BULLETIN DE LA S. M. F.

E. VESSIOT

Sur les invariants intégraux de la propagation par ondes

Bulletin de la S. M. F., tome 42 (1914), p. 142-167
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1914__42__142_1>

SUR LES INVARIANTS INTÉGRAUX DE LA PROPAGATION PAR ONDES;

Par M. E. Vessiot.

Dans un travail récent, paru dans ce Bulletin (1), M. Dontot a rappelé l'attention sur un invariant intégral de l'optique géométrique indiqué par M. Hadamard (2) il y a quelques années, et étudié les rapports de cet invariant avec les transformations de droites en droites dites de Malus, c'est-à-dire qui satisfont à la condition de changer les congruences de normales en congruences de normales.

J'indique, dans les pages qui suivent, comment ces questions peuvent se traiter, bien facilement, quand on envisage d'une manière tout à fait générale, au lieu de la propagation rectiligne de l'optique classique, la propagation par ondes dans un milieu quelconque. On obtient même ainsi les démonstrations les plus immédiate de l'existence des invariants pour le cas des rayons rectilignes; en même temps que l'on se rend compte de la véritable raison du succès des méthodes précédemment employées pour la recherche des transformations de Malus.

L'image mathématique de la propagation par ondes dans un milieu donné, de nature invariable, est, comme je l'ai montré (3),

---

(1) Tome XLII, 1914, fasc. 1, p. 53.

(2) *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898.

(3) *Bull. Soc. math. France*, t. XXXIV, 1906; *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909.

un groupe à un paramètre de transformations de contact. La fonction caractéristique $H(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3)$ de la transformation infinitésimale homogène de ce groupe caractérise le milieu. Si on l'égale à l'unité, on obtient la condition de contact du plan $\sum_{i=1}^{3} p_i(X_i - x_i) = 1$ avec la surface d'onde qui a le point (x_1, x_2, x_3) pour origine.

Les éléments de contact sur lequel opère le groupe (G) considéré sont définis par les coordonnées rectangulaires x_1, x_2, x_3 d'un point A et les coefficients de direction p_1, p_2, p_3 d'un plan passant par ce point. En assujettissant ces derniers à la condition $H = 1$, on définit un vecteur normal à l'élément de contact (E) considéré, et que j'appelle le *vecteur-indice*, parce que sa longueur N est l'inverse $\frac{1}{V}$ de la vitesse V de déplacement normal, en A, du front de toute onde dont (E) est un élément de contact.

Toute transformation de contact homogène laisse invariante, par définition, l'expression de Pfaff $\omega = \sum_{i=1}^{3} p_i\, dx_i$. On en déduit immédiatement, par le procédé de calcul et de différentiation symbolique dont M. Cartan a tiré tant de beaux résultats, la série des expressions différentielles symboliques introduites par lui dans la théorie des expressions de Pfaff [1] : et ce sont, par suite, avec l'expression ω elle-même, les éléments différentiels d'une suite d'invariants intégraux dont la forme est commune à toutes les transformations de contact. Il n'y a plus qu'à les interpréter pour obtenir en particulier des invariants intégraux de tout mode de propagation par ondes.

Cette interprétation se fait sans peine au moyen du vecteur-indice : les premiers invariants J_1 et J_2, d'ordres 1 et 2, sont simplement le travail et le flux de ce vecteur-indice.

Chaque élément de contact (E) définit un rayon (R), curviligne en général, suivant lequel se déplace le point de cet élément, dans

---

(1) *Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 239. — Ce même mode de déduction est employé, par M. De Donder, dans un article de ce Tome du *Bulletin de la Société mathématique*, mais sous une forme beaucoup plus compliquée. *Voir* p. 91.

la propagation de toute onde ayant (E) pour l'un de ses éléments; de sorte qu'inversement à chaque point A d'un rayon (R) est associé le vecteur-indice (N) de l'élément (E) qui se déplacerait ainsi suivant le rayon (R). Nous disons que (E) et (R) sont *pseudo-orthogonaux*. Les rayons (R) pseudo-orthogonaux aux éléments d'une onde sont dits les *pseudo-normales* de cette onde.

Les invariants J_1 et J_2 sont ainsi relatifs à des courbes situées sur les surfaces lieux de rayons, et à des surfaces traversées par des congruences de rayons. Mais on constate que J_1 est un invariant relatif pour les transformations infinitésimales $\varphi(Hf)$, où le facteur φ est arbitraire. Ces transformations faisant glisser les éléments (E) le long des rayons (R) suivant une loi arbitraire, il en résulte que J_1 est un invariant pour un tube de rayons, et J_2 un invariant pour une congruence de rayons. La condition pour qu'une congruence de rayons soit une congruence de pseudo-normales s'exprime par l'évanouissement de ces invariants (¹).

L'invariant J_3 (en tant qu'invariant relatif) et l'invariant J_4 possèdent la même propriété d'invariance pour les transformations $\varphi(Hf)$ et sont ainsi attachés aux familles fermées de ∞^3 rayons et aux systèmes de ∞^4 rayons. On déduit de là une interprétation de J_4, qui généralise celle qu'a donnée M. Hadamard pour les rayons rectilignes de l'optique des milieux homogènes et isotropes.

L'étude des transformations des rayons résulte très simplement de la réduction de tout groupe (G), par une transformation de contact, à la forme canonique d'un groupe de translations. Les transformations de Malus sont divisées en deux classes, suivant qu'elles sont compatibles ou non avec la conservation des propriétés élastiques du milieu considéré.

Les unes et les autres peuvent être réalisées en soumettant les familles d'ondes à des transformations de contact : celles qui laissent invariante la fonction caractéristique H et celles qui laissent invariant le système différentiel qui définit les trajectoires de la propagation.

Comme toute transformation de contact peut être obtenue au

(¹) Ce résultat avait été indiqué par M. Cartan, pour les rayons rectilignes et les congruences de normales (*Bull. Soc. math. France*, t. XXV, 1896, p. 140).

moyen d'une transformation de contact infinitésimale, et que celle-ci correspond à une propagation d'ondes dans un milieu convenablement choisi, il semble légitime d'en conclure que toutes ces transformations de Malus pourraient être obtenues en faisant traverser aux rayons, produits dans le milieu donné, une couche d'un milieu auxiliaire convenable, à la sortie de laquelle ils rentreraient dans le milieu donné ou dans un second milieu à surfaces d'ondes homothétiques à celles du premier (suivant qu'il s'agit des transformations de la première ou de la seconde classe). Mais la démonstration rigoureuse de ce résultat nécessiterait de nouvelles recherches.

J'ai indiqué en terminant comment la méthode de M. Bruns (¹), pour trouver les transformations de Malus, résulte immédiatement de la réduction du groupe des dilatations à un groupe de translations.

I. — Invariants intégraux.

1. Rappelons d'abord les principes de la propagation par ondes dans un plan donné (²).

Tout point A du milieu est susceptible d'émettre, à chaque instant t_0, une onde qui, à chaque instant ultérieur t_0+t, est, au point de vue géométrique, une certaine surface S. L'homothétique de cette surface S, prise par rapport à A, dans le rapport d'homothétie $\frac{1}{t}$, tend vers une surface limite Σ, lorsque t tend vers zéro. Cette surface limite Σ ne dépend que du point A, si l'état élastique du milieu est stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps : ce que nous supposerons. On l'appelle la *surface d'onde* ayant A pour origine.

Le mode de propagation est entièrement caractérisé par la famille des ∞^3 surfaces d'onde ayant pour origines les divers points de l'espace. On les définit analytiquement de la manière suivante :

Soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées rectangulaires d'un point A;

(¹) *Das Eikonal* (*Abh. der k. sächsischen Ges. der Wiss.*, 1895).

(²) E. Vessiot, *Bull. Soc. math. France*, t. XXXIV, 1906, p. 230-269; *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909, p. 405-448.

écrivons l'équation générale d'un plan sou la forme

$$(1) \qquad p_1(X_1 - x_1) + p_2(X_2 - x_2) + p_3(X_3 - x_3) = 1.$$

La surface d'onde, d'origine A, sera représentée par l'équation qui exprime que le plan (1) lui est tangent et l'on supposera cette équation tangentielle mise sous la forme

$$(2) \qquad H(x_1, x_2, x_3;\, p_1, p_2, p_3) = 1,$$

H étant une fonction homogène du premier degré en p_1, p_2, p_3.

Le mode de propagation correspondant a alors pour expression géométrique le groupe (G) de transformations de contact homogènes, à un paramètre, engendré par la transformation de contact homogène infinitésimale (1) ayant pour fonction caractéristique H, c'est-à-dire dont le symbole est le crochet de Poisson-Jacobi

$$(3) \qquad (Hf) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right).$$

Voici ce qu'il faut entendre par là : la transformation générale du groupe (Hf) est donnée par les formules

$$(4) \qquad x_i = f_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0;\, p_1^0, p_2^0, p_3^0 \mid t - t_0) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(5) \qquad p_i = g_i(x_1^0, x_2^0, x_3^0;\, p_1^0, p_2^0, p_3^0 \mid t - t_0) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qu'on obtient en intégrant le système canonique

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

$$(7) \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

avec les conditions initiales

$$(8) \qquad x_i = x_i^0, \qquad p_i = p_i^0 \qquad (i = 1, 2, 3), \qquad \text{pour } t = t_0.$$

Le paramètre du groupe est

$$(9) \qquad \theta = t - t_0.$$

(1) S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 262-264.

Les fonctions f_i et les quotients des fonctions g_i sont homogènes de degré zéro en p_1, p_2, p_3 : on peut considérer le groupe comme opérant sur les variables x_1, x_2, x_3 et les rapports des variables p_1, p_2, p_3, qui définissent un élément de contact composé du point de coordonnées x_1, x_2, x_3 et du plan, passant par ce point, normal à la direction dont les coefficients de direction sont p_1, p_2, p_3.

Cela posé, l'onde qui provient, au bout du temps θ, d'une onde origine quelconque, donnée au temps t_0, se déduit précisément de cette onde origine en appliquant à ses éléments de contact la transformation (4), (5). Le principe des ondes enveloppes ou principe de Huygens équivaut à ce fait que cette transformation est une transformation de contact : c'est-à-dire que la propagation des ondes se fait par éléments de contact.

Les équations (4) définissent ∞^4 courbes, qui sont les *rayons* de la propagation. Dans le déplacement d'un élément de contact, défini par les équations (4), (5) de la propagation, le point de cet élément décrit un rayon, et le plan de cet élément prend en chaque point du rayon l'orientation déterminée par les formules (6).

Ces formules, qu'on peut écrire

$$(10)\qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial H}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial H}{\partial p_2}} = \frac{dx_3}{\frac{\partial H}{\partial p_3}},$$

se résolvent en p_1, p_2, p_3, et donnent

$$(11)\qquad p_i = \frac{\partial \Omega}{\partial\, dx_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en introduisant l'équation ponctuelle de la surface d'onde d'origine (x_1, x_2, x_3) sous la forme

$$(12)\qquad \Omega(x_1, x_2, x_3;\, X_1 - x_1, X_2 - x_2, X_3 - x_3) = 1,$$

où $\Omega(x_1, x_2, x_3;\, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ est homogène du premier degré en ξ_1, ξ_2, ξ_3, et en posant, pour abréger l'écriture,

$$(13)\qquad \Omega = \Omega(x_1, x_2, x_3;\, dx_1, dx_2, dx_3).$$

On peut considérer ces formules comme établissant, en chaque point (x_1, x_2, x_3), une correspondance entre les directions (dx_1, dx_2, dx_3) des éléments linéaires de ce point et les orientations (p_1, p_2, p_3) des éléments de contact de ce plan, qui se réduit à l'orthogonalité dans le cas d'un milieu isotrope et homogène. Nous l'appellerons la *pseudo-orthogonalité;* et nous dirons, par suite, que les rayons qui servent au transport des éléments de contact d'une surface sont les *pseudo-normales* de cette surface. Ils sont, du reste, les *pseudo-normales* de ∞^1 surfaces, qui sont les états successifs d'une onde dont la surface considérée serait la position initiale : c'est la généralisation du *théorème de Malus*.

L'ensemble d'une telle famille de ∞^1 surfaces, ou *famille d'ondes*, est représentée par une équation

$$f(x_1, x_2, x_3) = t, \tag{14}$$

où f est une solution de l'équation (2) considérée comme une équation aux dérivées partielles, c'est-à-dire dans laquelle on a posé

$$p_i = \frac{\partial t}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{15}$$

Réciproquement, toute solution de cette équation aux dérivées partielles fournit l'équation (14) d'une famille d'ondes.

2. Pour chaque élément de contact, défini par x_1, x_2, x_3 et les rapports de p_1, p_2, p_3, nous adopterons pour p_1, p_2, p_3 les valeurs déterminées qui satisfont à l'équation (2). Cela est possible, parce que H est un invariant du groupe (G), et que, par conséquent, l'équation (2) reste invariante par ce groupe. Soit A le point (x_1, x_2, x_3) : à chaque élément de contact de ce point correspond ainsi un vecteur N, perpendiculaire à cet élément, ayant pour origine A et pour composantes les valeurs p_1, p_2, p_3 qui satisfont à l'équation (2).

Pour interpréter ce vecteur N, imaginons une onde quelconque contenant l'élément de contact en question (E), à l'instant t : les valeurs p_1, p_2, p_3 sont alors données par les formules (15), l'onde faisant partie de la famille d'ondes représentée par l'équation (14), et le vecteur N a pour mesure, sur la normale à l'élément de contact (E), la dérivée normale $\frac{dt}{dn}$, c'est-à-dire l'inverse $N = \frac{1}{V}$ de la vitesse $V = \frac{dn}{dt}$ de déplacement normal du front de toute onde contenant (E), évaluée au point A. On peut appeler ce vecteur N l'*indice du milieu*, *relatif à l'élément de contact* E.

Si l'on introduit la surface d'onde ayant A pour origine, le plan tangent (P) parallèle à l'élément de contact (E) a précisément pour équation l'équation (1) avec les valeurs adoptées pour p_1, p_2, p_3. Si l'on désigne par M le point de contact de ce plan (P) et par K le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur (P), le vecteur AK est le vecteur V, vitesse du front de l'onde, et le vecteur AM est le vecteur vitesse v dans le mouvement du point A sur le rayon qui est pseudo-normal à l'élément (E) : ce qui donne, en particulier, la définition géométrique de la pseudo-orthogonalité (¹).

Il convient d'observer que la fonction H a, en général, une homogénéité *positive* seulement; ce qui tient à ce que, pour chaque élément de contact (E), on doit tenir compte du sens de propagation de l'onde à laquelle on le considère comme appartenant : les vecteurs V et N seront dirigés dans ce sens de propagation. On peut dire que l'on considère chaque élément de contact comme dédoublé en deux, ayant chacun une face déterminée, qui correspond au côté de l'espace vers lequel cet élément commencera à se déplacer.

3. L'introduction du *vecteur-indice* N permet d'interpréter, au point de vue de la propagation par ondes, les invariants intégraux communs à toutes les transformations de contact homogènes, c'est-à-dire à toutes les transformations infinitésimales de la forme (3).

Le plus simple de ces invariants résulte de ce que ces transformations de contact homogènes sont entièrement définies (²) par la propriété de laisser invariante l'expression de Pfaff

$$\omega = \sum_{i=1}^{3} p_i \, dx_i; \tag{16}$$

(¹) Cela résulte du fait que les équations paramétriques de la surface d'onde sont : $X_i - x_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ $(i = 1, 2, 3)$. Voir *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909, p. 423 et 436.

(²) S. LIE et F. ENGEL, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 262.

ce qui donne l'invariant intégral caractéristique de la propagation par ondes : c'est le *travail du vecteur-indice*

$$(17) \qquad J_1 = \int \omega = \int N \cos(N, ds)\, ds,$$

qui s'applique à tout continu à une dimension composé d'éléments de contact $(x_1, x_2, x_3; p_1 : p_2 : p_3)$.

Ce continu (K) est un arc de courbe CD, portant, en chacun de ses points A, un élément de contact (E) de ce point. A chacun de ces éléments de contact correspond un rayon : si ces rayons sont tous confondus, l'arc CD est pseudo-orthogonal à tous les éléments (E) considérés et l'on a, d'après les équations (6) et (2),

$$(18) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{3} p_i\, dx_i = \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dt = H\, dt = dt.$$

En supposant, pour plus de netteté, que ω reste positif quand on se déplace de C en D, J_1 est donc, dans ce cas, le temps que met une onde quelconque, pseudo-orthogonale à CD en C, à se propager jusqu'en D : dans son évolution, cette onde balaie alors le rayon CD en lui restant constamment pseudo-orthogonale.

Le cas général donne, comme on va voir, une interprétation analogue. Les rayons pseudo-normaux aux éléments (E) du continuum (K) engendrent une surface (s); en chaque point M de cette surface (s) son plan tangent contient un élément linéaire appartenant à l'élément de contact pseudo-orthogonal au rayon qui passe en M; nous dirons que cet élément linéaire est pseudo-orthogonal au rayon. En *unissant* ces éléments linéaires, on obtient une famille de courbes de (s), pseudo-orthogonales aux rayons qui engendrent (s), et, par conséquent, des *bandes* d'éléments de contact ayant les rayons considérés pour pseudo-normales. Ces bandes appartiennent, par suite, à une infinité de familles d'ondes : on peut, pour définir l'une de ces familles, se donner une onde initiale quelconque, pourvu qu'elle contienne, par exemple, celle des bandes d'éléments de contact en question qui contient l'élément (E) porté par le point C. Nous avons ainsi une famille (14) bien déterminée.

En chacun des points de l'arc CD, les valeurs (15) des dérivées de la fonction f coïncident avec les valeurs données, en ce point, pour les coordonnées du vecteur N; car ces dérivées doivent satisfaire, comme les p_i donnés, aux conditions de pseudo-orthogonalité des rayons considérés et à l'équation de condition (2). On a donc ici

$$(19) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial t}{\partial x_i} dx_i = dt.$$

En supposant encore que ω reste positif quand on se déplace de C en D, on voit dès lors que J_1 est le temps que met une onde à balayer la courbe CD de C en D, cette onde étant telle qu'en chaque point A de CD elle soit tangente à l'élément de contact (E) donné.

Nous avons montré, dans un travail précédent, que cette durée de transmission d'un ébranlement de C en D est maxima quand on assujettit l'onde à demeurer constamment pseudo-orthogonale à la courbe CD [1] : cette courbe est alors, pour la surface (s), une sorte d'arête de rebroussement, car elle est l'enveloppe des rayons qui engendrent cette surface.

Dans tous les cas, cette durée de transmission ne dépend que de la famille d'ondes et des points C et D, et non de la courbe CD particulière choisie.

4. Cette dernière remarque met en évidence une propriété essentielle de l'invariant J_1 et, par suite, de ceux que nous en déduirons plus loin. Il suffit, pour y être conduit, de faire abstraction des éléments de contact et de ne faire intervenir que les rayons. On peut, à cet effet, considérer chaque vecteur-indice N comme attaché, non à l'élément de contact (E) auquel il se rapporte, par sa définition première, mais à l'élément linéaire de rayon (dx_1, dx_2, dx_3) pseudo-orthogonal à cet élément de contact (E) : en d'autres termes, ce seront les formules (11) qui définiront, analytiquement, les composantes de ce vecteur-indice.

---

(1) *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XXVI, 1909, p. 440-443. — Ce maximum est ce que nous avons appelé la ***durée de propagation le long de*** CD. Il suppose la concavité des surfaces d'onde. Son expression analytique est l'intégrale curviligne $J = \int \Omega$, prise le long de CD. C'est la généralisation du *chemin optique*.

Par suite, à chaque rayon (R) est attaché, en chacun de ses points, un vecteur-indice N, défini par la direction de ce rayon en ce point.

On peut dès lors, dans ce qui précède, partir de ∞^1 rayons (R) engendrant une surface (s), et considérer un arc de courbe CD tracé sur cette surface. Cet arc suffit à définir l'intégrale J_1, si l'on convient qu'on prendra pour vecteur-indice N, en chaque point de (s), celui qui correspond au rayon (R), générateur de la surface (s), passant en ce point. Si l'on désigne par ξ_1, ξ_2, ξ_3 les coefficients de direction de ce rayon, et par Ω_ξ la fonction $\Omega(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$, J_1 sera l'intégrale curviligne, prise suivant une courbe tracée sur (s),

$$J_1 = \int \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Omega_\xi}{\partial \xi_i} dx_i. \tag{19}$$

Cela posé, la propriété annoncée est que cette intégrale J_1 ne dépend, dans ces conditions, que des extrémités de l'arc d'intégration, à condition que la variation de cet arc CD se fasse d'une manière continue et dans une région de (s) telle qu'on puisse lui appliquer la construction géométrique du paragraphe précédent. Elle résulte immédiatement de ce fait que la famille d'ondes qui résulte de cette construction ne dépend que de la surface (s), et non de la courbe CD considérée sur cette surface.

5. Nous obtiendrons directement, par le calcul, un résultat plus général, en calculant la variation de J_1 dans l'hypothèse où l'on fait varier les éléments de contact (x, p) suivant les trajectoires de la propagation, mais en laissant arbitraire la manière dont ils décrivent ces trajectoires. Les variables x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 subissent alors des variations de la forme

$$\delta x_i = \varphi \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta u \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{20}$$

$$\delta p_i = -\varphi \frac{\partial H}{\partial x_i} \delta u \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{21}$$

φ est un facteur arbitraire : on supposera, par exemple, que c'est une fonction arbitraire de x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, si l'on veut considérer cette variation comme une transformation infinitésimale.

Comme il résulte de ces formules que δH est nul, les vecteurs-indices N seront échangés entre eux, car la condition (2) restera invariante.

On a ensuite

$$(22)\qquad \begin{aligned}\delta\omega &= \delta\Sigma p_i\, dx_i = d\Sigma p_i\, \delta x_i + \Sigma\, \delta p_i\, dx_i - \Sigma\, \delta x_i\, dp_i \\ &= d(\varphi H)\, \delta u - \varphi\, dH\, \delta u = H\, \delta u\, d\varphi.\end{aligned}$$

Si donc on tient compte de la condition (2), on obtient

$$(23)\qquad \delta\omega = d\varphi\, \delta u,$$

c'est-à-dire la formule cherchée

$$(24)\qquad \delta J_1 = [\varphi]_C^D\, \delta u.$$

Si l'on suppose, en particulier, que C et D restent fixes, on est dans les conditions du paragraphe précédent, et l'on retrouve bien ce résultat que J_1 reste alors constant (¹).

6. D'autre part, δJ_1 est encore nul, si les points C et D sont confondus, c'est-à-dire si δJ_1 est pris suivant un contour fermé.

En d'autres termes, J_1 *est un invariant relatif pour les transformations infinitésimales* $\varphi(H, f)$ *où* φ *est arbitraire, à condition qu'il soit pris suivant une ligne (fermée) tracée sur une multiplicité* $H = \text{const}$.

C'est donc un invariant, au point de vue de la propagation, pour le cylindre fermé, formé de rayons, constitué alors par la surface (s) que fournit le continuum fermé considéré (nº 3).

Pour l'interpréter, nous imaginons un tube (s) de rayons et, sur ce tube, les trajectoires pseudo-orthogonales des rayons; et

---

(¹) Si l'on suppose qu'un arc (CD) donné soit tout entier dans une région telle que par deux points de cette région passe un rayon et un seul, on pourra construire une surface (s) dont un rayon sera le rayon [CD] joignant C et D, et dont les autres rayons joindront deux à deux les points de l'arc (CD). Le résultat précédent prouve alors que l'intégrale (19) prise suivant le rayon [CD], c'est-à-dire l'intégrale $J = \int_{[CD]} \Omega$ est égale à l'intégrale J_1 prise le long de l'arc (CD), sur cette surface (s). Or celle-ci est moindre que l'intégrale $J = \int_{(CD)} \Omega$, comme nous l'avons rappelé à la fin du nº 3. On démontre donc ainsi, d'une manière bien simple, la propriété de minimum des rayons relativement à l'intégrale $J = \int \Omega$. Cf. *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3ᵉ série, t. XXVI, 1909, p. 447-448.

nous remarquons que l'intégrale J_1, prise sur (s), suivant un arc d'une telle trajectoire est toujours nulle, puisque $\cos(N, ds)$ est alors nul tout le long de l'arc. Une trajectoire pseudo-orthogonale, partie d'un point A d'un des rayons (R) constituant le tube, revient couper ce même rayon, en un point A′, après avoir fait le tour du tube; et l'on peut alors revenir de A′ en A en suivant le rayon (R) : l'intégrale J_1, prise suivant le chemin fermé ainsi constitué, se réduit à la durée de propagation de A′ en A, le long du rayon (R); elle a la même valeur quel que soit le point A considéré sur le tube et pour tous les rayons (R) du tube, et elle est égale à l'intégrale J_1 prise sur le tube le long de toute courbe fermée faisant le tour du tube une seule fois ([1]).

Elle est nulle si la trajectoire pseudo-orthogonale considérée se ferme, et toutes ces trajectoires se ferment alors en même temps. C'est le cas où le tube de rayons est formé de tous les rayons pseudo-orthogonaux à une même onde, aux divers points d'un contour fermé simple pris sur cette onde.

Cet invariant jouera le rôle de *période*, si l'on se propose de trouver la valeur générale de l'intégrale J_1 pour tous les arcs tracés sur (s) entre deux points donnés. Et l'on aurait une généralisation facile en prenant pour (s) des cylindres fermés, formés de rayons, d'une nature plus compliquée que les tubes simples précédents.

7. De la forme linéaire différentielle (16) on déduit une suite de formations invariantes donnant des invariants intégraux multiples, d'ordres croissants, par le calcul symbolique employé par M. Cartan dans son étude du problème de Pfaff ([2]). Ce sont, avec

---

([1]) M. Cartan a développé ces considérations pour les tubes réglés et les trajectoires orthogonales des génératrices, ainsi que celles qui en résultent pour les congruences de normales, dans un article sur les *intégrales de l'espace réglé* (*Bull. Soc. math. France*, t. XXIV, 1896, p. 160-165).

([2]) E. CARTAN, *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XVI, 1899, p. 244-253. *Voir* l'Introduction de cet article (p. 241-242). *Comparez* aussi l'article déjà cité de E. CARTAN, *Bull. Soc. math. France*, t. XXV, 1896, p. 140-177). Une exposition systématique du calcul des expressions différentielles multilinéaires est donnée, avec des notations moins condensées, par M. De Donder, dans une publication récente (*Bull. Acad. royale Belgique : Cl. Sciences*, n° 12, 1913, p. 1043-1073). — *Voir* aussi dans ce Tome XLII du *Bulletin de la Société mathématique*, p. 91, les démonstrations données, par M. De Donder, relativement à l'invariant de M. Hadamard.

les notations mêmes de M. Cartan,

$$(25) \quad \omega' = \sum_{i=1}^{3} dp_i\, dx_i,$$

$$(26) \quad \omega'' = \omega\omega' = (p_3\, dp_2 - p_2\, dp_3)\, dx_2\, dx_3 + (p_1\, dp_3 - p_3\, dp_1)\, dx_3\, dx_1 + (p_2\, dp_1 - p_1\, dp_2)\, dx_1\, dx_2,$$

$$(27) \quad \omega''' = \frac{1}{2}\omega'^2 = dp_3\, dp_2\, dx_2\, dx_3 + dp_1\, dp_3\, dx_3\, dx_1 + dp_2\, dp_1\, dx_1\, dx_2,$$

$$(28) \quad \omega^{\text{IV}} = \omega\omega''' = (p_1\, dp_3\, dp_2 + p_2\, dp_1\, dp_3 + p_3\, dp_1\, dp_2)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

$$(29) \quad \omega^{\text{V}} = \frac{1}{6}\omega'^3 = -\, dp_1\, dp_2\, dp_3\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

La dernière est nulle identiquement, puisque nous assujettissons les variables x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3 à vérifier la relation (2). Les formes ω' et ω''' sont les plus intéressantes, parce qu'elles sont invariantes par les transformations $\varphi(\text{H}, f)$, et, par suite, correspondent à des propriétés géométriques des systèmes de ∞^2 et ∞^4 rayons. Cette invariance tient, pour ω', covariant bilinéaire de ω, à ce que l'intégrale

$$(30) \qquad \text{J}_2 = \iint \omega'$$

est égale, en vertu de la formule de Stokes, à l'intégrale J_1 prise suivant un contour fermé (n° 6). Celle de $\omega''' = \frac{1}{2}\omega'^2$ en résulte.

L'interprétation de J_2 est en effet immédiate : il faut associer à chaque point A d'une portion de surface (σ) un élément de contact (E), suivant une loi quelconque. On peut alors considérer les ∞^2 rayons (R) qui sont pseudo-orthogonaux aux éléments de contact (E) considérés; et les ∞^3 vecteurs-indices associés à ces rayons en leurs divers points; J_2 est le flux du tourbillon du champ de vecteurs ainsi défini à travers la surface (σ), et sa valeur est la même que celle de J_1 prise, suivant le contour de (σ), sur le tube de rayons qui sert de frontière au continu formé des ∞^2 rayons (R) considérés.

Inversement, on peut se donner une congruence (C) de rayons, en détacher un pinceau quelconque, limité par un tube de rayons de cette congruence, et couper ce pinceau par une surface quelconque qui donnera l'aire (σ) considérée ci-dessus.

Pour que l'intégrale J_2 soit nulle, quel que soit le pinceau détaché dans (C), c'est-à-dire pour que J_1 soit nulle suivant un contour fermé entourant un tube quelconque de rayons appartenant à la congruence (C), il faut et il suffit que les composantes p_1, p_2, p_3 des vecteurs-indices (N) composant le champ associé à la congruence (C) soient des fonctions de x_1, x_2, x_3 telles que $\omega = \sum_{i=1}^{3} p_i\, dx_i$ soit la différentielle totale exacte $\omega = dt$ d'une fonction $t = f(x_1, x_2, x_3)$.

Cela équivaut à dire qu'il y a une famille d'ondes (14) dont les pseudo-normales se confondent avec les rayons de la congruence (C), comme satisfaisant au même système différentiel (10).

En d'autres termes, la condition que J_2 soit nul pour tout pinceau (ou que J_1 soit nul pour tout tube) de la congruence est nécessaire et suffisante pour que cette congruence soit une congruence de pseudo-normales ([1]).

8. Pour interpréter l'invariant intégral

$$J_4 = -\iiiint \omega''', \tag{31}$$

il faut introduire un continuum (γ) de ∞^4 éléments de contact, et, par suite, une portion limitée, à quatre dimensions, du système des ∞^4 rayons de l'espace. Le continuum (γ) pouvant, d'après ce qui précède, être choisi arbitrairement, pourvu qu'il contienne un élément de contact pseudo-orthogonal à chacun des ∞^4 rayons (R) formant le pinceau à quatre dimensions considéré, on pourra supposer qu'il est formé en coupant ce pinceau par une surface auxiliaire quelconque ([2]) sur laquelle il déterminera une aire (σ) : par chaque point A de cette aire passeront ∞^2 rayons (R) du pinceau, à chacun desquels correspondront l'élément de contact (E) pseudo-orthogonal et le vecteur-indice N relatif à cet élément (n° 2).

([1]) Pour les rayons rectilignes et les congruences de normales, les faits analogues ont été signalés par E. Cartan (*Bull. Soc. math. France*, t. XXIV, 1896, p. 162).

([2]) Nous appliquons ici, au cas général, le mode d'interprétation imaginé par M. Hadamard pour les rayons rectilignes (J. Hadamard, *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898). — *Cf.* l'article de M. Dontot, *Bull. Soc. math. France*, t. XLII, 1914, p. 72-78).

Alors les coordonnées x_1, x_2, x_3 sont des fonctions de deux variables u_1, u_2 qui varient dans un champ (U), et p_1, p_2, p_3 sont des fonctions de quatre variables u_1, u_2, v_1, v_2, les variables v_1, v_2 variant, pour chaque système de valeurs u_1, u_2, dans un champ $V(u)$ correspondant. Et l'on a

$$(32)\qquad -\omega''' = \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} du_1\, du_2 \frac{\partial(p_2, p_3)}{\partial(v_1, v_2)} dv_1\, dv_2 + \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u_1, u_2)} du_1\, du_2 \frac{\partial(p_3, p_1)}{\partial(v_1, v_2)} dv_1\, dv_2 + \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} du_1\, du_2 \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(v_1, v_2)} dv_1\, dv_2,$$

c'est-à-dire que l'élément différentiel de J_4 est le produit géométrique scalaire des deux vecteurs qui figurent respectivement les aires élémentaires de la surface (σ) au point A, et de la surface figuratrice [1] balayée par l'extrémité du vecteur N, lorsque A reste fixe.

Or la normale à cette surface figuratrice, dont l'équation est l'équation (2), où l'on considère p_1, p_2, p_3 comme des coordonnées ponctuelles, a pour coefficients de direction $\frac{\partial H}{\partial p_1}, \frac{\partial H}{\partial p_2}, \frac{\partial H}{\partial p_3}$: sa direction est donc celle du rayon (R) auquel est attaché le vecteur-indice N (n° 4). Si donc on désigne par $d\sigma$ la mesure de l'aire élémentaire de la surface σ, et par $d\nu$ celle de l'aire élémentaire de la surface figuratrice, par n la direction de la normale à la surface (σ) et par R celle du rayon, on peut écrire

$$(33)\qquad -\omega''' = \cos(R, n)\, d\sigma\, d\nu.$$

Mais on peut aussi remplacer $d\nu$ par sa valeur [2]

$$(34)\qquad d\nu = N^2 \frac{d\alpha}{\cos(R, N)},$$

[1] Nous employons le mot utilisé par M. Hadamard dans ses *Leçons sur le calcul des variations*, t. I, p. 92.

[2] Cette formule, considérée souvent comme évidente, s'établit facilement par le calcul symbolique. En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ les cosinus directeurs de N, on a

$$p_i = N\alpha_i$$

et

$$\cos(R, N)\, d\nu = \alpha_1\, dp_2\, dp_3 + \ldots = \alpha_1\, dN\alpha_2\, dN\alpha_3 + \ldots$$
$$= \alpha_1[N\, dN(\alpha_2\, d\alpha_3 - \alpha_3\, d\alpha_2) + N^2\, d\alpha_2\, d\alpha_3] + \ldots = N^2(\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3 + \ldots) = N^2\, d\alpha.$$

en introduisant l'angle solide $d\alpha$ balayé par l'extrémité du vecteur directeur de N ; et l'on arrive pour J_4 à la formule définitive

$$(35) \qquad J_4 = \int\!\!\int\!\!\int\!\!\int N^2 \frac{\cos(R, n)}{\cos(R, N)} d\sigma\, d\alpha,$$

qui généralise la formule donnée par M. Hadamard [1] pour le cas de la propagation rectiligne en milieu isotrope

$$[N = \text{const.}; \cos(R, N) = 1].$$

9. Comme ω''' provient de $\frac{1}{2}\omega''$ par différentiation symbolique, l'intégrale J_4 est égale à la moitié de l'intégrale

$$(36) \qquad J_3 = -\int\!\!\int\!\!\int \omega'',$$

prise suivant la multiplicité fermée à trois dimensions qui sert de frontière au continuum (γ) considéré au paragraphe précédent; cette intégrale J_3 possède, dans ces conditions, le même caractère d'invariance que J_4. Elle correspond donc aux continuums fermés de ∞^3 rayons.

En chaque point de l'aire σ, on aura à considérer des vecteurs-indices N dont l'extrémité décrira sur la surface figuratrice une courbe fermée (c).

Désignons par $d\varepsilon$ l'angle d'un de ces vecteurs avec le vecteur infiniment voisin, et considérons le vecteur dont les composantes

$$(37) \qquad p_2\, dp_3 - p_3\, dp_2, \quad p_3\, dp_1 - p_1\, dp_3, \quad p_1\, dp_2 - p_2\, dp_1$$

figurent dans ω''.

On peut y considérer la caractéristique d comme celle du déplacement sur la courbe (c), parce que x_1, x_2, x_3 dépendent de deux variables u_1, u_2 seulement, alors que p_1, p_2, p_3 dépendent de u_1, u_2 et d'une autre variable v correspondant au déplacement sur (c). La longueur de ce vecteur est $N^2 d\varepsilon$, de sorte qu'on a l'interprétation

$$(38) \qquad -\omega'' = N^2 \cos(n', n)\, d\sigma\, d\varepsilon,$$

---

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898.

n' désignant la direction normale à la fois au vecteur-indice N et au vecteur-indice infiniment voisin.

10. Quant à l'intégrale

$$J_5 = -\iiiint \omega^{\text{IV}}, \tag{39}$$

on ne peut la considérer que prise suivant une multiplicité ouverte; sans quoi elle serait nulle, étant égale à $-\int^{\text{V}} \omega^{\text{V}}$ dès qu'elle est prise suivant une multiplicité fermée.

Elle n'a donc que l'invariance par la propagation considérée; et n'est plus un invariant attaché à des systèmes de rayons. Son élément ω^{IV} est, à un facteur numérique près, le produit

$$N^3\, d\varpi\, d\alpha, \tag{40}$$

où figure l'angle solide balayé par le vecteur-indice, et l'élément de volume $d\varpi$ de l'espace; car le facteur de $dx_1\, dx_2\, dx_3$ dans ω^{IV} est le triple du volume élémentaire balayé par le vecteur-indice.

C'est le résultat trouvé, par une voie toute différente, par M. Hadamard, dans le cas des milieux isotropes homogènes [1].

II. — Transformations des rayons.

11. Les expressions différentielles ω, ω', ω'', ω''', ω^{IV}, ω^{V} sont invariantes par *toute* transformation de contact homogène; de sorte que les invariants intégraux, précédemment étudiés, *relatifs au mode de propagation défini par une fonction*

$$H(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3)$$

particulière, se conservent aussi par toutes les transformations de contact homogènes qui laissent inaltérée l'équation (2) : comme cette équation n'est pas homogène en p_1, p_2, p_3, ces transformations sont celles qui laissent invariante la fonction H elle-même [2].

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 14 mars 1898. — *Cf.* Dontot, *Bull. Soc. math. France*, t. XLII, 1914, p. 72-75.

[2] Une transformation de contact qui change H en une autre fonction $\overline{H}$ doit être considérée comme changeant le milieu donné M en un autre milieu $\overline{M}$. Elle

Elles forment un groupe (Γ), dans lequel est invariant le groupe (G) de la propagation : ses transformations infinitésimales ont pour fonctions caractéristiques les intégrales, homogènes du premier degré en p_1, p_2, p_3, de l'équation

$$(\mathrm{H}f) = 0. \tag{41}$$

Pour étudier ce groupe, nous le ramènerons à une forme canonique, en réduisant H elle-même, par une transformation de contact homogène, à la forme canonique p_3.

Nous écrirons l'une de ces transformations canonisantes :

$$(42) \qquad \begin{cases} y_i = \mathrm{G}_i(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3) & (i = 1, 2, 3), \\ q_i = \mathrm{H}_i(x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3) & (i = 1, 2), \\ q_3 = \mathrm{H}\ (x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3), \end{cases}$$

en désignant par y_1, y_2, y_3 ; q_1, q_2, q_3 les variables transformées. Le groupe de la propagation devient, par elle, le groupe (g) des translations

$$(43) \qquad y_1 = y_1^0, \qquad y_2 = y_2^0, \qquad y_3 = y_3^0 + \theta; \qquad q_i = q_i^0 \qquad (i = 1, 2, 3);$$

ce qui équivaut à ce fait que le groupe (G) lui-même, en tenant compte de la condition (2), a ses ∞^4 trajectoires définies par les équations

$$(44) \qquad \mathrm{G}_1 = y_1^0, \qquad \mathrm{G}_2 = y_2^0, \qquad \mathrm{H}_1 = z_1^0, \qquad \mathrm{H}_2 = z_2^0, \qquad \mathrm{H} = 1,$$

si l'on considère dans ces équations $y_1^0, y_2^0, z_1^0, z_2^0$ comme des constantes arbitraires. En éliminant p_1, p_2, p_3 entre ces équations, on aurait les équations des ∞^4 rayons, qui sont aussi caractérisés par les quatre constantes arbitraires $y_1^0, y_2^0, z_1^0, z_2^0$.

La même transformation canonisante (42) ramène (Γ) au groupe (γ) formé des transformations de contact homogènes (en y_1, y_2, y_3 ; q_1, q_2, q_3) qui laissent q_3 invariant. Les équations

---

conserve les invariants intégraux en question, si l'on tient compte, dans les expressions de ces invariants, de la modification du milieu. Nous supposons, au contraire, dans le texte, qu'on doit toujours appliquer ces invariants au milieu donné M.

finies de l'une quelconque des transformations de contact

$$(45)\quad \left\{ y'_i = Y_i(y_1, y_2, y_3; q_1, q_2, q_3), \qquad q'_i = Q_i(y_1, y_2, y_3; q_1, q_2, q_3) \atop (i = 1, 2, 3) \right.$$

de ce groupe (γ) contiennent donc l'équation $q'_3 = q_3$. Des relations de S. Lie [1],

$$(46)\quad (Y_i Y_k) = (Q_i Y_k) = (Q_i Q_k) = 0, \qquad (Q_i Y_i) = 1 \qquad (i \neq k),$$

on conclut donc, à cause de $Q_3 \equiv q_3$, que Y_1, Y_2, Q_1, Q_2 ne dépendent pas de y_3, et que Y_3 est de la forme

$$(47)\qquad Y_3 = y_3 + \Phi(y_1, y_2; q_1, q_2, q_3).$$

Si l'on tient compte des degrés d'homogénéité, et si l'on pose

$$(48)\qquad \frac{q_1}{q_3} = z_1, \qquad \frac{q_2}{q_3} = z_2; \qquad \frac{q'_1}{q'_3} = z'_1, \qquad \frac{q'_2}{q'_3} = z'_2,$$

la transformation (45) s'écrira

$$(49)\qquad \begin{cases} y'_i = A_i(y_1, y_2; z_1, z_2) & (i = 1, 2), \\ z'_i = B_i(y_1, y_2; z_1, z_2) & (i = 1, 2); \end{cases}$$

avec

$$(50)\qquad y'_3 = y_3 - \psi(y_1, y_2; z_1, z_2); \qquad q'_3 = q_3.$$

Et l'identité $\sum_1^3 q_i dy_i = \sum_1^3 q'_i dy'_i$ se réduira à

$$(51)\qquad B_1\, dA_1 + B_2\, dA_2 = z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2 + d\psi.$$

On a donc le groupe (γ) en partant du groupe des transformations (49) qui laisse invariante, *à une différentielle totale additive près,* l'expression de Pfaff $z_1\, dy_1 + z_2 dy_2$; et en faisant l'*extension* de chacune de ces transformations définie par les formules (50) et (48), où la fonction ψ s'obtient, à une constante additive près, au moyen de la quadrature

$$(52)\qquad d\psi = z'_1\, dy'_1 + z'_2\, dy'_2 - z_1\, dy_1 - z_2\, dy_2.$$

Le groupe (γ_0) des transformations (49) considérées a été intro-

---

[1] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 137.

duit par S. Lie [1]. On peut aussi, comme l'a remarqué M. Cartan, le définir par l'invariance de l'expression bilinéaire

$$dy_1\, dz_1 + dy_2\, dz_2 \text{ (}^2\text{)}.$$

C'est un groupe simple et ses transformations infinitésimales sont de la forme $(\mathrm{K}f)$, K étant une fonction quelconque de y_1, y_2; z_1, z_2 [3].

12. A chaque transformation de contact du groupe (Γ) correspond donc une transformation (49) du groupe (γ_0). La signification de celle-ci résulte de la forme (44) des équations des trajectoires. En effet, en tenant compte des degrés d'homogénéité et posant

$$(53) \qquad \frac{p_1}{p_3} = l_1, \qquad \frac{p_2}{p_3} = l_2,$$

on peut poser

$$(54) \quad \mathrm{G}_i = \mathfrak{Y}_i(x_1, x_2, x_3; l_1, l_2), \quad \mathrm{H}_i = \mathrm{H}\,\mathfrak{Z}_i(x_1, x_2, x_3; l_1, l_2) \quad (i = 1, 2),$$

et les équations des trajectoires deviendront

$$(55) \qquad \mathfrak{Y}_i = y_i^0, \qquad \mathfrak{Z}_i = z_i^0 \qquad (i = 1, 2),$$

y_1^0, y_2^0; z_1^0, z_2^0 étant les coordonnées de l'une quelconque de ces ∞^4 trajectoires, ou de celui des ∞^4 rayons qui lui sert de support.

Une transformation quelconque de (Γ) est définie par l'élimination des y et des q entre les équations (42), les équations analogues écrites avec les lettres accentuées, et les équations (48), (49), (50). Elle entraîne donc les équations

$$(56) \quad \mathfrak{Y}_i(x' \mid l') = \mathrm{A}_i(\mathfrak{Y} \mid \mathfrak{Z}), \qquad \mathfrak{Z}_i(x' \mid l') = \mathrm{B}_i(\mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}) \qquad (i = 1, 2);$$

c'est-à-dire qu'elle change chaque trajectoire (55) en la trajectoire dont les coordonnées $\overline{y}_1^0, \overline{y}_2^0$; $\overline{z}_1^0, \overline{z}_2^0$ sont données par les équations

$$(57) \qquad \overline{y}_i^0 = \mathrm{A}_i(y^0 \mid z^0), \qquad \overline{z}_i^0 = \mathrm{B}_i(y^0 \mid z_0) \qquad (i = 1, 2),$$

qui sont les équations de la transformation (49).

---

[1] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 128, 129, 232, 259, 260.

[2] E. Cartan, *C. R. Acad. Sc.*, 21 mai 1907.

[3] S. Lie, *Leipziger Berichte*, 1895, p. 292.

Donc la transformation (49) donne la loi d'échange des ∞^4 trajectoires par les ∞^1 transformations du groupe (Γ) qui lui correspondent au moyen de la quadrature (52), et par l'intermédiaire de la transformation canonisante (42).

13. Les transformations du groupe (Γ), laissant invariante l'équation aux dérivées partielles (2) des familles d'ondes, changent toute famille d'ondes en une autre famille d'ondes. Elles échangent donc les ∞^2 trajectoires qui servent à la propagation d'une famille d'ondes, en ∞^2 trajectoires associées de même à une même famille d'ondes.

On peut dire, d'autre part, qu'elles échangent les rayons de la propagation, si l'on convient d'opérer sur un rayon en opérant sur les éléments de contact auxquels il est pseudo-orthogonal (n° **1**).

Donc les transformations du groupe (Γ) changent ∞^2 rayons qui sont les pseudo-normales d'une famille d'ondes en ∞^4 rayons jouissant de la même propriété. Et, par suite, les transformations (49) qui donnent, au sens indiqué, la loi d'échange des ∞^4 rayons par les transformations homologues de (Γ), changent toute congruence de pseudo-normales en une congruence de pseudo-normales : on peut dire que ce sont des *transformations de Malus*.

14. Réciproquement, imaginons une transformation quelconque (49) opérant sur les coordonnées des ∞^4 rayons, et cherchons à exprimer qu'elle change toute congruence de pseudo-normales en une congruence de pseudo-normales.

Il faut examiner pour cela comment doivent être choisies, en fonction de deux paramètres u_1, u_2, les coordonnées y_1^0, y_2^0 ; z_1^0, z_2^0 des trajectoires (55) pour que celles-ci soient les trajectoires de propagation d'une famille d'ondes ; car dès que la congruence de rayons est donnée, les trajectoires auxquelles ces rayons servent de support s'en déduisent par l'adjonction à chaque point de chaque rayon de l'élément de contact pseudo-normal au rayon en ce point.

Des équations (55) on passe aussitôt aux équations (44); et en leur adjoignant l'équation auxiliaire

$$(58) \qquad G_3 = u,$$

où u sera un troisième paramètre, on aura défini en fonction de u, u_1, u_2 les coordonnées x_1, x_2, x_3; p_1, p_2, p_3 des éléments de contact correspondant à la congruence de rayons considérée. Et nous savons que la condition qui exprime qu'ils appartiennent aux ∞^1 ondes d'une même famille est que l'expression

$$(16) \qquad \omega = \sum_{i=1}^{3} p_i \, dx_i$$

soit, en u, u_1, u_2, une différentielle totale exacte (*cf.* n° 7). Car, s'il en est ainsi, l'intégrale $t = f(x_1, x_2, x_3)$ de cette différentielle est une intégrale de l'équation aux dérivées partielles (2) des famille d'ondes, à cause de la dernière des équations (44), et, inversement, si les éléments de contact considérés sont ceux d'une famille d'ondes, $t = f(x_1, x_2, x_3)$, les p_i sont proportionnels aux dérivées $\frac{\partial t}{\partial x_i}$, et leur sont, par suite, respectivement égaux à cause de la même relation $H = 1$.

Or la transformation (42) est une transformation de contact homogène, et l'on a l'identité

$$(59) \qquad H_1 \, dG_1 + H_2 \, dG_2 + H_3 \, dG_3 = \sum_{i=1}^{3} p_i \, dx_i,$$

d'où l'on conclut, pour les fonctions de u, u_1, u_2 considérées, l'identité

$$(60) \qquad \sum_{i=1}^{3} p_i \, dx_i = du + z_1^0 \, dy_1^0 + z_2^0 \, dy_2^0,$$

en tenant compte des équations (44) et (58).

La condition cherchée est donc que l'expression de Pfaff

$$(61) \qquad z_1^0 \, dy_1^0 + z_2^0 \, dy_2^0$$

soit, en u_1, u_2, une différentielle totale exacte.

Donc, pour qu'une transformation (49) soit une transformation de Malus, il faut et il suffit qu'elle possède la propriété suivante : Pour que $z'_1 \, dy'_1 + z'_2 \, dy'_2$ soit une différentielle totale, il faut et il suffit que $z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2$ en soit une. Autrement dit, l'équation symbolique

$$dz_1\,dy_1 + dz_2\,dy_2 = 0 \tag{62}$$

doit être invariante. Les équations de la transformation doivent donc conduire à une identité

$$dz'_1\,dy'_1 + dz'_2\,dy'_2 = \rho(dz_1\,dy_1 + dz_2\,dy_2); \tag{63}$$

en la différentiant symboliquement, on trouve l'identité nouvelle

$$0 = d\rho(dz_1\,dy_1 + dz_2\,dy_2), \tag{64}$$

d'où l'on conclut sans peine que ρ est une constante.

Les transformations de Malus sont donc celles qui multiplient par une constante la forme différentielle $dz_1\,dy_1 + dz_2\,dy_2$, c'est-à-dire qui donnent lieu à des identités de la forme

$$z'_1\,dy'_1 + z'_2\,dy'_2 - \rho(z_1\,dy_1 + z_2\,dy_2) = d\psi, \tag{65}$$

ρ désignant une constante et ψ une fonction des y_i, z_i, y'_i, z'_i.

En d'autres termes, on a affaire aux transformations en (x, p) de S. Lie [1], et l'on ne retombe sur les transformations précédemment rencontrées que dans le cas où la constante ρ est égale à l'unité.

15. On retrouve les transformations de Malus générales en considérant le groupe (Γ') formé des transformations de contact homogènes qui laissent invariant le groupe (G); chacune d'elles multiplie la fonction caractéristique H par une constante $\frac{1}{\rho}$, différente de 1 en général [2].

Opérons comme au n° **11**, sur la forme canonique de (G). Le seul changement est celui de l'équation $q'_3 = q_3$, qui doit être ici remplacée par $q'_3 = q_3 : \rho$. L'équation (47) est, par suite, remplacée par

$$y'_3 = \rho y_3 + \Phi(y_1, y_2; q_1, q_2, q_3); \tag{66}$$

---

[1] S. Lie et F. Engel, *Theorie der Transformationsgruppen*, t. II, p. 131.

[2] *Ibid.*, p. 264 et 267. — Les transformations infinitésimales de ce groupe (Γ') sont les intégrales des équations $(Hf) = cH$, où c est une constante arbitraire.

et les équations (50) deviennent

$$(67) \qquad y'_3 = \rho y_3 - \psi(y_1, y_2; z_1, z_2), \qquad q'_3 = \frac{1}{\rho} q_3.$$

Par suite, l'identité $\Sigma q_i dy_i = \Sigma q'_i dy'_i$ donne alors

$$(68) \qquad B_1\, dA_1 + B_2\, dA_2 = \rho(z_1\, dy_1 + z_2\, dy_2) + d\psi,$$

ce qui fournit, pour la transformation (49) des rayons, la propriété caractérisée par l'identité (65).

Inversement, toute transformation (49) appartenant au groupe (γ'_0) caractérisé par la forme d'identité (65), c'est-à-dire toute transformation de Malus, peut être *étendue,* au moyen des formules (67) et (48); la fonction ψ résultant de l'intégration de la différentielle totale (65). Elle provient donc effectivement de l'une des transformations de contact qui laissent invariant le groupe (G), et même de ∞^1 telles transformations.

Mais, si ρ n'est pas égal à *un*, ces transformations modifient en réalité la nature élastique du milieu, puisque tout se passe comme si chaque surface d'onde était remplacée par son homothétique par rapport à son origine, avec un rapport d'homothétie constant égal à ρ : c'est en effet ce qui résulte du changement de H en $\frac{1}{\rho}$ H dans l'équation tangentielle (2) des surfaces d'onde.

16. En ce qui concerne les invariants intégraux, l'application de la transformation canonisante (42) met en évidence le fait que J_2 et J_4 sont attachés à des systèmes de rayons; car, en tenant compte de la condition $q_3 = 1$, on déduit de $\Sigma p_i dx_i = \Sigma q_i dy_i$ les expressions

$$(69) \qquad \omega' = dz_1\, dy_1 + dz_2\, dy_2, \qquad \omega''' = -dz_1\, dz_2\, dy_1\, dy_2,$$

où n'interviennent que les coordonnées constantes de chaque rayon.

On vérifie de plus que les transformations du groupe (Γ) donnant lieu à l'identité (52), il en résulte immédiatement par différentiation symbolique l'invariance de ω'; et, par suite de ω''' (déjà remarquée au n° **11**). Les invariants J_2 et J_4 ne sont donc pas altérés par ces transformations.

Au contraire, les transformations du groupe (Γ'), comme le montre la différentiation symbolique de l'identité (65), multiplient J_2 par ρ et J_4 par ρ^2. Il en est donc de même des transformations de Malus, qui ne laissent invariants J_2 et J_4 que dans le cas particulier $\rho = 1$.

17. Dans le cas d'un milieu homogène et isotrope, on a

$$H = \frac{1}{n}\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \tag{70}$$

n étant une contante qui est la longueur constante du vecteur-indice. On peut ici la supposer égale à l'unité.

On peut alors prendre pour transformation canonisante :

$$\left\{\begin{array}{lll} q_1 = p_1, & q_2 = p_2, & q_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}, \\ y_1 = x_1 - x_3\dfrac{p_1}{p_3}, & y_2 = x_2 - x_3\dfrac{p_2}{p_3}, & y_3 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\,\dfrac{x_3}{p_3}. \end{array}\right. \tag{71}$$

Les équations du rayon qui est ici *normal* à un élément de contact $(x_1, x_2, x_3;\ p_1, p_2, p_3)$ quelconque étant

$$\frac{X_1 - x_1}{p_1} = \frac{X_2 - x_2}{p_2} = \frac{X_3 - x_3}{p_3}, \tag{72}$$

y_1 et y_2 sont les coordonnées, dans le plan $X_3 = 0$, du pied du rayon dans ce plan, et nos deux autres coordonnées

$$z_1 = \frac{q_1}{q_3} = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}}, \qquad z_2 = \frac{q_2}{q_3} = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}} \tag{73}$$

sont les deux cosinus directeurs du rayon relatifs à l'axe des x_1 et à l'axe des x_2.

On retrouve donc les variables introduites par H. Bruns dans sa théorie de l'*Eikonal* [1].

La variable y_3 est, de plus, la distance du pied du rayon à un point quelconque de ce rayon.

On voit donc que le succès de la transformation de M. Bruns tient à ce qu'elle change le groupe des dilatations en un groupe de translations.

---

[1] *Abhandlungen der k. sächs. Gesellschaft. der Wiss.*, t. XXI, 1895. — *Cf.* F. Hansdorff, *Leipzigen Berichte*, 1896.