E. GOURSAT

Sur quelques fonctions de lignes semi-continues

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 118-130
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__118_0>

SUR QUELQUES FONCTIONS DE LIGNES SEMI-CONTINUES;

PAR M. E. GOURSAT.

1. Soit $F(x, y; x', y')$ une fonction positivement homogène de degré *un* en x', y'; on a proposé plusieurs définitions pour l'intégrale

$$(1) \qquad I_\Gamma = \int_\Gamma F(x, y; x', y')\,dt$$

prise le long d'une courbe rectifiable quelconque Γ, non ordinaire [1]. Dans le cas particulier où la fonction F est positive, ainsi que la fonction $F_1(x, y; x', y')$ définie par les égalités

$$(2) \qquad \frac{F''_{x'^2}}{y'^2} = \frac{-F''_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F''_{y'^2}}{x'^2} = F_1(x, y; x', y'),$$

on a démontré assez péniblement, en s'appuyant sur les propriétés des extrémales dans un domaine infiniment petit, que ces différentes définitions conduisaient au même résultat et concordaient avec la définition habituelle dans le cas d'une courbe ordinaire. On a démontré aussi que l'intégrale généralisée I_Γ, prise le long d'une courbe rectifiable quelconque, était égale *à la plus petite des limites* des intégrales I_{C_n} prises suivant des courbes ordinaires C_n qui tendent uniformément vers Γ [2]. Cette propriété est au fond la seule qui intervienne dans tous les raisonnements qu'on fait pour établir l'existence d'un minimum absolu

---

[1] Une fonction $f(x)$ sera dite *régulière* dans un intervalle, si elle est continue et admet une dérivée continue dans cet intervalle. Un *arc de courbe régulier* est représenté par deux équations $x = x(t)$, $y = y(t)$, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ étant régulières dans l'intervalle où l'on fait varier t. Une courbe *ordinaire* est formée de plusieurs arcs réguliers mis bout à bout; une telle courbe est représentée paramétriquement par deux équations $x = x(t)$, $y = y(t)$, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ étant régulières dans l'intervalle où t varie, sauf en un nombre fini de points qui sont des points de discontinuités de première espèce pour l'une au moins des dérivées $x'(t)$, $y'(t)$.

[2] L. TONELLI, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 32; 1911, p. 297-337; t. 35, 1913, p. 49-73.

de l'intégrale $\int_A^B F(x, y; x', y')\,dt$. Comme en réalité cette généralisation de la définition de l'intégrale n'a été faite que dans le but d'établir l'existence de l'extremum, il semblerait tout naturel de partir de cette propriété pour définir l'intégrale généralisée de la même façon que M. Lebesgue a défini la longueur d'un arc de courbe comme la plus petite des limites des longueurs des lignes polygonales qui tendent uniformément vers cette courbe. Dans une Note de sa thèse (p. 114), M. Lebesgue avait indiqué lui-même cette généralisation, sans rechercher dans quels cas elle était légitime. Pour que cette définition soit acceptable, il faut évidemment qu'elle soit d'accord avec la définition habituelle dans le cas d'une courbe ordinaire. En d'autres termes, il faut que l'intégrale définie

$$\int_C F(x, y; x', y')\,dt,$$

prise le long d'une courbe ordinaire quelconque, soit une fonction de cette courbe *semi-continue inférieurement*, suivant l'expression de M. Baire. Cela n'a pas lieu si la fonction F est quelconque (même si elle est toujours positive), mais seulement si la fonction F_1 est elle-même positive. Il était naturel de se poser la même question pour les intégrales définies les plus simples qu'on étudie dans le calcul des variations. La réponse est affirmative quand il s'agit d'un problème régulier. La démonstration suivante, d'un caractère très élémentaire, n'emprunte rien au calcul des variations. J'ai supposé, pour simplifier, que toutes les fonctions considérées étaient régulières; les démonstrations s'étendent d'elles-mêmes au cas où les dérivées auraient un nombre fini de discontinuités. On pourrait aussi les étendre, moyennant quelques longueurs, aux intégrales généralisées définies directement.

2. Pour ne pas interrompre la suite des raisonnements, nous démontrerons d'abord un lemme.

Lemme I. — *Soient* $P(x, y, z, u)$, $Q(x, y, z, u)$, $R(x, y, z, u)$ *des fonctions continues dans le domaine* D *défini par les inéga-*

lités

$$a \leqq x \leqq b, \qquad |y| < h, \qquad |z| < h, \qquad |u| < h,$$

y, z, u des fonctions régulières de x dans l'intervalle (a, b). L'intégrale définie

$$I_{(y,z,u)} = \int_a^b \{P(x, y, z, u)y' + Q(x, y, z, u)z' + R(x, y, z, u)u'\} dx$$

tend vers zéro en même temps que le maximum de $|y|$, $|z|$, $|u|$, pourvu que les dérivées y', z', u' restent plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif donné H.

Il suffit évidemment de démontrer cette propriété pour l'intégrale

$$I_1 = \int_a^b P(x, y, z, u)y' \, dx.$$

Considérons une subdivision de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels par des points de division

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots x_{i-1} < x_i \ldots x_{n-1} < x_n = b.$$

Nous supposerons le nombre h assez petit pour qu'on ait

$$|P(x, y, z, u) - P(x', 0, 0, 0)| < \lambda,$$

λ étant un nombre positif que nous fixerons tout à l'heure, si l'on a à la fois

$$|x - x'| < h \quad |y| < h \quad |z| < h \quad |u| < h;$$

si l'on a pris les longueurs de tous les intervalles $x_i - x_{i-1}$ inférieures à h, on aura

$$|P(x, y, z, u) - P(x_{i-1}, 0, 0, 0)| < \lambda$$

dans tout l'intervalle (x_{i-1}, x_i), quelles que soient les fonctions régulières y, z, u, pourvu qu'elles soient inférieures à h en valeur absolue. Si donc on pose

$$P(x, y, z, u) = P(x_{i-1}, 0, 0, 0) + \sigma_i(x),$$

on aura $|\sigma_i| < \lambda$ dans tout l'intervalle (x_{i-1}, x_i). Or, on a

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sigma_i(x)y' \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x_{i-1}, 0, 0, 0)y' \, dx;$$

puisque $|y'|$ est inférieur à H, on a aussi

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sigma_i(x)\,y'\,dx\right| < \lambda\mathrm{H}(b-a).$$

Le nombre positif λ étant jusqu'ici arbitraire, nous supposerons qu'on l'a choisi inférieur à $\frac{\varepsilon}{2\mathrm{H}(b-a)}$ et qu'on a pris les nombres h et x_i, comme on l'a expliqué.

Les points de division de l'intervalle (a, b) ayant été pris de cette façon, on aura

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sigma_i(x)y'\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Désignons maintenant par M une limite supérieure de

$$|\mathrm{P}(x, 0, 0, 0)|$$

et par δ une limite supérieure de $|y|$; il est clair qu'on aura

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\mathrm{P}(x_{i-1}, 0, 0, 0)y'\,dx\right| < 2\mathrm{M}n\delta.$$

Il suit de là qu'en désignant par η le plus petit des deux nombres h et $\frac{\varepsilon}{4\mathrm{M}n}$, si le maximum de $|y|$ dans l'intervalle (a, b) est inférieur à η, la valeur absolue de la seconde intégrale sera plus petite que $\frac{\varepsilon}{2}$. On aura donc $|\mathrm{I}_1| < \varepsilon$ pourvu que le maximum des valeurs absolues de y, z, u soit inférieur à η.

La condition que les dérivées y', z', u' soient bornées est essentielle. Par exemple, si l'on prend

$$y = \frac{h}{n}\cos(n^2 x), \qquad z = \frac{h}{n}\sin(n^2 x),$$

l'intégrale définie $\int_a^b (yz' - zy')\,dx$ est égale à $h^2(b-a)$ et ne tend pas vers zéro lorsque n croît indéfiniment, quoique y et z tendent uniformément vers zéro.

3. Cela posé, soit $\mathrm{F}(x, y; x', y')$ une fonction positivement homogène de degré *un* en x', y', satisfaisant aux conditions suivantes. Dans un domaine $\mathcal{D}$ du plan des xy, $F(x, y;\ \cos\theta, \sin\theta)$ reste supérieur, quel que soit θ, à un nombre positif m

$$(3) \qquad F(x, y;\ \cos\theta, \sin\theta) \geqq m > 0;$$

de plus, on a dans le même domaine, quels que soient x', y',

$$(4) \qquad F_1(x, y;\ x', y') \geqq 0.$$

Soit C un arc de courbe régulier situé dans ce domaine et représenté par les équations

$$(5) \qquad x = x(t), \qquad y = y(t),$$

les fonctions $x(t)$, $y(t)$ étant régulières dans l'intervalle (a, b) où varie t. Soient

$$(6) \qquad x = x(t) + \xi(t), \qquad y = y(t) + \eta(t)$$

les équations d'une courbe C′ située dans le même domaine, les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$ étant aussi régulières.

Si les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$ tendent uniformément vers *zéro* dans l'intervalle (a, b), on dit que la courbe C′ tend elle-même uniformément vers la courbe C. Posons

$$I = \int_C F(x, y;\ x', y')\,dt, \qquad I' = \int_{C'} F(x, y;\ x', y')\,dt;$$

lorsque la courbe C′ tend vers la courbe C, l'intégrale I′ ne tend pas nécessairement vers I. Nous voulons démontrer que, si I′ tend vers une limite, cette limite est au moins égale à I. En termes précis, à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un autre nombre positif λ tel qu'on ait

$$(7) \qquad I' > I - \varepsilon,$$

pourvu que les fonctions $\xi(t)$, $\eta(t)$ restent plus petites que λ en valeur absolue.

D'après la première inégalité (3), l'intégrale I′ est au moins égale à mS', S′ étant la longueur de la courbe C′. Il n'y a donc lieu de démontrer l'inégalité (7) que pour les courbes C′ dont la longueur reste bornée. Étant donnée une suite de courbes C′ satisfaisant à cette condition, on peut alors faire un changement de la variable indépendante t tel que les valeurs absolues des dérivées x', y', ξ', η' restent bornées dans l'intervalle (a, b); nous supposerons donc qu'on a $|\xi'| < \mathrm{H}$, $|\eta'| < \mathrm{H}$, pour toutes les courbes C′ considérées.

On a, d'après la formule de Taylor limitée aux termes du second degré en ξ', η',

$$\begin{aligned} &\mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x'+\xi', y'+\eta') - \mathrm{F}(x, y; x', y') \\ &\quad = \mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x'+\xi', y'+\eta') - \mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x', y') \\ &\qquad + \mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x', y') - \mathrm{F}(x, y; x', y') \\ &\quad = \mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x', y') - \mathrm{F}(x, y; x', y') \\ &\qquad + \xi'\mathrm{F}'_{x'}(x+\xi, y+\eta; x', y') + \eta'\mathrm{F}'_{y'}(x+\xi, y+\eta; x', y') \\ &\qquad + \frac{1}{1.2}\{\xi'\mathrm{F}'_{x'} + \eta'\mathrm{F}'_{y'}\}^{(2)}_{\substack{x'+\theta\xi' \\ y'+\theta\eta'}}; \end{aligned}$$

par suite, la différence $\mathrm{I}' - \mathrm{I}$ peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{I}' - \mathrm{I} = &\int_a^b \{\mathrm{F}(x+\xi, y+\eta; x', y') - \mathrm{F}(x, y; x', y')\}\, dt \\ &+ \int_a^b \{\mathrm{F}'_{x'}(x+\xi, y+\eta; x', y')\xi' + \mathrm{F}'_{y'}(x+\xi, y+\eta; x', y')\eta'\}\, dt \\ &+ \frac{1}{1.2}\int_a^b (\xi'\mathrm{F}'_{x'} + \eta'\mathrm{F}'_{y'})^{(2)}_{\substack{x'+\theta\xi' \\ y'+\theta\eta'}}. \end{aligned}$$

La seconde intégrale tend vers zéro, d'après le lemme établi plus haut, lorsque le maximum de $|\xi|$ et de $|\eta|$ tend vers zéro. Il en est évidemment de même, en vertu de la continuité de F, de la première intégrale.

On peut donc assigner un nombre positif λ assez petit pour que la valeur absolue de chacune de ces intégrales soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, si les valeurs absolues de ξ, η restent inférieures à λ. Quant à la dernière intégrale, elle est égale, d'après les relations (2), à

$$\frac{1}{2}\int_a^b (\xi' y' - \eta' x')^2 \mathrm{F}_1(x+\xi, y+\eta; x'+\theta\xi', y'+\theta\eta')\, dt$$

et ne peut avoir une valeur négative, puisque tous les éléments sont positifs ou nuls. L'inégalité (7) sera donc vérifiée.

On voit que le signe de F_1 joue un rôle essentiel dans la démonstration. Si F_1 peut changer de signe dans le domaine ω, le théorème n'est plus exact, en général, pour une courbe quelconque. Prenons par exemple

$$F = \frac{(x'^2 - y'^2)^2}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} + h\sqrt{x'^2 + y'^2}, \qquad h > 0.$$

L'intégrale $\int_0^1 F\,dt$ prise le long de l'axe des x est égale à $1 + h$. Considérons d'autre part la courbe C'_n formée de segments de droites alternativement parallèles aux bissectrices des angles formés par les axes menées par les points de Ox d'abscisses

$$0, \quad \frac{1}{n}, \quad \frac{2}{n}, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n}, \quad 1;$$

l'intégrale correspondante a pour valeur $h\sqrt{2}$. Lorsque n augmente indéfiniment, la courbe C'_n tend uniformément vers le segment $(0, 1)$ de l'axe des x, et la limite de l'intégrale suivant C'_n est plus petite que l'intégrale suivant le segment si l'on a

$$h < \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

Or on peut remplacer la courbe C'_n par une courbe régulière C''_n ayant même courbe limite, et telle que l'intégrale le long de C''_n diffère d'aussi peu qu'on veut de l'intégrale le long de C'_n. Si la différence de ces deux intégrales tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la conclusion sera donc la même pour les courbes régulières C''_n.

La méthode s'étend immédiatement aux intégrales

$$I = \int_C F(x, y, z;\, x', y', z')\,dt,$$

F étant une fonction positivement homogène de degré *un* en x', y', z', en conservant la condition (3) et en remplaçant la condition (4) par la suivante. D'après les relations

$$\begin{aligned} x'F''_{x'^2} + y'F''_{x'y'} + z'F''_{x'z'} &= 0, \\ x'F''_{x'y'} + y'F''_{y'^2} + z'F''_{y'z'} &= 0, \\ x'F''_{x'z'} + y'F''_{y'z'} + z'F''_{z'^2} &= 0, \end{aligned}$$

qui lient les dérivées du second ordre, l'équation

$$\mathcal{F} = X^2 F''_{x'^2} + Y^2 F''_{y'^2} + Z^2 F''_{z'^2} + 2XYF''_{x'y} + 2YZF''_{y'z'} + 2ZXF''_{x'z'} = 0,$$

où X, Y, Z sont des coordonnées courantes, représente un système de deux plans passant par la droite

$$\frac{X}{x'} = \frac{Y}{y'} = \frac{Z}{z'}.$$

Pour qu'on ait $\mathcal{F} \geqq 0$, quels que soient X, Y, Z, x', y', z', il faut et il suffit que ces deux plans soient imaginaires conjugués ou confondus, et que l'un des coefficients des carrés soit positif. Si ces conditions sont satisfaites, le raisonnement s'achève comme pour l'intégrale

$$I = \int F(x, y; x', y')\,dt.$$

Par exemple, dans le cas où $F = g(x, y, z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$, on a

$$\mathcal{F} = g(x, y, z)\,\frac{(Xy' - Yx')^2 + (Yz' - Zy')^2 + (Zx' - Xz')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'intégrale I est bien semi-continue inférieurement si la fonction $g(x, y, z)$ est positive. (*Voir* la thèse de M. Lebesgue, p. 114.)

4. On peut étendre le résultat aux intégrales qui ne sont pas sous forme paramétrique, en remplaçant l'inégalité (4) par une condition plus précise. Nous aurons besoin pour cela d'un nouveau lemme.

Lemme II. — *Soient* $P(x, y, z)$ *une fonction continue dans le domaine* D *défini par les inégalités*

$$a \leqq x \leqq b, \qquad |y| < h, \qquad |z| < h,$$

y et z des fonctions régulières dans l'intervalle (a, b). La plus petite des limites de l'intégrale

$$I_{(y,z)} = \int_a^b \left\{ y'^2 + P(x, y, z)\,y' \right\} dx,$$

lorsque le maximum de $|y|$ *et de* $|z|$ *tend vers zéro, est elle-même égale à zéro.*

En d'autres termes, à tout nombre positif ε on peut associer un autre nombre positif η, tel qu'on ait

$$I_{(y,z)} > -\varepsilon,$$

pourvu que $|y|$ et $|z|$ restent inférieurs à η dans l'intervalle (a, b).

La démonstration est très analogue à la précédente; λ étant un nombre positif que nous déterminerons un peu plus loin, choisissons un nombre h tel qu'on ait

$$|P(x, y, z) - P(x', 0, 0)| < \lambda,$$

pourvu que $|x - x'|$, $|y|$, $|z|$ soient inférieurs à h. Considérons une division de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels de longueur inférieure à h, et posons encore

$$P(x, y, z) = \sigma_i(x) + P(x_{i-1}, 0, 0);$$

$|\sigma_i(x)|$ est inférieur à λ dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i). On a

$$I_{(y,z)} = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} y'(y' + \sigma_i)\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x_{i-1}, 0, 0) y'\, dx.$$

Le produit $y'(y' + \sigma_i)$ est positif si la valeur absolue de y' est égale ou supérieure à λ; si la valeur absolue de y' est inférieure à λ, la valeur absolue de ce produit est inférieure à $2\lambda^2$. Dans tous les cas, on a $y'^2 + \sigma_i y' > -2\lambda^2$ dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i); on a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [y'^2 + \sigma_i(x) y']\, dx > -2\lambda^2(b - a).$$

Si l'on a pris $\lambda = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}}$, on aura donc

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{-1}}^{x_i} y'(y' + \sigma_i)\, dx > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Le raisonnement s'achève comme pour le lemme I. Soit M le maximum de $|P(x, 0, 0)|$; en désignant par η le plus petit des deux nombres h et $\frac{\varepsilon}{4Mn}$, la valeur absolue de la seconde intégrale

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} P(x_{i-1}, 0, 0)y'\,dx$$

sera inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$, si $|y|$ reste inférieur à η dans l'intervalle (a, b). On aura donc *a fortiori*

$$I_{(y,z)} > -\varepsilon,$$

quelles que soient les fonctions régulières y et z, pourvu que leurs valeurs absolues soient inférieures à η.

Il est clair que le raisonnement s'appliquerait encore si le coefficient de y' dépendait d'un nombre quelconque de fonctions y, z, u, ... tendant uniformément vers zéro. On peut aussi l'étendre aux intégrales doubles de la forme

$$\iint_{(A)}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + P(x, y, z, u)\frac{\partial z}{\partial x}\right]dx\,dy,$$

$$\iint_{(A)}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + Q(x, y, z, u)\frac{\partial z}{\partial y}\right]dx\,dy,$$

z, u étant des fonctions régulières qui tendent uniformément vers zéro dans un champ d'intégration A, limité par une courbe rectifiable.

5. Soit $F(x, y, y')$ une fonction satisfaisant aux conditions habituelles du calcul des variations, c'est-à-dire continue et admettant des dérivées partielles continues jusqu'au troisième ordre, lorsque le point (x, y) reste dans un domaine $\mathfrak{D}$, pour toutes les valeurs finies de y'. Nous supposerons, de plus, qu'on a dans ce domaine, quel que soit y',

$$(8) \qquad F''_{y'^2}(x, y; y') \geqq m > 0.$$

Dans ces conditions, l'intégrale

$$I_f = \int_a^b F[x, f(x); f'(x)]\,dx$$

est encore une fonctionnelle de $f(x)$, semi-continue inférieurement. On suppose, bien entendu, que la fonction $f(x)$ est régulière dans l'intervalle (a, b) et que la courbe C représentée par l'équation $y = f(x)$ est dans le domaine $\mathfrak{D}$. Soient

$$y = f(x) + \xi(x)$$

l'équation d'une courbe voisine C′ située dans le même domaine, et

$$I_{f+\xi} = \int_a^b F[x, f(x) + \xi(x); f'(x) + \xi'(x)]\, dx$$

la valeur de l'intégrale pour cette nouvelle courbe. On peut écrire $I_{f+\xi} - I_f$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} I_{f+\xi} - I_f = & \int_a^b \left\{ F[x, f(x) + \xi(x); f'(x)] - F[x, f(x); f'(x)] \right\} dx \\ & + \int_a^b F'_{y'}[x, f(x) + \xi(x); f'(x)]\xi'(x)\, dx \\ & + \frac{1}{2} \int_a^b F''_{y'^2}[x, f(x) + \xi(x); f'(x) + \theta\xi'(x)]\xi'^2 dx. \end{aligned}$$

La première intégrale tend vers zéro lorsque le maximum de $\xi(x)$ dans l'intervalle (a, b) tend vers zéro. D'un autre côté, d'après l'inégalité (8), la somme des deux dernières intégrales est supérieure à

$$\frac{m}{2} \int_a^b \left\{ \xi'^2 + \frac{2}{m} F'_{y'}[x, f(x) + \xi(x); f'(x)]\xi' \right\} dx,$$

et cette intégrale est supérieure à $-\frac{\varepsilon}{2}$ pourvu que le maximum de $|\xi(x)|$ soit inférieur à un nombre positif assez petit. La propriété énoncée est donc établie.

Remarque. — Nous n'avons eu besoin, dans la démonstration, d'aucune hypothèse sur le signe de F, ni sur l'existence des dérivées du troisième ordre; la condition (8) intervient seule. Cette dernière condition, ou tout au moins la condition plus large $F''_{y'^2} \geqq 0$, paraît nécessaire. Supposons, par exemple,

$$F = (y'^2 - 1)^2 + y^2;$$

l'intégrale $\int^1 F\,dx$, le long du segment $(0, 1)$ de Ox, est égale à *un*, tandis que l'intégrale le long de la courbe C'_n, définie plus haut (n° 3), est égale à $\frac{1}{12n^2}$. On en conclut qu'il est possible de former une suite de fonctions $f_n(x)$, régulières dans l'intervalle $(0, 1)$, tendant uniformément vers zéro dans cet intervalle, pour lesquelles l'intégrale

$$I_{f_n} = \int_0^1 [(f_n'^2 - 1)^2 + f_n^2]\,dx$$

tend vers zéro, tandis que l'intégrale le long de la courbe limite est égale à *un*. On voit que, dans cet exemple, il n'existe pas de courbe pour laquelle l'intégrale $\int_0^1 F\,dx$ atteigne sa borne inférieure qui est zéro, bien qu'il existe une suite de courbes minimizantes, tendant uniformément vers une courbe limite.

6. Le raisonnement s'étend aisément aux intégrales

$$I_{(y,z)} = \int_a^b F(x, y, z; y', z')\,dx$$

et aux intégrales doubles

$$I_z = \int\int_{(R)} F(x, y, z; p, q)\,dx\,dy,$$

la fonction F satisfaisant aux conditions habituelles du calcul des variations pourvu que les dérivées secondes $F''_{y'^2}$, $F''_{y'z'}$, $F''_{z'^2}$, ou F''_{p^2}, F''_{pq}, F''_{q^2} vérifient la condition suivante qui remplace la condition (8). Il existe deux nombres positifs α, β, tels qu'on ait dans tout le domaine considéré

$$(9) \qquad u^2 F''_{y'^2} + 2uv F''_{y'z'} + v^2 F''_{z'^2} \geqq \alpha u^2 + \beta v^2,$$

ou

$$u^2 F''_{p^2} + 2uv F''_{pq} + v^2 F''_{q^2} \geqq \alpha u^2 + \beta v^2, \tag{10}$$

quelles que soient les valeurs y', z' ou p, q.

La démonstration est toute pareille à celle qui a été donnée pour le cas plus simple de l'intégrale $\int_a^b F(x, y, y')\,dx$.

Remarque. — Lorsque la dérivée $f'(x)$ est elle-même régulière dans l'intervalle (a, b), on peut remplacer la condition (8) par la condition plus générale

$$F''_{y'^2}(x, y; y') \geqq 0.$$

On le démontre aisément au moyen du lemme suivant :

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue ainsi que sa dérivée $\varphi'_x(x, y)$ dans le domaine D défini par les conditions $a \leqq x \leqq b$, $|y| < h$; l'intégrale $I_y = \int_a^b \varphi(x, y) y'\,dx$, où $y(x)$ est régulière dans l'intervalle (a, b), tend vers zéro en même temps que le maximum de $|y|$ dans cet intervalle.

Ce lemme s'établit au moyen de la formule de Green, ou en remarquant qu'on peut écrire l'intégrale

$$\begin{aligned} I_y = \{\Phi[b, y(b)] - \Phi(b, 0)\} - \{\Phi[a, y(a)] - \Phi(a, 0)\} \\ + \int_a^b [\Phi'_x(x, 0) - \Phi'_x(x, y)]\,dx, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\Phi(x, y) = \int_0^y \varphi(x, t)\,dt,$$

et il résulte des hypothèses que $\Phi(x, y)$ et $\Phi'_x(x, y)$ sont des fonctions continues.

On peut faire des remarques analogues sur les intégrales $I_{(y,z)}$ et $I_{(z)}$.