω) deux plans rectangulaires; nous prendrons, pour plan XZ, le correspondant de xz et, pour YZ, le correspondant de yz.

Les équations de la transformation rapportées à ces axes prennent la forme suivante :

$$X = ax, \qquad Y = by, \qquad Z = ct, \qquad T = z.$$

Nous prendrons pour xyz les coordonnées x, y, o, 1 du point situé dans le plan des xy; il lui correspond dans l'espace Ω le point (ax, by, c, o)

$$\frac{M}{ax_1} = \frac{P}{by_1} = \frac{Q}{C} = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2}}.$$

Au point (m, p, q, o) correspond le point de l'espace Ω (am, bp, o, q); nous prendrons pour X, Y, Z, $\frac{am}{q}$, $\frac{bp}{q}$, o. Il faudra que

$$n(m\,dx_1 + p\,dy_1) - N\left[\lambda a x_1\, d\left(\frac{am}{q}\right) + \lambda b y_1\, d\left(\frac{bp}{q}\right)\right],$$

soit en x, y, m, p une différentielle totale : posons $m = qu$, $p = qv$, et par suite

$$q = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}};$$

la quantité

$$nq(u\,dx_1 + v\,dy_1) - N\lambda(a^2x_1\,du + b^2y_1\,dv)$$

sera aussi en x, y, u, v une différentielle totale; il faudra pour cela que certaines conditions soient remplies, par exemple

$$n\frac{\partial q}{\partial v}u = -Nb^2y_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_1},$$

$$n\frac{\partial q}{\partial u}v = -Na^2x_1\frac{\partial\lambda}{\partial y_1}.$$

Les quantités dans le premier membre ne contenant ni x_1, ni y_1, celles du second ni u, ni v, il ne saurait y avoir identité si chacun des membres n'était constant,

$$n\frac{\partial q}{\partial v}u = c_1,$$

$$n\frac{\partial q}{\partial u}v = c_2,$$

ce qui est manifestement impossible.

La transformation générale ne peut donc être réalisée par une suite de réfractions; supposons alors que les points à l'infini se correspondent dans les milieux (ω) et (Ω), c'est-à-dire que la transformation soit affine. Choisissons comme origines O et O′ deux points correspondants et par O′ menons trois plans rectangulaires déterminant un trièdre $O'\alpha'\beta'\gamma'$: les points à l'infini α', β', γ' sur chacune des arêtes forment un triangle conjugué à l'ombilicale I′ : désignons par α, β, γ les points correspondants de α', β', γ' dans le premier milieu; ces points sont conjugués par rapport à la transformée (I) de I′; pour que le trièdre $O\alpha\beta\gamma$ soit trirectangle, il faudra qu'ils soient aussi conjugués à l'ombilicale J de ce milieu; ce sont les sommets du triangle conjugué commun à ces deux coniques ; on voit donc qu'étant donnés deux points O et O′ correspondants, on peut trouver deux trièdres trirectangles ayant ces points pour sommets et dont les arêtes se correspondent point par point. Le premier $Oxyz$ sera choisi comme trièdre de coordonnées dans le premier milieu, le second OXYZ dans l'autre.

[Dans le cas ou les deux ombilicales se correspondraient (similitude) un de ces deux trièdres pourrait être arbitrairement choisi.]

Les équations de transformation deviennent alors

$$X = ax, \qquad Y = by, \qquad Z = cz.$$

Le rayon lumineux de direction m, p, q après réfraction est parallèle à la direction am, bp, cq,

$$\frac{M}{am} = \frac{P}{bp} = \frac{Q}{cq} = \lambda,$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2p^2 + c^2q^2}}.$$

Nous prendrons, pour X, Y, Z, ax, by, cz; la quantité

$$n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - N\lambda(a^2 m\,dx + b^2 p\,dy + c^2 q\,dz)$$

est une différentielle totale en x, y, z, p, q; ceci ne peut être que si

$$\begin{aligned} n - N\lambda a^2 &= 0,\\ p - N\lambda b^2 &= 0,\\ n - N\lambda c^2 &= 0, \end{aligned}$$

$$a = b = c = \frac{n}{N}.$$

La seule tranformation qui fait correspondre à tout point-objet un point-image unique est une similitude, le rapport de similitude étant égal à l'inverse de l'indice de passage d'un milieu à l'autre, c'est-à-dire, ces milieux étant en général identiques, à *un*. M. Bruns ([1]) arrive aux mêmes conclusions en appliquant à la transformation les conditions de Malus; il ne semble pas (bien que ce résultat soit au fond contenu dans l'Eikonal) avoir remarqué que le grossissement peut être en général différent de *un* : ayant examiné le cas précédent, il écrit en effet : « A cause de sa simplicité, il n'est pas nécessaire d'en poursuivre plus longuement l'étude, d'autant moins qu'en Optique pratique il ne s'agit en aucune façon de produire des représentations géométriquement semblables des corps. » Comme l'a fait observer M. Hadamard ([2]), ce résultat, s'il pouvait être obtenu avec un grossissement différent de *un*, constituerait la solution la plus satisfaisante du problème de la dioptrique, et il convient d'observer avec soin qu'il ne saurait en général en être ainsi.

Il en est de ce résultat comme de beaucoup d'autres contenus en substance dans l'Eikonal, mais que l'auteur a négligé de mettre en lumière.

Cherchons par exemple à quelle condition une transformation fera correspondre astigmatiquement les points de deux surfaces s et S. Supposons que les coordonnées des points de chacune de ces deux surfaces soient des fonctions des mêmes paramètres α, β, en sorte qu'à une valeur α, β correspondent deux points conjugués.

([1]) *Das Eikonal* (*Abhandl. der Sächs. Gesellsch.*, t. XXI, p. 370).

([2]) *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898.

Nous prendrons pour x, y, z, X, Y, Z de la quantité

$$(8) \qquad n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z}),$$

les coordonnées x, y, z, X, Y, Z, fonctions de α, β, des points où le rayon lumineux rencontre les surfaces conjuguées. La différence (8) sera de la forme

$$\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta,$$

où A = fonction de p, q, α, β, de même B; mais comme $\mathrm{A}\,d\alpha + \mathrm{B}\,d\beta$ est une différentielle totale, A et B ne sont fonctions que de α et β, car

$$\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q} = 0;$$

par suite;

$$(9) \quad n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z}) = d\psi(\alpha, \beta).$$

Il faut donc que M, P, Q vérifient les équations

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{M}^2 + \mathrm{P}^2 + \mathrm{Q}^2 = 1, \\ n\left(m\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + p\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + q\dfrac{\partial z}{\partial \alpha}\right) - \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \alpha} + \mathrm{P}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \alpha} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \alpha}\right) = \dfrac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \\ n\left(m\dfrac{\partial x}{\partial \beta} + p\dfrac{\partial y}{\partial \beta} + q\dfrac{\partial z}{\partial \beta}\right) - \mathrm{N}\left(\mathrm{M}\dfrac{\partial \mathrm{X}}{\partial \beta} + \mathrm{P}\dfrac{\partial \mathrm{Y}}{\partial \beta} + \mathrm{Q}\dfrac{\partial \mathrm{Z}}{\partial \beta}\right) = \dfrac{\partial \psi}{\partial \beta}; \end{array} \right.$$

on pourra prendre arbitrairement la fonction ψ, les trois équations (10) détermineront alors M, P, Q en fonction de p, q, α, β. La transformation ainsi définie sera une transformation de Malus répondant à la question.

On voit donc avec M. Bruns que le problème de la correspondance point par point de deux surfaces comporte une infinité de solutions quand bien même la correspondance entre les deux surfaces serait donnée. Interprétons géométriquement les résultats trouvés ; soient m, M deux points conjugués ; mt, MT les tangentes à deux courbes conjuguées dont les arcs seront s, S,

$$\begin{aligned} dx &= ds\,\cos(\mathrm{O}x.mt), \qquad \ldots, \\ d\mathrm{X} &= d\mathrm{S}\,\cos(\mathrm{OX.MT}), \qquad \ldots. \end{aligned}$$

Soient maMA un rayon passant par m et M,

$$m\,dx + p\,dy + q\,dz = ds\,\cos(mt, ma);$$

par conséquent l'identité (9) exprime que

$$n\,ds\cos(mt,\,ma) - \mathrm{N}\,d\mathrm{S}\cos(\mathrm{MT},\,\mathrm{MA}) = d\psi(\alpha,\,\beta).$$

C'est le théorème de M. Thiesen [1] établi par M. Fatou dans le cas d'aplanétisme approché : les cosinus de l'angle que fait le rayon incident avec une courbe de la surface s est lié linéairement au cosinus de l'angle du rayon réfracté avec la courbe conjuguée. Nous voyons de plus que dans cette relation les surfaces s et S étant données ainsi que la correspondance de leurs différents points entre eux, les coefficients des cosinus sont connus et le terme constant est une fonction linéaire de $d\alpha$ et $d\beta$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,d\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\,d\beta,$$

ψ étant une fonction quelconque de α et β.

Bruns, en choisissant sur la surface les courbes $\psi(\alpha,\,\beta) = \text{const.}$ quand cette fonction ψ est imposée, par exemple dans un système optique donné, arrive à ce théorème qu'il n'énonce pas.

Pour que deux surfaces s et S données soient aplanétiques, il faut qu'on puisse déterminer sur chacune d'elles une famille de courbes optiquement conjuguées, c'est-à-dire images l'une de l'autre, telles que le cosinus de l'angle du rayon lumineux passant par un point avec l'une d'elles soit proportionnel au cosinus de l'angle du rayon réfracté avec la conjuguée ; le rapport de proportionnalité étant $\frac{\mathrm{N}}{n}\cdot\frac{d\mathrm{S}}{ds}$.

La condition est nécessaire ; en effet, appliquons le théorème de M. Thiesen aux courbes $\psi(\alpha,\,\beta) = \text{const.}$; $d\psi = 0$, et par suite

$$n\,ds\cos(mt,\,ma) - \mathrm{N}\,d\mathrm{S}\cos(\mathrm{MT},\,\mathrm{MA}) = 0.$$

Elle n'est évidemment pas suffisante.

Comme l'a très justement remarqué M. Fatou [2], les courbes ψ ne peuvent être quelconques, la transformation étant donnée ; il est facile d'en donner des exemples.

---

(1) Czapski, *Grundzüge der Theorie der optischen Instrumenten*, p. 127.
(2) *Bulletin astronomique*, t. XXX, mai 1913, p. 246.

III.

LES INVARIANTS INTÉGRAUX ET LES CONDITIONS NÉCESSAIRES D'APLANÉTISME DANS UN MILIEU A INDICE VARIABLE.

Le fait que la quantité

$$n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z})$$

est une différentielle totale a un caractère très général : dans un milieu à indice variable $n = \varphi(x, y, z)$, les courbes analogues aux rayons lumineux sont les extrémales d'une certaine intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} n\,ds,$$

et si x, y, z, m, p, q désignent les coordonnées du point A et de la tangente en A à l'extrémale, X, Y, Z, M, P, Q, celles de B et de la tangente en B, la variation de celle-ci est, comme on sait, égale à

$$\delta\mathrm{I} = n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z}).$$

La valeur de l'intégrale I est, comme on sait, une fonction de x, y, z, X, Y, Z.

Si en chemin l'extrémale s'est réfractée, $\delta\mathrm{I}$ n'en garde pas moins la valeur donnée par l'équation : la démonstration est celle qui nous a permis d'écrire la formule (7). Il en résulte immédiatement que, si l'objet et l'image sont plongés dans des milieux d'indice constant, ce qui a toujours lieu en pratique, quels que soient les milieux intermédiaires à indices variables ou non, l'aplanétisme point par point de deux multiplicités à trois ou à deux dimensions n'est possible que dans les conditions déjà trouvées. Nous ne nous sommes en effet, dans la seconde partie, servi que de la propriété de la quantité

$$n(m\,dx + p\,dy + q\,dz) - \mathrm{N}(\mathrm{M}\,d\mathrm{X} + \mathrm{P}\,d\mathrm{Y} + \mathrm{Q}\,d\mathrm{Z}),$$

de demeurer une différentielle totale.

L'identité qui existe entre la réfraction, passage d'un milieu à un milieu d'indice différent par une discontinuité, et les extrémales qui donnent le parcours de la lumière pour un passage semblable effectué sans discontinuité, invite à chercher si certaines propriétés de ces courbes ne se conservent pas par réfraction et ne s'étendent pas à des systèmes de rayons lumineux. Par exemple, les extrémales sont définies par des équations canoniques, lesquelles possèdent des invariants intégraux : on peut se proposer la recherche de ceux d'entre eux qui se conservent par réfraction. Nous bornerons notre étude à celui qu'a indiqué M. Hadamard [1] qui apparaît comme le plus simple et le plus important.

Considérons la fonction

$$H = \frac{1}{2}\frac{u^2+v^2+w^2}{n^2},$$

où u, v, w sont trois variables indépendantes, n une fonction donnée de x, y, z. Les équations

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial u}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial v}, & \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w}, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right.$$

où t représente le temps, sont dans l'espace à six dimensions les équations différentielles du mouvement d'un mobile (u, v, w, x, y, z). La position initiale M_0 de ce mobile définit complètement sa trajectoire ; les coordonnées x, y, z, u, v, w et toute fonction $f(x, y, z, u, v, w)$ de celles-ci son des fonctions du temps. En particulier, H est une constante ; en effet,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial H}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial H}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial H}{\partial w}\frac{dw}{dt} = 0.$$

Si donc on choisit les conditions initiales en sorte qu'au départ

$$u^2+v^2+w^2 = n^2,$$

cette égalité subsistera en tout point de la trajectoire. Celle-ci est alors une extrémale de l'intégrale

$$\int n\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt = 0.$$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898.

En effet, les équations de ces dernières sont :

$$(8')\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(n\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)-\dfrac{\partial n}{\partial x}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=0, \\ \dfrac{d}{dt}\left(n\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}\right)-\dfrac{\partial n}{\partial y}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Or, nous avons

$$x'=\frac{u}{n^2},\qquad y'=\frac{v}{n^2},\qquad z'=\frac{w}{n^2},$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=\frac{u^2+v^2+w^2}{n^4}=\frac{1}{n^2};$$

les équations (8′) deviennent donc

$$\frac{du}{dt}=+\frac{\partial n}{\partial x}\frac{1}{n}=-\frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z},$$

ce qui prouve la proposition énoncée.

Aux trajectoires dont les équations sont (8), sont attachés des invariants intégraux : soit M un multiplicateur de ces équations, c'est-à-dire une fonction de x, y, z, u, v, w satisfaisant à l'équation différentielle linéaire

$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial u}+\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial v}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial w}-\frac{\partial M}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial v}\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial z}=0,$$

l'intégrale

$$\int_{E_6} M(x, y, z, u, v, w)\,dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw$$

garde une valeur constante, qu'on l'étende aux points d'un espace E_6 à six dimensions, ou aux points qui s'en déduisent en portant sur les trajectoires qui leur correspondent les arcs parcourus pendant un certain temps. Nous considérerons l'invariant particulier $\int_{E_6} dx\,dy\,dz\,du\,dv\,dw$ obtenu en faisant $M=1$ et de celui-ci nous déduirons un autre attaché aux extrémales de l'intégrale déjà citée. Faisons le changement de variables

$$u = nm\alpha,$$
$$v = np\alpha,$$
$$w = nq\alpha,$$

p, q, α étant trois variables indépendantes, et m une quantité telle que

$$m^2 + p^2 + q^2 = 1.$$

Les équations (8) deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{m}{n}\alpha, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{p}{n}\alpha, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{q}{n}\alpha, \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = 0, & \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{\alpha}{n^2}\dfrac{\partial n}{\partial y} = \dfrac{p}{n}\dfrac{dn}{dt}, & \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\alpha}{n^2}\dfrac{\partial n}{\partial z} - \dfrac{q}{n}\dfrac{dn}{dt}, \end{cases}$$

où $\dfrac{dn}{dt}$ est écrit à la place de $\left(\dfrac{\partial n}{\partial x} m + \dfrac{\partial n}{\partial y} p + \dfrac{\partial n}{\partial z} q\right)\dfrac{\alpha}{n}$; et l'invariant intégral se transforme en

$$\int_{E_6} \frac{D(u, v, w)}{D(\alpha, \beta, q)}\, dx\, dy\, dz\, d\alpha\, dp\, dq.$$

Or

$$\frac{D(u, v, w)}{D(\alpha, p, q)} = n^3\alpha^2 \begin{vmatrix} m & p & q \\ \dfrac{\partial m}{\partial p} & 1 & 0 \\ \dfrac{\partial m}{\partial q} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \frac{n^3\alpha^2}{m}$$

en vertu des relations $m^2 + p^2 + q^2 = 1$,

$$m\frac{\partial m}{\partial p} + p = 0,$$
$$m\frac{\partial m}{\partial q} + q = 0.$$

L'intégrale

$$\int_{E_6} n^3\alpha^2\, dx\, dy\, dz\, d\alpha \frac{dp\, dq}{m}$$

garde dans les conditions dites précédemment une valeur constante: la quantité $\dfrac{dp\, dq}{m}$, qui apparaît ici pour la première fois, représente la portion élémentaire de surface découpée sur la sphère de rayon 1 par le point (m, p, q), nous la désignerons dans ce qui suit par $d\omega$

$$d\omega = \frac{dp\,dq}{m}.$$

Choisissons pour multiplicité E_6 un cylindre de base E_5 et de hauteur $a < \alpha < b$, a et b étant deux constantes,

$$\int_{E_6} n^3 \alpha^2\, dx\, dy\, dz\, d\omega = \int_{E_5} n^3\, dx\, dy\, dz\, d\omega \int_a^b \alpha^2\, d\alpha.$$

La quantité $\int \alpha^2 d\alpha$ est une constante et l'intégrale

$$\int_{E_5} n^3\, dx\, dy\, dz\, d\omega$$

est invariante pour un système d'extrémales de l'intégrale $\int n\, ds$.

On peut, par une méthode enseignée pour la première fois par M. Poincaré (¹), employée depuis avec grand profit par M. Hadamard (²), de celle-ci déduire une autre, étendue aux points d'une surface de l'espace à deux dimensions et aux faisceaux de rayons à deux paramètres issus de ces points, qui conserve sa valeur quand on remplace chaque point origine par le point obtenu en coupant la trajectoire correspondante par une surface de l'espace à deux dimensions.

Considérons, en effet, pour un moment la multiplicité E_5 formée des trajectoires issues des points d'une multiplicité quelconque à quatre paramètres E_4 ; par exemple, supposons x, y, z, p, q fonctions de quatre paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et du temps. L'invariant devient

$$(10)\quad \int_{E_5} \left| \frac{D(y, z, p, q)}{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \frac{dx}{dt} + \frac{D(z, p, q, x)}{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \frac{dy}{dt} + \ldots + \frac{D(x, y, z, p)}{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \frac{dq}{dt} \right| \times \frac{n^2}{m}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta\, dt,$$

où les notations employées sont les notations ordinaires des déter-

(¹) *Mémoire des trois corps* (*Acta mathematica*, t. XIII, p. 66).

(²) *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* (*Journal de Mathématiques*, 5ᵉ série, t. III, fasc. 4, 1897).

minants fonctionnels et $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{dq}{dt}$ doivent être remplacés par les fonctions de x, y, z, p, q données par les équations (9). Si nous représentons par I l'intégrale

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{E_4} \left| \frac{D(y, z, p, q)}{D(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} \frac{dx}{dt} + \ldots \right| \frac{n^3}{m} d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\delta \\
&= \int_{E_4} \left| \frac{dx}{dt} dy\, dz\, dp\, dq + \frac{dy}{dt} dz\, dp\, dq\, dx + \ldots \right| \frac{n^3}{m}.
\end{aligned}
$$

I est un invariant intégral qui conserve sa valeur quand on l'étend à une multiplicité *quelconque* E_4 coupant un faisceau de trajectoires.

En effet, soient S et S′ les deux multiplicités quelconques à quatre paramètres limitant le faisceau de trajectoires E_5 : on passe de la multiplicité E_5 à une multiplicité infiniment voisine, en remplaçant le petit volume$_5$ compris entre la surface$_4$ S et la surface$_4$ qui s'en déduit en portant sur les trajectoires qui en partent les arcs parcourus dans le temps dt, par le petit volume$_5$ limité par la surface$_4$ S′ et la surface infiniment voisine obtenue de la même façon. L'intégrale (10) étendue à ces deux volumes garde la même valeur; or, si I et I′ sont les expressions particulières de l'intégrale I correspondant aux multiplicités E_4, S ou S′, cette valeur unique est soit $I\,dt$, soit $I'\,dt$; il en résulte que

$$I = I'.$$

Donc I est un invariant intégral.

De celui-ci nous déduirons un autre invariant particulièrement intéressant, en choisissant comme multiplicité E_4 celles que forment les différents points d'une surface à deux dimensions et les rayons à deux paramètres qui en sont issus.

Les coordonnées d'un point de la surface S sont des fonctions des deux variables indépendantes u et v ; de chaque point (u, v) de la surface émane un faisceau de rayons définis par les variables indépendantes aussi p et q.

Lorsque u, v varient très peu, le point (u, v) décrit un élément $d\sigma$ de surface autour d'un point quelconque M ; de même p et q variant très peu, le rayon lumineux décrit un pinceau élémentaire d'angle au sommet $d\omega$, qu'on peut appeler « pinceau élémentaire au point M ». Si l'on considère une surface quelconque S', dont les coordonnées sont fonction de deux paramètres u', v' un rayon (u, v, p, q) coupe cette surface en un point (u', v') et l'angle que fait la tangente à ce rayon au point (u, v) a pour paramètre p', q' : à une portion de surface $d\sigma$ et au pinceau élémentaire $d\omega$ correspondront, sur S', une portion de surface $d\sigma'$ où aboutira un pinceau élémentaire d'angle au sommet $d\omega'$; cette portion de surface et ce pinceau seront appelés *correspondants* des mêmes éléments de S. L'intégrale

$$K = \int n^2 \left[m \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + p \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + q \frac{D(y, x)}{D(u, v)} \right] du\, dv\, d\omega$$

conserve la même valeur quand on l'étend aux points d'une surface S et aux rayons qui en émanent, ou aux éléments correspondants d'une surface quelconque S'.

Soient M un point quelconque de S ; MA un rayon lumineux m, p, q ; MN la normale de paramètres directeurs α, β, γ,

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \alpha\, d\sigma, \qquad \ldots.$$

Soit encore θ l'angle de MA avec MN, l'intégrale K peut s'écrire

$$K = \int n^2 \cos\theta\, d\omega\, d\sigma.$$

La quantité sous le signe intégral est invariante par un changement d'axes : elle l'est aussi pour une réfraction. Supposons en effet qu'en un point M de la surface S aboutissent des trajectoires dont les tangentes sont contenues dans l'angle solide $d\omega$: si l'indice saute par passage à travers la surface de la valeur n à la valeur N, les trajectoires se réfractent et les nouvelles tangentes sont contenues à l'intérieur d'un angle solide $d\Omega$. Pour évaluer le rapport de ces angles, nous prendrons comme axes trois axes rectangulaires dont l'un Mx est normal en M à la surface, les deux autres étant dans le plan tangent. Si m, p, q sont les paramètres d'une tangente à une trajectoire, M, P, Q les paramètres de la tangente à la trajectoire réfractée,

$$np - NP = 0,$$
$$nq - NQ = 0.$$

Partant

$$d\Omega = \frac{dP\, dQ}{M} = \frac{n^2}{N^2}\frac{dp\, dq}{M},$$

$$M\, d\Omega = \frac{n^2}{N^2} m\, d\omega,$$

et si θ et Θ sont les angles avec la normale de la trajectoire incidente et réfractée

$$\cos\Theta\, d\Omega = \frac{n^2}{N^2}\cos\theta\, d\omega;$$

donc enfin

$$n^2 \cos\theta\, d\omega = N^2 \cos\Theta\, d\Omega.$$

L'intégrale (K) conserve donc sa valeur quand, sans changer la surface S, on remplace les éléments relatifs aux trajectoires qui aboutissent en un point par ceux qui correspondent à la trajectoire réfractée sur la surface S.

En particulier, supposons que les trajectoires issues des différents points d'une surface S se réfractent aux points où elles rencontrent une surface donnée (Σ), c'est-à-dire que l'indice n subisse en chaque point de cette surface un passage brusque d'une valeur à une valeur différente, l'intégrale (K) n'en conservera pas moins une valeur constante, qu'on l'applique aux points de la surface S et aux rayons qui en émanent dans le premier milieu, ou aux éléments correspondants d'une surface du second. En effet, dans le premier milieu, (K) est invariant et garde la même valeur qu'on l'applique à S où à la surface réfringente (Σ) : par réfraction des trajectoires sur (Σ), (K) n'est pas altéré et demeure invariant dans le second milieu, ce qui démontre la propriété.

Ainsi donc, (K) est un invariant intégral d'une espèce particulière : il garde la même valeur, qu'on l'étende aux points d'une multiplicité à quatre paramètres formée des points d'une surface quelconque et aux faisceaux à deux paramètres qui en sont issus ou aux points qui s'en déduisent en portant sur la trajectoire des premiers des segments quelconques, ces trajectoires ayant subi en chemin un nombre quelconque de réfractions ou de réflexions. Nous dirons, pour simplifier le langage, que l'intégrale étendue à la portion d'une surface quelconque, interceptée par le faisceau, garde une valeur constante.

Avant de poursuivre l'étude à laquelle nous nous livrons, il convient de chercher si l'élément nouveau que nous avons introduit et qui est l'invariant intégral peut nous donner des résultats que ne sauraient nous donner par exemple les conditions de Malus. Il semblerait que, la notion d'invariant intégral étant liée à celle de trajectoire, son existence dépende essentiellement de ce fait qu'un rayon lumineux est une trajectoire présentant des points anguleux, mais dont les coordonnées x, y, z varient sans discontinuités. Or il n'en est rien ; nous allons montrer que l'intégrale (K) conserve sa valeur quand on l'étend à une surface d'où émane un faisceau de rayon ou à la portion d'une autre surface d'ailleurs quelconque interceptée par le faisceau qui se déduit du premier par la transformation de Malus. Il en résultera que l'introduction de cet invariant intégral ne saurait nous conduire qu'à des résultats déjà connus.

Considérons en effet l'intégrale

$$(\mathrm{F}) = \int n^3 \frac{dx\, dy\, dz\, dp\, dq}{m},$$

étendue aux points d'un certain volume et aux rayons (m, p, q) issus de ces points. Un de ces rayons AB, issu du point B (x, y, z), rencontre le plan yz en A (o, h, k) et l'on a

$$\begin{aligned} x &= ml, \\ y &= h + pl, \\ z &= k + ql; \end{aligned}$$

l désigne le segment AB.

Considérons un point (x, y, z, p, q) de l'espace à cinq dimensions dont les coordonnées sont définies en fonction du temps par les équations

$$\frac{dx}{dt} = mvn, \qquad \frac{dy}{dt} = pvn, \qquad \frac{dz}{dt} = qvn,$$
$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = o,$$

n désignant l'indice du milieu, v une constante. Le point de l'espace à trois dimensions (x, y, z) décrit le rayon lumineux m, n, p ; supposons qu'à un instant t quelconque, le mouvement soit remplacé par celui dont les équations seraient

$$\frac{dX}{dt} = M v N, \qquad \frac{dY}{dt} = P v N, \qquad \frac{dZ}{dt} = Q v N,$$
$$\frac{dP}{dt} = 0, \qquad \frac{dQ}{dt} = 0;$$

que de plus M, P, Q, X, Y, Z se déduisent de m, p, q, x, y, z par les formules

$$\begin{array}{llll} X = ML, & x = ml, & H = A(h, k, p, q), & L = \frac{n}{N} l. \\ Y = H + PL, & y = h + pl, & K = B(h, k, p, q), & \\ Z = K + QL, & z = k + ql, & P = C(h, k, p, q), & \\ & & Q = D(h, k, p, q), & \end{array}$$

A des conditions initiales x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 correspondra ainsi une trajectoire parfaitement déterminée formée de deux tronçons de droite et la position du mobile (x, y, z, p, q) sera à chaque instant fixée. Pour ce mouvement, (F) est un invariant intégral, en effet, dans le mouvement sur le rayon incident

$$(F)_0 = \int n^3 \, dh \, dk \, dp \, dq \, dl,$$

dans le mouvement sur le rayon transformé

$$\begin{aligned} (F)_1 &= \int N^3 \, dH \, dK \, dP \, dQ \, dL \\ &= \int n N^2 \frac{D(H, K, P, Q)}{D(h, k, p, q)} \, dh \, dk \, dp \, dq \, dl \\ &= \int n^3 \, dh \, dk \, dp \, dq \, dl. \end{aligned}$$

Nous avons vu en effet que

$$\frac{D(H, K, P, Q)}{D(h, k, p, q)} = \frac{n^2}{N^2}.$$

Une transformation analogue à la transformation déjà employée nous donnerait l'invariant

$$\int n^2 \left[m \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + p \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + q \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] \frac{dp \, dq}{m},$$

dans les mêmes conditions que précédemment, On voit même de plus que pour une transformation de droites en droites, telles que

$$\frac{D(H, K. P, Q)}{D(h, k, p, q)} = \frac{n^2}{N^2},$$

l'intégrale (K) étendue à deux surfaces quelconques, aux droites passant par les points de la première, aux transformées passant par les points de la seconde, conserve la même valeur.

Une pareille transformation est évidemment plus générale qu'une transformation de Malus et nous allons voir qu'elle ne peut aussi être stigmatique que dans le seul cas où la correspondance établie point par point est une similitude. Reprenons les notations employées pour une transformation télescopique

$$X = \frac{ax}{z}, \qquad Y = \frac{by}{z}, \qquad Z = \frac{c}{z},$$
$$H = \lambda a x_1, \qquad P = \lambda b y_1, \qquad Q = c\lambda.$$

Étendons l'intégrale (K) dans le premier milieu à une portion du plan des xy.

Le rayon m, p, q passant par le point (x, y, o), se transforme en un rayon $\lambda a x_1$, $\lambda b y_1$, λc, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 + c^2}}$ passant par le point $\frac{am}{q}, \frac{bp}{q}$, o. Nous étendrons donc l'intégrale (K) dans le second milieu au plan des xy également; on devra avoir

$$\int n^2 \frac{q}{m}\, dx_1\, dy_1\, dp\, dq = \int N^2 \frac{\lambda c}{\lambda a x_1} \frac{D\left(\frac{am}{q}, \frac{bp}{q}, \lambda b y_1, \lambda c\right)}{D(x_1, y_1, p, q)}\, dx_1\, dy_1\, dp\, dq,$$

autrement dit

$$n^2 = N^2 \frac{c}{a x_1} \frac{D\left(\frac{am}{q}, \frac{bp}{q}\right)}{D(p, q)} \frac{D(\lambda b y_1, \lambda c)}{D(x_1, y_1)}.$$

En particulier

$$\frac{D(\lambda b y_1, \lambda c)}{D(x_1, y_1)} \frac{1}{x_1}$$

serait constant, c'est-à-dire $\frac{\lambda}{x_1} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1}$ constant, ou enfin λ constant, ce qui ne saurait être si a et b ne sont pas nuls. La transformation télescopique est donc impossible encore dans ce cas plus général;

supposons alors la transformation affine

$$X = ax, \qquad Y = by, \qquad Z = cz,$$
$$M = \lambda am, \qquad P = \lambda bp, \qquad Q = \lambda cq, \qquad \lambda = \frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2p^2 + c^2q^2}}.$$

L'intégrale étendue à une surface quelconque, puis à sa transformée, gardant la même valeur

$$\int n^2 \left[m\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + p\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + q\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] \frac{dp\, dq}{m}$$
$$= \int N^2 \lambda abc \left[m\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \ldots \right] \frac{D(\lambda bp, \lambda cq)}{D(p, q)} \frac{dp\, dq}{\lambda am}.$$

Il faut donc qu'on ait identiquement

$$n^2 = N^2 bc \frac{D(\lambda pb, \lambda cq)}{D(p, q)}.$$

Calculons

$$\frac{D(\lambda pb, \lambda cq)}{D(p, q)} = \left(\lambda^2 + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}p + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}q\right) bc.$$

Or

$$\lambda^2 = \frac{1}{a^2m^2 + b^2p^2 + c^2q^2}, \qquad \lambda\, d\lambda = -\frac{a^2m\, dm + b^2p\, dp + c^2q\, dq}{(a^2m^2 + b^2p^2 + c^2q^2)^2},$$

et en vertu de l'égalité $mdm + pdp + qdq = 0$,

$$\lambda\, d\lambda = +\lambda^4(a^2 - b^2)p\, dp + \lambda^4(a^2 - c^2)q\, dq,$$

$$\lambda^2 + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial p}p + \lambda\frac{\partial\lambda}{\partial q}q = \lambda^4[a^2m^2 + b^2p^2 + c^2q^2 + (a^2 - b^2)p^2 + (a^2 - c^2)q^2]$$
$$= \lambda^4a^2.$$

$$\frac{D(\lambda pb, \lambda cq)}{D(p, q)} = \frac{a^2bc}{[a^2 + (b^2 - a^2)p^2 + (c^2 - a^2)q^2]^2}.$$

On doit donc avoir identiquement

$$\frac{a^2b^2c^2}{[a^2 + (b^2 - a^2)p^2 + (c^2 - a^2)q^2]^2} = \frac{n^2}{N^2}.$$

Donc

$$a = b = c = \frac{n}{N}.$$

Il serait illusoire de chercher par unprocédé analogue les transformations de Malus pour lesquelles deux surfaces se correspondent stigmatiquement. Il existe en effet des transformations ne jouissant pas de la propriété fondamentale de conserver les congruences de normales et pour lesquelles l'intégrale (K) est un invariant.

Prenons par exemple la transformation suivante déjà employée par M. Fatou, transformant un plan en un autre plan :

$$Y = \alpha y, \qquad Z = \beta z,$$
$$P = \frac{n}{N}\frac{p}{\alpha} + \varphi(y, z), \qquad Q = \frac{n}{N}\frac{q}{\beta} + \psi(y, z).$$

Elle ne conserve pas les congruences de normales, car si les droites du premier milieu forment une congruence

$$p\,dy + q\,dz = d\theta(x, y).$$

Or, dans le second,

$$P\,dY + Q\,dZ = \frac{n}{N}(p\,dy + q\,dz) + \alpha\,\varphi(y, z)\,dy + \beta\,\psi(y, z)\,dz;$$

$P\,dY + Q\,dZ$ ne sera une différentielle exacte, autrement dit les rayons transformés ne formeront une congruence de normales que si

$$\alpha\,\varphi(y, z)\,dy + \beta\,\psi(y, z)\,dz$$

est une différentielle exacte. On peut toujours s'arranger pour qu'il n'en soit pas ainsi. Cependant

$$\int N^2 M \frac{D(Y, Z)}{D(y, z)}\,dy\,dz\,\frac{dP\,dQ}{M} = \int n^2\,dy\,dz\,\frac{dp\,dq}{m}.$$

En effet,

$$\frac{D(P, Q, y, z)}{D(p, q, y, z)} = \frac{D(P, Q)}{D(p, q)} = \frac{n^2}{N^2}\frac{1}{\alpha\beta}$$

et

$$\frac{D(Y, Z)}{D(y, z)} = \alpha\beta,$$

ce qui démontre la proposition.

IV.

LE THÉORÈME DE STRAUBEL.

L'invariant intégral considéré, à cause même du très grand nombre de transformations qui le conservent, ne peut nous donner la solution de tous les problèmes d'optique géométrique, mais son emploi, qui est commode, conduit parfois à des conditions nécessaires de possibilité du problème. En tout cas, son introduction n'aura pas été inutile, car c'est l'expression mathématique d'un théorème d'optique géométrique énoncé par Straubel, dont Hilbert et plus récemment M. Langevin ont montré la très grande importance.

Avec les notations des paragraphes précédents, il exprime que pour les éléments correspondants de deux surfaces

$$n \cos\theta \, ds \, d\omega = n'^2 \cos\theta' \, ds' \, d\omega'$$

et pour un faisceau plan

$$n' \cos\theta \, ds \, d\omega = n' \cos\theta' \, ds' \, d\omega'.$$

L'interprétation physique de ces égalités est extrêmement simple : soit dQ la quantité de lumière émise normalement par une portion de surface $d\sigma$, dans l'angle solide $d\omega$: nous appellerons « intensité spécifique L en un point pour un rayon donné », la limite de $\dfrac{dQ}{d\omega \, d\sigma}$ quand le faisceau se réduit au rayon considéré. L est une fonction de x, y, z, p, q ; mais comme le flux

$$dQ = L \, d\omega \, d\sigma$$

se conserve, pour un faisceau élémentaire, on aura

$$L \, d\omega \, d\sigma = L' \, d\omega' \, d\sigma',$$

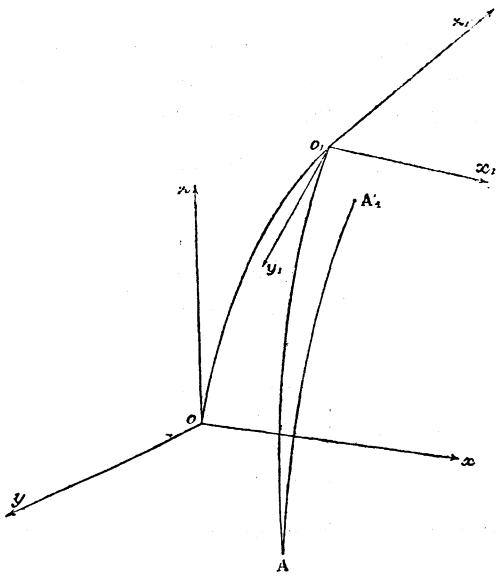
en désignant par L, L′ l'intensité spécifique en deux points d'un même rayon :

$$\frac{L}{n^2} = \frac{L'}{n'^2}.$$

Les intensités spécifiques sont proportionnelles aux carrés des rayons.

Straubel remarque d'ailleurs qu'au point de vue de l'énergie ce résultat peut être considéré comme évident : Helmholtz et Clausius, sans énoncer le résultat, le connaissaient certainement avant lui ; il lui revient d'en avoir indiqué une démonstration, reprise par M. Langevin dans son cours (1913) et à laquelle il est aisé de donner une forme rigoureuse et mathématique.

Plaçons-nous immédiatement dans l'espace à trois dimensions : supposons le milieu isotrope à indice variable n : par deux points A, A_1 passe en général une trajectoire ; en tout cas il existe pour l'intégrale $\int_A^{A_1} n\,ds$ un minimum absolu, qui est une fonction $T(A, A_1)$ des deux points A et A_1 et représente le temps mis



par la lumière pour aller de A en A_1. Soient OO_1 un rayon, Oz la tangente en O ; O_1z_1 la tangente en O_1 à ce rayon ; Ox, Oy deux axes perpendiculaires à Oz et perpendiculaires entre eux ; de même O_1x_1, O_1y_1 perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à O_1z_1. Choisissons des points A, A_1 situés dans les plans des xy et des x_1y_1 des deux systèmes de coordonnées ainsi déterminés : la fonction $T(A, A_1)$ devient une fonction $T(x, y, x_1, y_1)$ des coordonnées x, y, x_1, y_1 des points A, A_1.

On sait que la variation de l'intégrale $\int_A^{A_1} n\,ds$ s'exprime simplement en fonction des paramètres directeurs $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, des tangentes en A et A_1 à la trajectoire et des déplacements élémentaires de A et A_1

$$\delta \int_{A}^{A_1} n\,ds = n(\alpha\,dx + \beta\,dy) - n_1(\alpha_1\,dx_1 + \beta_1\,dy_1).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial T}{\partial x} = n\alpha, \qquad \frac{\partial T}{\partial y} = n\beta, \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = -n_1\alpha_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial y_1} = -n_1\beta_1.$$

Or si A_1 est en O_1 et si A décrit dans le plan des xy une portion de surface entourant le point O, l'angle solide $d\omega_1$ balayé par la tangente en O_1 a pour valeur

$$d\omega_1 = \frac{d\alpha_1\,d\beta_1}{\gamma_1},$$

c'est-à-dire

$$d\omega_1 = \frac{1}{n_1^2}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y_1\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial y_1\,\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy;$$

donc

$$n_1^2\,d\omega_1\,dx_1\,dy_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial x_1\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 T}{\partial y_1\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 T}{\partial y_1\,\partial y} \end{vmatrix} dx\,dy\,dx_1\,dy_1.$$

Il en résulte, le deuxième membre étant symétrique en x, y, x_1, y_1,

$$n_1^2\,d\omega_1\,d\sigma_1 = n^2\,d\omega\,d\sigma.$$

Cette démonstration simple a l'avantage de montrer clairement comment l'existence de l'invariant intégral de M. Hadamard résulte de la propriété, pour la quantité

$$n(\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz) - n_1(\alpha_1\,dx_1 + \beta_1\,dy_1 + \gamma_1\,dz_1),$$

d'être une différentielle totale exacte.

Dans le cas d'un faisceau plan, qui demeure plan par suite de réfraction, on trouve par un procédé analogue

$$n\,d\sigma\,d\theta = n'\,d\sigma'\,d\theta',$$

$d\sigma$ désignant cette fois un élément d'arc.

Ces deux formules s'appliquent quels que soient les milieux intermédiaires, et même s'il s'agit de rayons lumineux, si la transformation qu'ils subissent est une transformation de Malus ou l'une de celles plus générales dont nous avons parlé.

Dans un autre ordre d'idées, la proposition de Straubel est encore vraie pour des rayons généralisés, c'est-à-dire pour les bicaractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles.

Soit, par exemple, l'équation

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+a'\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+a''\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+2b\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t}+2b'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}+2b''\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}+c=0$$

où a, a', a'', b, b', b'', c sont des fonctions quelconques de x, y, t, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, V : on sait qu'on appelle *caractéristique*, correspondant à la solution donnée $V=\varphi(x, y, t)$ de l'équation aux dérivées partielles, une solution de l'équation du premier ordre

$$H=ap^2+a'q^2+a''-2bq-2b'p-2b''pq=0$$

où p et q représentent $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$ et dans les coefficients desquels on a remplacé V et ses dérivées partielles par leurs valeurs en fonction de x, y, t : les bicaractéristiques sont les caractéristiques de cette équation du premier ordre définies par les équations

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial H}{\partial x}+p\frac{\partial H}{\partial t}}=\frac{-dq}{\frac{\partial H}{\partial y}+q\frac{\partial H}{\partial t}}=\frac{dt}{p\frac{\partial H}{\partial p}+q\frac{\partial H}{\partial q}}.$$

Nous nous attacherons au seul cas où, H étant une fonction de x, y, p, q, indépendante de t, ces équations deviennent

$$\frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial p}}=\frac{dy}{\frac{\partial H}{\partial q}}=\frac{-dp}{\frac{\partial H}{\partial x}}=\frac{-dq}{\frac{\partial H}{\partial y}}=d\tau.$$

Ce sont, quand on considère τ comme le temps, les équations d'un mouvement dont les trajectoires sont les bicaractéristiques, si l'on a choisi les conditions initiales, en sorte que

$$H(x_0, y_0, p_0, q_0)=0.$$

S'il n'en est pas ainsi, x_0, y_0, p_0, q_0 étant des valeurs initiales quelconques, au mouvement défini par les équations précédentes est attaché l'invariant intégral

$$\int dx\, dy\, dp\, dq,$$

dont on déduira, comme précédemment, un invariant

$$\int \left| \frac{\partial x}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} - \frac{\partial y}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} \right| dp\, dq\, d\alpha$$

étendu aux différents points d'une ligne (x, y fonctions de α) d'ailleurs quelconque et aux trajectoires à deux paramètres qui en sont issues. Prenons, par exemple, pour variable l'arc s de la courbe; soient v la vitesse $\left(\frac{dx}{d\tau}, \frac{dy}{d\tau}\right)$ en un point d'une trajectoire situé sur la ligne donnée, φ et ψ les angles que font avec l'axe des x, en ce point, la normale à la ligne et la tangente à la trajectoire

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = \sin\varphi, \qquad \frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\cos\varphi;$$

$$\frac{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}}{\cos\psi} = \frac{\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q}}{\sin\psi} = v.$$

Ces deux dernières équations définissent p et q en fonction de v et ψ à condition que

$$\frac{\mathrm{D}(v, \psi)}{\mathrm{D}(p, q)} \neq 0.$$

Supposons qu'il en soit ainsi, et choisissons les variables arbitraires s, v, ψ; l'invariant deviendra

$$\int v \,|\sin\psi \sin\varphi + \cos\varphi \cos\psi|\, \left| \frac{\mathrm{D}(p, q)}{\mathrm{D}(v, \psi)} \right| ds\, dv\, d\psi.$$

Des deux identités

$$\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} = v \cos\psi, \qquad \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q} = v \sin\psi$$

on tire $\frac{\partial v}{\partial p}$, $\frac{\partial v}{\partial q}$, $\frac{\partial \psi}{\partial p}$, $\frac{\partial \psi}{\partial q}$ et, par suite, $\frac{\mathrm{D}(v, \psi)}{\mathrm{D}(p, q)}$.

En effet

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p^2} = \frac{\partial v}{\partial p}\cos\psi - v\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} = \frac{\partial v}{\partial q}\cos\psi - v\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial q} = \frac{\partial v}{\partial p}\sin\psi + v\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial p},$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial q^2} = \frac{\partial v}{\partial q}\sin\psi + v\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial q},$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2} \end{vmatrix} = \frac{D(v,\psi)}{D(p,q)}\begin{vmatrix} \cos\psi & -v\sin\psi \\ \sin\psi & v\cos\psi \end{vmatrix},$$

$$\frac{D(v,\psi)}{D(p,q)} = \frac{1}{v}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 H}{\partial p^2} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} \\ \dfrac{\partial^2 H}{\partial p\,\partial q} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial q^2} \end{vmatrix}.$$

Si donc le déterminant $\begin{vmatrix} a & b'' \\ b'' & a' \end{vmatrix}$ n'est pas identiquement nul, un faisceau de bicaractéristiques admet l'invariant

$$\int \frac{v^2\,|\cos(\varphi-\psi)|}{|b''^2 - aa'|}\,ds\,dv\,d\psi,$$

ou, en désignant par θ l'angle de la trajectoire avec la normale,

$$\int \frac{v^2\,dv}{|b''^2 - aa'|}\,ds\,d\psi\cos\theta.$$

Il n'est pas possible de déduire de cet invariant, un autre attaché celui-ci aux bicaractéristiques, par des méthodes analogues à celles qui ont réussi pour les rayons lumineux, sans faire de nouvelles hypothèses : supposons par exemple

$$b'' = 0, \qquad a = a',$$

$$v^2 = \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial q}\right)^2$$

et

$$H = a(p^2 + q^2) - 2bq - 2b'p + a'',$$

par suite

$$v^2 = 4(aH + b'^2 + b^2 - aa'').$$

Si donc nous faisons le changement de variables

$$v^2 = 4(au + b'^2 + b^2 - aa''),$$

u gardera sa valeur initiale tout le long de la trajectoire et à $u = 0$ correspondront des bicaractéristiques; l'invariant avec ces notations deviendra

$$\int v^2 \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\cos\theta}{a^2} d\psi\, ds\, du.$$

Étendons l'intégrale au volume d'un cylindre $(0 < u < \alpha)$: à tout point d'un cylindre initial (E_0) correspond une trajectoire et au bout d'un temps quelconque un point situé à l'intérieur d'un cylindre (E) : l'intégrale

$$\int \frac{\cos\theta}{a^2} v^2 \frac{\partial v}{\partial u} d\psi\, ds\, du,$$

ou mieux

$$\frac{1}{\alpha}\int \frac{\cos\theta}{a^2} v^2 \frac{\partial v}{\partial u} du\, d\psi\, ds = \frac{1}{\alpha}\int \frac{\cos\theta}{a^2} d\psi\, ds \int_0^\alpha v^2 \frac{\partial v}{\partial u} du,$$

garde la même valeur qu'on l'étende à E ou à E_0.

Faisons tendre α vers 0, cette dernière tend vers une limite

$$\int \frac{\cos\theta}{a}(b'^2 + b^2 - aa'')^{\frac{1}{2}} d\psi\, ds,$$

et cette nouvelle intégrale garde la même valeur quand on l'étend aux points de la base B_0 de (E_0) ou de la base B de E. Or les trajectoires correspondantes sont des bicaractéristiques, la quantité

$$\int \frac{\cos\theta}{a}(b'^2 + b^2 - aa'')^{\frac{1}{2}} d\psi\, ds$$

est donc bien pour ces courbes un invariant analogue à celui qui a été trouvé dans les précédents Chapitres. Elle garde la même valeur quand on l'étend aux points d'une courbe et aux bicaractéristiques qui en émanent ou à une autre courbe quelconque et aux bicaractéristiques qui y aboutissent.

Si donc on appelle *indice* et si l'on désigne par n la quantité

$$n = \frac{(b'^2 + b^2 - aa'')^{\frac{1}{2}}}{a},$$

on a là une généralisation du théorème de Straubel. Les bicaractéristiques des équations

$$a\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)+2b\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial t}+2b'\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial t}+2a''\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+c=0$$

sont des rayons, et ils satisfont à la relation de Straubel, à savoir

$$n\,ds\,d\psi\cos\theta=n'\,ds'\,d\psi'\cos\theta'.$$

Il est évident qu'un calcul analogue généraliserait la même proposition aux caractéristiques à plusieurs dimensions; nous n'insisterons pas sur ce fait et sur les conséquences qu'on en peut tirer au point de vue, par exemple, de l'aplanétisme possible points par points de volumes ou de surfaces. Nous nous contenterons de remarquer que c'est bien là une simple généralisation, à savoir que dans le cas des rayons lumineux, bicaractéristiques de l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}-n^2\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=0,$$

l'indice généralisé est identique à l'indice ordinaire.