E. CARTAN

Sur les transformations de Bäcklund

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 6-24

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__6_1>

SUR LES TRANSFORMATIONS DE BÄCKLUND;

PAR M. E. CARTAN.

Cet article a pour but de démontrer un théorème relatif aux transformations de Bäcklund. Étant donnés deux espaces E et E′ à $n+1$ dimensions, et un certain nombre $r \leqq n+1$ de relations entre les *éléments* de ces espaces :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_i,\ z,\ p_i;\ x'_i,\ z',\ p'_i) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_r(x_i,\ z,\ p_i;\ x'_i,\ z',\ p'_i) = 0 \\ \qquad (i = 1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

il peut exister des familles de multiplicités d'éléments unis à n dimensions M de l'espace E, auxquelles les formules (1) font correspondre des multiplicités d'éléments unis à n dimensions de l'espace E′. Une telle correspondance définit une transformation de Bäcklund.

Les multiplicités M sont les intégrales générales d'un ou de plusieurs systèmes d'équations aux dérivées partielles de E à chacun desquels correspond un système d'équations aux dérivées partielles de E'.

Ce qui fait l'intérêt de ces transformations, c'est que deux systèmes différentiels qui se correspondent de cette manière peuvent fort bien ne pas être réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact. Les transformations de Bäcklund fournissent ainsi un moyen plus général que les transformations de contact pour la transformation des systèmes différentiels.

Le théorème que je démontre dans les pages qui suivent est que, dans le cas où $r = 2n + 1$, c'est-à-dire *dans le cas où les formules* (1) *font correspondre à tout élément de* E *un élément bien déterminé de* E' *et réciproquement*, deux systèmes différentiels correspondants sont *toujours* réductibles l'un à l'autre par une transformation de contact. Le théorème va même beaucoup plus loin. *Étant donné un des systèmes différentiels qui définissent les multiplicités* M *de l'espace* E *et le système différentiel qui définit les multiplicités correspondantes* M' *de l'espace* E', *il existe une transformation de contact bien déterminée* (S) *transformant chaque multiplicité intégrale du premier système dans la multiplicité intégrale correspondante* M' *du second système*. Autrement dit, la transformation de contact (S) produit sur toutes les multiplicités M exactement le même effet que la transformation d'éléments donnée (1).

Si les multiplicités M sont fournies par plusieurs systèmes distincts d'équations aux dérivées partielles, il est possible que ce ne soit pas la même transformation de contact (S) qui convienne à tous ces systèmes. *Néanmoins*, *la même transformation* (S) *convient à tous les systèmes qui contiennent les mêmes équations aux dérivées partielles du premier ordre* (ou à tous ceux qui n'en contiennent pas).

Il est à peine besoin de dire que la transformation (S) et la transformation (1) produisent le même effet sur une multiplicité M, *regardée comme un être géométrique indivisible*, mais il est bien évident qu'un élément *particulier* de M n'est pas transformé de la même manière par les deux transformations.

Je ne fais appel, dans la démonstration du théorème, à aucun résultat relatif à l'existence et au degré d'indétermination des intégrales d'un système différentiel. Je me sers simplement de la remarque, à peu près évidente, que tout système de relations entre des variables données qui annule une expression de Pfaff annule aussi son covariant bilinéaire. La démonstration, donnée dans les paragraphes II, IV et V, est précédée de quelques considérations auxiliaires sur les formes bilinéaires alternées; ces considérations sont exposées sous une forme purement analytique, mais elles pourraient être énoncées géométriquement, car elles se rapportent au fond à la théorie de certains faisceaux de complexes linéaires. Le paragraphe III est consacré à rappeler l'énoncé et la démonstration d'un théorème, d'ailleurs classique, sur les systèmes de Pfaff.

I.

1. Rappelons d'abord certaines propriétés des formes bilinéaires alternées. On désigne sous ce nom une forme

$$F = \sum_{i,k}^{i,\ldots,m} \alpha_{ik} \xi_i \eta_k$$

à deux séries de m variables, jouissant de la propriété de changer de signe quand on échange entre elles les variables des deux séries; une telle forme est caractérisée par les relations suivantes entre les coefficients :

$$\alpha_{ik} = -\alpha_{ki} \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Si l'on effectue sur les variables des deux séries la même substitution linéaire, on obtient encore une forme bilinéaire alternée.

On peut employer une notation symbolique qui a l'avantage de ne faire intervenir qu'une série de variables, en convenant de poser

$$\xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i = [\xi_i \xi_k] = -[\xi_k \xi_i];$$

la forme F s'écrit alors

$$F = \sum_{(i,k)} \alpha_{ik} [\xi_i \xi_k],$$

la somme étant étendue à toutes les *combinaisons* deux à deux des indices $1, 2, \ldots, m$. Si l'on effectue sur les variables ξ une substitution linéaire, la forme transformée s'obtient en remplaçant les anciennes variables en fonction des nouvelles, développant les expressions $[\xi_i \xi_k]$ suivant les règles du calcul algébrique comme si c'étaient des produits, mais ayant soin de ne pas changer l'ordre des facteurs variables dans les produits partiels, ou tout au moins de changer en même temps le signe du coefficient correspondant.

Nous conviendrons d'appeler *dérivée partielle* de la forme F par rapport à ξ_i la forme linéaire

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_i} = \sum_{k=1}^{k=m} a_{ik}\,\xi_k.$$

2. On appelle *rang* de la forme bilinéaire F le rang du système des m formes linéaires $\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial \xi_m}$, c'est-à-dire le nombre de celles de ces formes qui sont linéairement indépendantes. On démontre facilement que ce rang est toujours pair, soit $2n$, et que la forme F est réductible par une substitution linéaire à la forme canonique

$$[\xi_1\xi_2] + [\xi_3\xi_4] + \ldots + [\xi_{2n-1}\xi_{2n}].$$

Si le rang $2n$ de la forme F est inférieur à m, il existe, entre les m dérivées partielles de la forme, $m - 2n$ relations linéaires indépendantes.

3. Nous conviendrons de dire qu'un système d'équations linéaires

$$\sum_{k=1}^{k=m} a_{ik}\xi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h)$$

annule la forme F, si F s'annule en tenant compte de ces équations. Un système de $h < n$ équations linéaires indépendantes, qu'on peut toujours supposer ramené à

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_h = 0,$$

réduit le rang de F de $2h$ unités au plus. En effet, si $\overline{F}$ désigne ce que devient F quand on y annule $\xi_1, \ldots, \xi_h$, la forme $\overline{F}$ n'a plus que $m - h$ dérivées au lieu de m, et l'annulation de $\xi_1, \ldots, \xi_h$

introduit entre

$$\frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi_{h+1}}, \ldots, \frac{\partial \overline{F}}{\partial \xi_m}$$

h relations au plus qui n'avaient pas lieu entre les dérivées correspondantes de F; il reste donc au moins $2n - 2h$ dérivées indépendantes de $\overline{F}$.

En particulier, une forme F de rang $2n$ ne peut être annulée que par un système de n équations au moins. On démontre facilement, en recourant par exemple à la forme réduite, qu'il y a effectivement une infinité de systèmes de n équations annulant F, et même que ces systèmes dépendent de $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficients arbitraires.

4. Nous allons examiner le problème analogue, non plus pour une forme bilinéaire, mais pour un système Σ de r formes bilinéaires (linéairement indépendantes ou non),

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_r.$$

Nous distinguerons ici :

1° Le *rang* ρ du système Σ : c'est, par définition, le nombre des formes linéaires $\frac{\partial F_i}{\partial \xi_k}$ indépendantes; c'est encore le nombre minimum de variables au moyen desquelles peuvent s'exprimer les r formes F_i par une substitution linéaire convenable effectuée sur les variables;

2° Le rang $2n$ de la forme bilinéaire

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \ldots + \lambda_r F_r,$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ désignent des paramètres indéterminés : c'est, en somme, la forme bilinéaire la plus générale du faisceau de formes bilinéaires déterminé par le système Σ.

Il est évident que l'on a

$$\rho \geqq 2n.$$

5. Il est manifeste, d'après ce qui a été dit plus haut, qu'il est impossible d'annuler simultanément toutes les formes $F_1, \ldots, F_r$

par un système de moins de n équations linéaires. Nous nous proposons de déterminer tous les systèmes de n équations qui les annulent. Mais nous n'avons pas besoin, pour la suite, de la solution complète de ce problème qui, du reste, n'est pas toujours possible. Nous allons nous contenter de le ramener au cas où le rang ρ de Σ est égal au rang $2n$ de F. D'une manière plus précise, nous allons montrer que *tous les systèmes cherchés de n équations linéaires contiennent un certain nombre* $\nu \leqq n$ *d'équations fixes qu'on peut former par un procédé régulier, de telle manière que, si l'on tient compte de ces* ν *équations, le rang* $\bar{\rho}$ *du système* $\bar{\Sigma}$ *obtenu soit égal au rang* $2n - 2\nu$ *de la forme correspondante* $\bar{F}$: les $n - \nu$ équations inconnues doivent alors être choisies de manière à annuler les r formes du système $\bar{\Sigma}$.

6. Pour démontrer ce théorème, supposons donc $\rho > 2n$. Remarquons que les dérivées partielles de la forme F satisfont à $m - 2n$ relations linéaires indépendantes dont les coefficients sont des fonctions de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, qu'on peut supposer algébriques entières. Soient

$$(1)\quad A_{i1}(\lambda)\frac{\partial F}{\partial \xi_1} + \ldots + A_{im}(\lambda)\frac{\partial F}{\partial \xi_m} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - 2n)$$

ces relations. Introduisons m variables auxiliaires $u_1, \ldots, u_m$ et considérons les $m - 2n$ expressions

$$A_{i1}(\lambda)\,u_1 + \ldots + A_{im}(\lambda)\,u_m \qquad (i = 1, 2, \ldots, m - 2n);$$

ce sont des polynomes entiers en $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, dont les coefficients sont linéaires en $u_1, \ldots, u_m$. Annulons les coefficients de tous ces polynomes supposés ordonnés; nous aurons ainsi un certain nombre p d'équations linéaires à coefficients constants (indépendants des λ) :

$$(2)\qquad \alpha_{i1}u_1 + \ldots + \alpha_{im}u_m = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Considérons enfin les pr équations linéaires en $\xi_1, \ldots, \xi_m$:

$$(3)\quad \alpha_{i1}\frac{\partial F_k}{\partial \xi_1} + \ldots + \alpha_{im}\frac{\partial F_k}{\partial \xi_m} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ k = 1, \ldots, r).$$

Ce système d'équations linéaires est évidemment lié d'une manière covariante au système Σ.

Montrons d'abord que ces relations (3) ne sont pas toutes vérifiées identiquement. On peut supposer, à l'aide d'une substitution linéaire sur les u (et de la substitution contragrédiente sur les ξ), que les équations (2) se réduisent à

$$u_1 = u_2 = \ldots = u_p = 0.$$

Les formes $F_1, \ldots, F_r$ ne contiennent alors explicitement, d'après (3), aucune des variables $\xi_1, \ldots, \xi_p$. D'autre part, les équations (1) ne contiennent pas non plus de terme en

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{p+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_m}.$$

Le rang $2n$ de la forme F en $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_m$ est donc exactement égal à $m - p$. Le rang ρ du système Σ est, d'autre part, au plus égal à $m - p$, puisque les formes bilinéaires de Σ ne contiennent que les $m - p$ variables $\xi_{m+1}, \ldots, \xi_p$. Il en résulte que ρ est au plus égal à $2n$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\rho > 2n$.

7. Les équations (3) n'étant pas toutes des identités, nous allons maintenant montrer qu'elles doivent faire partie de tout système de n équations linéaires annulant à la fois $F_1, F_2, \ldots, F_r$. Soit, en effet, un tel système qu'on peut toujours supposer ramené à la forme

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0. \tag{4}$$

Les dérivées partielles

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_{n+1}}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_m}$$

sont manifestement des combinaisons linéaires de $\xi_1, \ldots, \xi_n$, puisque, pour chacune des formes F_i, et par suite pour la forme F, tous les coefficients

$$a_{ij} \qquad (i, j = n+1, \ldots, m)$$

sont nuls. Il existe donc, entre ces $m - n$ dérivées partielles, au *moins* $m - 2n$ relations linéaires indépendantes. Comme, d'autre part, il existe entre les m dérivées partielles de F exactement

$m - 2n$ relations indépendantes, il faut qu'aucune de ces relations ne contienne

$$\frac{\partial F}{\partial \xi_1}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F}{\partial \xi_n}.$$

En se reportant aux équations (1), (2) et (3), on voit que les premiers membres des équations (3), étant des combinaisons linéaires de $\frac{\partial F_k}{\partial \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial \xi_m}$, sont des combinaisons linéaires de $\xi_1, \dots, \xi_n$. Les équations (3) font donc partie des équations (4).

8. D'après cela, si l'on veut obtenir tous les systèmes de n équations linéaires qui annulent les r formes de Σ, on formera les p équations (3). En tenant compte de ces équations, les formes F_i deviendront des formes $\overline{F}_i$ à $m - p$ variables. La nouvelle forme $\overline{F}$ se déduisant de l'ancienne F en tenant compte de p équations linéaires indépendantes, son rang sera au moins $2n - 2p$; par suite il faudra adjoindre aux p équations (3), pour annuler les formes de Σ, au moins $n - p$ équations nouvelles. Si l'on suppose possible le problème d'annuler les formes de Σ par n équations, il faut donc que $\overline{F}$ soit de rang $2n - 2p$. Si le rang $\overline{\rho}$ de $\overline{\Sigma}$ est égal à $2n - 2p$, on sera ramené au même problème pour le système $\overline{\Sigma}$. Sinon, on fera pour $\overline{\Sigma}$ ce qu'on a fait pour Σ jusqu'à ce qu'on arrive à un système réduit Σ_0 pour lequel le rang ρ_0 soit égal au rang $2n_0$ de la forme F_0. Tout système de n équations linéaires annulant toutes les formes de Σ contiendra donc $n - n_0$ équations *fixes*, les autres *pouvant* dépendre de coefficients arbitraires.

9. Éclaircissons ce qui précède par un exemple numérique. Prenons le système Σ des trois formes à sept variables

$$\begin{aligned} F_1 &= [\xi_1\xi_3] + [\xi_2\xi_4] + [\xi_6\xi_7], \\ F_2 &= [\xi_1\xi_4] + [\xi_2\xi_5], \\ F_3 &= [\xi_1\xi_6] + a[\xi_4\xi_5]. \end{aligned}$$

On a manifestement ici

$$\rho = 7, \qquad n = 3.$$

Il existe une relation linéaire entre les sept dérivées partielles de la forme

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 ;$$

on trouve sans difficulté que cette relation est

$$- \lambda_1 \frac{\partial F}{\partial \xi_5} + \lambda_2 \frac{\partial F}{\partial \xi_4} - a \lambda_3 \frac{\partial F}{\partial \xi_2} = 0.$$

Les équations (3) sont donc

$$a \frac{\partial F_k}{\partial \xi_2} = \frac{\partial F_k}{\partial \xi_4} = \frac{\partial F_k}{\partial \xi_5} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire

$$\xi_1 = \xi_2 = a\, \xi_4 = a \xi_5 = 0.$$

Si a est différent de zéro, le problème d'annuler F_1, F_2, F_3 par un système de trois équations linéaires est impossible. Si a est nul, on doit d'abord prendre les deux équations

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 ;$$

on a alors

$$\overline{F}_1 = [\xi_6 \xi_7],$$
$$\overline{F}_2 = \overline{F}_3 = 0.$$

Comme $\bar{\rho} = 2\bar{n} = 2$, on est ramené à annuler $\overline{F}_1$ par une équation, ce qui donne

$$\alpha \xi_6 + \beta \xi_7 = 0.$$

II.

10. Considérons deux espaces à $n+1$ dimensions E et E′ et une transformation (T) des *éléments*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, z, p_1, \ldots, p_n)$$

de (E) dans les éléments

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, z', p'_1, \ldots, p'_n)$$

de (E′). Soient

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x'_i &= X_i(x, z, p), \\ z' &= Z\,(x, z, p), \\ p'_i &= P_i(x, z, p) \end{aligned} \right.$$

les formules qui définissent la transformation, ces formules étant supposées résolubles par rapport à $x_1, \ldots, z, \ldots, p_n$.

Comme on sait, la transformation (T) est dite de *contact* si une multiplicité quelconque à n dimensions d'éléments *unis* de (E) est changée en une multiplicité à n dimensions d'éléments unis de (E′), autrement dit si, grâce aux équations (1), on a une identité de la forme

$$dz' - p'_1\, dx'_1 - \ldots - p'_n\, dx'_n = \rho(dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n).$$

Supposons que la transformation (T) ne soit pas une transformation de contact. Il *peut* arriver qu'il existe néanmoins des multiplicités M à n dimensions d'éléments unis de (E) qui soient transformées en des multiplicités M′ d'éléments unis de (E′). Les multiplicités M sont dans ce cas les intégrales d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Notre but est de démontrer que, *si ce système ne contient aucune équation du premier ordre, c'est-à-dire s'il passe une multiplicité* M *par tout élément de l'espace* (E), *il existe une transformation* DE CONTACT *bien déterminée* (S) *telle qu'appliquée à toute multiplicité* M, *elle fournisse exactement la multiplicité* M′ *qui correspond à* M *par la transformation* (T).

11. Les multiplicités M et M′ étant formées d'éléments unis, on a, pour tout déplacement sur ces multiplicités,

$$\begin{aligned} dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n &= 0, \\ dz' - p'_1\, dx'_1 - \ldots - p'_n\, dx'_n &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte des formules (1), on obtient ainsi deux équations de Pfaff en $dx_1, \ldots, dz, \ldots, dp_n$ et ces deux équations de Pfaff sont linéairement indépendantes, puisque la transformation (T) n'est pas de contact. La multiplicité M est donc une intégrale à n dimensions d'un système de deux équations

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0, \\ \omega_2 &= 0 \end{aligned}$$

à $2n+1$ variables. Il en résulte que les *covariants bilinéaires* de ω_1 et de ω_2 sont nuls en tenant compte des équations de la multiplicité M et de ses équations différentiées totalement. En tenant compte en particulier des équations $\omega_1 = \omega_2 = 0$, ces covariants deviennent deux formes bilinéaires alternées à

$$2n+1-2=2n-1$$

variables (les variables étant ici $2n-1$ des différentielles $dx_1, \ldots, dp_n$, ou $2n-1$ combinaisons linéaires de ces différentielles). Nous désignerons ces variables par

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{2n-1}$$

et les deux formes bilinéaires par F_1 et F_2.

Quand on se déplace sur M, il existe $n+1$ relations linéaires entre les $2n+1$ différentielles $dx_1, \ldots, dp_n$; deux de ces relations sont $\omega_1 = \omega_2 = 0$; par suite on voit que *les deux formes* F_1 *et* F_2 *s'annulent par un système de* $n-1$ *équations linéaires entre les variables* ξ.

Le rang de la forme

$$F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$$

est au plus égal à $2n-2$, puisque ρ est ici au plus égal à $2n-1$. Mais ce rang ne peut pas descendre au-dessous de $2n-2$, car F_1 par exemple se déduit de la forme bilinéaire de rang $2n$

$$-[dp_1\, dx_1] - \ldots - [dp_n\, dx_n]$$

par une seule relation linéaire entre $dx_1, dp_1, \ldots, dx_n, dp_n$, savoir celle qu'on obtient en éliminant dz entre $\omega_1 = 0$ et $\omega_2 = 0$.

On est donc dans le cas étudié précédemment, où il s'agit d'annuler F_1 et F_2 par un système de $n-1$ équations linéaires, le rang de $F = \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$ étant $2(n-1)$.

12. Comme on l'a vu plus haut, le système d'équations cherchées comprendra un certain nombre ν d'équations *fixes* (ce nombre pouvant être réduit à zéro), les formes F_1 et F_2 se réduisant, si l'on tient compte de ces équations, à deux formes $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ à $2n-1-\nu$ variables, le rang du système $\overline{\Sigma}$ de ces deux formes étant égal à $2(n-1)-2\nu$, ainsi que le rang de la forme

$$\overline{F} = \lambda_1 \overline{F}_1 + \lambda_2 \overline{F}_2.$$

Soit, ce qu'on peut toujours supposer,

$$(2) \qquad \xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_\nu = 0$$

les ν équations obtenues. Ce sont de nouvelles équations de Pfaff auxquelles satisfait la multiplicité M.

Il en résulte que M annule les covariants bilinéaires de leurs premiers membres. Désignons par $\overline{F}_3, \ldots, \overline{F}_{\nu-2}$ ce que deviennent ces covariants quand on y tient compte des équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \xi_1 = \ldots = \xi_\nu = 0.$$

La forme

$$\overline{\overline{F}} = \lambda_1 \overline{F}_1 + \lambda_2 \overline{F}_2 + \lambda_3 \overline{F}_3 + \ldots + \lambda_{\nu+2} \overline{F}_{\nu+2}$$

doit être au plus de rang $2(n-1-\nu)$ puisqu'elle peut s'annuler par $n-1-\nu$ équations linéaires; mais comme d'autre part la forme

$$\lambda_1 \overline{F}_1 + \lambda_2 \overline{F}_2$$

est exactement de rang $2(n-1-\nu)$, il en est de même de $\overline{\overline{F}}$. On a donc un nouveau système de $\nu+2$ formes bilinéaires auxquelles on peut appliquer le même raisonnement que plus haut. On en déduira en général l'existence de nouvelles équations linéaires fixes entre les ξ, c'est-à-dire de nouvelles équations de Pfaff auxquelles doit satisfaire M, et ainsi de suite jusqu'à ce que le procédé ne soit plus applicable.

A ce moment-là, *on sera arrivé à un certain nombre $h+2$ d'équations de Pfaff fixes*

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{h+2} = 0$$

auxquelles satisfait toute multiplicité M. *En tenant compte de ces $h+2$ équations, les covariants bilinéaires de leurs premiers membres forment un système Σ' de $h+2$ formes bilinéaires*

$$\Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots. \quad \Phi_{h+2}$$

telles que la forme

$$\Phi = \lambda_1 \Phi_1 + \ldots + \lambda_{h+2} \Phi_{h+2}$$

soit de rang $2n-2h-2$, le système Σ' étant lui aussi de même rang $2n-2h-2$.

III.

13. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de rappeler un théorème classique sur les systèmes de Pfaff.

Étant donné un système de r équations de Pfaff à m variables

$$(1) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_r = 0,$$

on peut exprimer les covariants bilinéaires de leurs premiers membres comme des formes bilinéaires alternées

$$F_1, \quad F_2, \quad \ldots, \quad F_r$$

de $\omega_1, \ldots, \omega_r$ et de $m - r$ autres expressions de Pfaff

$$\varpi_1, \quad \ldots, \quad \varpi_{m-r}$$

indépendantes entre elles et indépendantes des ω. *Le théorème en question exprime que les équations*

$$(2) \qquad \omega_1 = \ldots = \omega_r = 0, \qquad \frac{\partial F_i}{\partial \varpi_k} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, m - r)$$

sont complètement intégrables et que, de plus, si

$$y_1, \quad \ldots, \quad y_{r+\rho}$$

constituent un système d'intégrales premières indépendantes de ces équations, les équations (1) *peuvent s'écrire sous la forme*

$$(3) \qquad \sum_{k=1}^{k=r+\rho} A_{ik}\, dy_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

les coefficients A_{ik} *ne dépendant que de* $y_1, y_2, \ldots, y_{r+\rho}$.

14. La démonstration repose d'abord sur la remarque que le système (2) est lié d'une manière covariante aux équations (1), c'est-à-dire reste invariant soit par un changement de variables, soit par une substitution linéaire effectuée sur les premiers membres de l'équation (1).

Ce point étant admis, le théorème est vrai, lorsque r est donné, pour $m = r$. Supposons-le vrai pour $m = r, r+1, \ldots, \mu$, et démontrons-le pour $m = \mu + 1$. Regardons l'une des variables, $x_{\mu+1}$ par exemple, comme un paramètre, sa différentielle étant alors regardée comme nulle; nous pouvons supposer qu'on a pris

$$\varpi_{\mu+1-r} = dx_{\mu+1}.$$

Le système (1) devient alors un système à μ variables, pour lequel les nouvelles formes $\overline{F}_i$ se déduisent des anciennes F_i en snpprimant les termes qui contiennent $\varpi_{\mu+1-r}$. En appliquant le théorème, supposé vrai, au nouveau système (1), on peut le mettre sous la forme (3) et même sous la forme plus simple

$$(4)\qquad \begin{cases} dy_1 + \alpha_{1,1}\, dy_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,\sigma}\, dy_{r+\sigma} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_r + \alpha_{r,1}\, dy_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,\sigma}\, dy_{r+\sigma} = 0. \end{cases}$$

Il est bien évident que, si l'on regarde de nouveau $x_{\mu+1}$ comme variable, le système (1) prendra la forme complétée

$$(5)\qquad \begin{cases} dy_1 + \alpha_{1,1}\, dy_{r+1} + \ldots + \alpha_{1,\sigma}\, dy_{r+\sigma} + \alpha_1\, dx_{\mu+1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_r + \alpha_{r,1}\, dy_{r+1} + \ldots + \alpha_{r,\sigma}\, dy_{r+\sigma} + \alpha_r\, dx_{\mu+1} = 0, \end{cases}$$

les coefficients α_{ik} dépendant seulement des y et de $x_{\mu+1}$, mais les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma$ pouvant dépendre de toutes les variables primitives, c'est-à-dire pouvant dépendre, en outre des y et $x_{\mu+1}$, de certaines autres variables $z_1, z_2, \ldots$.

Si les α_i ne dépendent que des y et de $x_{\mu+1}$, les équations (2) contiennent $r+\sigma$ ou $r+\sigma+1$ équations par rapport aux $r+\sigma+1$ variables y et $x_{\mu+1}$: elles sont donc sûrement complètement intégrables.

Si les α_i dépendent d'autres variables que les y et $x_{\mu+1}$, on voit sans difficulté que les équations (2) se ramènent à

$$dy_k = 0, \qquad dx_{\mu+1} = 0, \qquad d\alpha_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r+\sigma;\ i = 1, \ldots, r);$$

elles sont donc encore complètement intégrables.

La première partie du théorème étant ainsi démontrée et

$$y_1, \quad \ldots, \quad y_{r+\rho}$$

désignant des intégrales indépendantes du système (2), il est évident que les équations (1), faisant partie des équations (2), peuvent se mettre sous la forme

$$(6)\qquad \begin{cases} dy_1 + \beta_{11}\, dy_{r+1} + \ldots + \beta_{1\rho}\, dy_{r+\rho} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ dy_r + \beta_{r1}\, dy_{r+1} + \ldots + \beta_{r\rho}\, dy_{r+\rho} = 0, \end{cases}$$

et tout revient à démontrer que les coefficients β_k ne dépendent que des y. S'il n'en était pas ainsi, on verrait en effet facilement que le système (2) contiendrait d'autres équations que les équations

$$dy_1 = \ldots = dy_{r+\rho} = 0.$$

Ce théorème est d'ailleurs susceptible d'une démonstration directe par le calcul, en utilisant l'*identité fondamentale*.

Remarquons enfin que l'entier désigné par ρ n'est autre que le rang du système des formes $F_1, \ldots, F_r$, dans lesquelles on a supprimé tous les termes en $\omega_1, \ldots, \omega_r$.

IV.

15. Appliquons ce théorème aux $h+2$ équations de Pfaff auxquelles nous étions arrivés à la fin du paragraphe II et auxquelles satisfait toute multiplicité M. Ici le nombre ρ, qui n'est autre que le rang du système des formes $\Phi_1, \ldots, \Phi_{h+2}$, est égal à $2n-2h-2$. On peut donc trouver $2n-h$ fonctions

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_{2n-h}$$

de

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad z, \quad \ldots, \quad p_n,$$

telles que le système des $h+2$ équations de Pfaff considérées soit susceptible d'être mis sous la forme

$$(1)\qquad \varpi_i = \sum_{k=1}^{k=2n-h} A_{ik}(y_1, \ldots, y_{2n-h})\, dy_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, h+2).$$

On aura les multiplicités M *en cherchant toutes les intégrales à $n-h-1$ dimensions de ce système de Pfaff.* La même intégration donne les multiplicités correspondantes M′ qui sont définies par les mêmes $n+1$ relations entre les y.

L'équation

$$(2) \qquad dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = 0$$

étant une conséquence des équations (1) peut s'écrire sous la forme

$$(2') \qquad \alpha_1 \varpi_1 + \alpha_2 \varpi_2 + \ldots + \alpha_{h+2} \varpi_{h+2} = 0.$$

Il est facile de voir qu'aucun des coefficients α n'est nul et que leurs rapports mutuels sont des fonctions indépendantes entre elles et indépendantes des y. Si, en effet, on suppose, ce qui est permis, $\alpha_1 \neq 0$, le premier membre de l'équation (2′), divisé par α_1, doit dépendre de $2n+1$ variables indépendantes au moins, pour que l'équation (2′) soit équivalente à l'équation (2). Les variables y étant au nombre de $2n - h$, il faut que les rapports

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\alpha_{h+2}}{\alpha_1}$$

fournissent $h+1$ fonctions indépendantes nouvelles.

Il résulte de là qu'on a deux identités de la forme

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_n\, dx_n = \rho\,(\varpi_1 + u_2 \varpi_2 + \ldots + u_{h+2} \varpi_{h+2}), \\ dz' - p'_1\, dx'_1 - \ldots - p'_n\, dx'_n = \rho'\,(\varpi_1 + v_2 \varpi_2 + \ldots + v_{h+2} \varpi_{h+2}), \end{array} \right.$$

les coefficients $u_2, \ldots, u_{h+2}$ étant indépendants entre eux et des y, et de même les coefficients $v_2, \ldots, v_{h+2}$.

16. Cela posé, soit

$$y_k = Y_k(x, z, p) = Y'_k(x', z', p') \qquad (k = 1, \ldots, 2n - h)$$

les formules qui expriment les y en fonction des x, z, p et en fonction des x', z', p'. Les $2n+1$ relations

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} Y_k(x, z, p) = Y'_k(x', z', p'), & (k = 1, \ldots, 2n - h) \\ u_2 = v_2, \quad \ldots, \quad u_{h+2} = v_{h+2}, & \end{array} \right.$$

où les u sont supposés exprimés au moyen des x, z, p, et les v au moyen des x', z', p', sont résolubles aussi bien par rapport aux $2n+1$ quantités x_i, z, p_i que par rapport aux $2n+1$ quantités x'_i, z', p'_i. Elles définissent donc une transformation (S) des éléments de E dans les éléments de E′. C'est une transformation de contact, puisqu'elle entraîne, d'après (3), l'identité

$$\frac{1}{\rho}(dz - p_1\,dx_1 - \ldots - p_n\,dx_n) = \frac{1}{\rho'}(dz' - p'_1\,dx'_1 - \ldots - p'_n\,dx'_n).$$

De plus, elle change toute multiplicité M dans la multiplicité correspondante M', puisque ces deux multiplicités sont définies par les mêmes relations entre les y.

Il existe donc bien une transformation de contact déterminée (S) *produisant sur chaque multiplicité* M *le même effet que la transformation donnée* (T).

V.

17. Nous avons exclu essentiellement de nos raisonnements précédents toutes les multiplicités M qu'on obtiendrait en annulant certaines fonctions déterminées de x, z, p. Nous avons, en effet, regardé les coefficients des formes bilinéaires F_i que nous avons eu à considérer comme des constantes, ne supposant pas que ceux qui ne sont pas identiquement nuls puissent s'annuler, ou que certaines relations identiques, qui changeraient par exemple les rangs de ces formes, puissent être vérifiées.

Il nous reste donc à examiner en quelque sorte les multiplicités M *singulières*, c'est-à-dire celles qui satisferaient à un système d'équations aux dérivées partielles parmi lesquelles figureraient une ou plusieurs équations du premier ordre.

On peut toujours supposer que ces équations du premier ordre sont en involution ainsi que les équations transformées par (T). On peut enfin, par une transformation de contact dans l'espace E et une transformation de contact dans l'espace E', supposer que ces deux systèmes en involution sont définis par les équations

$$p_{\nu+1} = p_{\nu+2} = \ldots = p_n = 0, \tag{1}$$

$$p'_{\nu+1} = p'_{\nu+2} = \ldots = p'_n = 0. \tag{2}$$

Chaque multiplicité M (de la famille considérée) est alors définie par $\nu + 1$ relations entre $x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu$. Ces relations définissent également une multiplicité d'éléments unis à ν dimensions m de l'espace e à $\nu + 1$ dimensions dont les éléments ont pour coordonnées $(x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu)$. Il y a une correspondance univoque entre les multiplicités M et les multiplicités m, ces dernières constituant l'intégrale générale d'un certain système d'équations aux dérivées partielles dont aucune n'est du premier ordre. Il y a de même une correspondance univoque entre les multiplicités M′ de l'espace E′ et certaines multiplicités m' d'un espace e' à $\nu + 1$ dimensions.

18. Les formules qui définissent la transformation (T) deviennent, quand on tient compte des équations (1) et (2),

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} x'_i = X_i(x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x_{\nu+1}, \ldots, x_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ z' = Z\ (x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x_{\nu+1}, \ldots, x_n), \\ p'_i = P_i(x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x_{\nu+1}, \ldots x_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, \nu). \end{array}\right.$$

Soient

$$(4)\quad F_i(x'_1, \ldots, x'_\nu, \ldots, z', p'_1, \ldots, p'_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu + 1)$$

les $\nu + 1$ équations qui définissent une des multiplicités M′; la multiplicité correspondante M est évidemment définie par les $\nu + 1$ équations

$$(5)\quad F_i(X_1, \ldots, X_\nu, \ldots, Z, P_1, \ldots, P_\nu) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu + 1).$$

On sait d'avance que ces équations entraînent $\nu + 1$ relations indépendantes entre $x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu$. Par suite $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ n'entrent qu'en apparence dans les équations (5) et le système de ces équations ne change pas si l'on y donne à $x_{\nu+1}, \ldots, x_n$ des valeurs numériques arbitraires fixes $x^0_{\nu+1}, \ldots, x^0_n$. Il résulte de là qu'on peut passer des multiplicités M aux multiplicités M′, ou plus exactement des multiplicités m aux multiplicités m', par les formules

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} x'_i = X_i(x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x^0_{\nu+1}, \ldots, x^0_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, \nu), \\ z' = Z\ (x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x^0_{\nu+1}, \ldots, x^0_n), \\ p_i = P_i(x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu; x^0_{\nu+1}, \ldots, x^0_n) \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots \nu), \end{array}\right.$$

qui naturellement sont, d'après ce qui précéde, résolubles par rapport à $x_1, \ldots, x_\nu, z, p_1, \ldots, p_\nu$. Mais ces formules définissent une transformation (t) des éléments de e dans les éléments de e' et comme les multiplicités m d'éléments unis de e qui sont transformées dans des multiplicités m' d'éléments unis de e' ne satisfont à aucune équation aux dérivées partielles du premier ordre, on peut appliquer le théorème démontré plus haut. Il existe donc une transformation de contact bien définie (s) de l'espace e dans l'espace e' jouissant de la propriété, qu'appliquée à toute multiplicité m, elle donne exactement la multiplicité m' que fournit la transformation (t). En complétant cette transformation (s) par les formules

$$x'_{\nu+k} = x_{\nu+k}, \qquad p'_{\nu+k} = p_{\nu+k} \qquad (k = 1, \ldots, n-\nu),$$

on obtient enfin une transformation de contact (S) produisant sur les multiplicités M le même effet que la transformation donnée (T). C'est ce qu'il fallait démontrer.

Nous sommes donc arrivés au théorème général suivant :

S'il existe des multiplicités d'éléments unis M *transformées par* (T) *en multiplicités d'éléments unis* M', *les multiplicités* M *appartiennent à une ou plusieurs familles distinctes, dont chacune est formée par l'intégrale générale d'un certain système d'équations aux dérivées partielles. Considérons un de ces systèmes ou même plusieurs de ces systèmes, tels du moins que dans tous ces systèmes celles des équations qui sont du premier ordre soient les mêmes. A ces systèmes on peut faire correspondre une transformation de contact bien déterminée* (S) *telle qu'appliquée à l'une quelconque des intégrales* M *de l'un quelconque de ces systèmes, elle produise le même effet que la transformation donnée* (T).

Il est bon de faire remarquer que nous avons supposé que les formules définissant la transformation (T) ne cessaient pas d'être résolubles tant par rapport aux x, z, p, que par rapport aux x', z', p'.