Bulletin de la S. M. F.

M. Fouché

Sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre et les polygones formés de génératrices d'une quadrique et inscrits à une autre quadrique

Bulletin de la S. M. F., tome 43 (1915), p. 146-160

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1915__43__146_1>

SUR LES POLYGONES INSCRITS A UNE CONIQUE ET CIRCONSCRITS A UNE AUTRE ET LES POLYGONES FORMÉS DE GÉNÉRATRICES D'UNE QUADRIQUE ET INSCRITS A UNE AUTRE QUADRIQUE;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ.

1. *Introduction.* — Je dois m'excuser quelque peu de publier dans ce recueil un travail d'un caractère aussi élémentaire et aussi peu original. Toutes les propositions que je vais rappeler sont connues depuis longtemps, à part, peut-être, les propriétés homologiques des polygones de Moutard, et encore je ne voudrais pas garantir qu'elles fussent nouvelles. L'intérêt des lignes qui vont suivre, si toutefois il existe, réside seulement dans la simplicité des démonstrations. Cependant, j'ai été encouragé à les faire

imprimer par les conversations que j'ai souvent eues pendant les séances, et dans lesquelles quelques-uns de nos collègues exprimaient le désir que la Société mathématique de France s'intéressât plus directement aux questions d'enseignement et de pédagogie. Les théorèmes que je vais étudier passent pour difficiles à démontrer. Les raisonnements que j'expose ici donneront peut-être satisfaction, dans une certaine mesure, au désir précédent.

2. *Enveloppe du $n^{ième}$ côté d'un polygone de n côtés inscrit à une conique et dont les n — 1 premiers côtés sont tangents à une autre conique.* — Poncelet a démontré que si un polygone de n côtés est inscrit à une conique (C_0) et circonscrit à une autre (C_1), il existe une infinité d'autres polygones inscrits à (C_0) et circonscrits à (C_1), l'un des sommets de ce polygone pouvant être pris arbitrairement sur (C_0). Je me suis proposé de donner de ce théorème célèbre une démonstration sans calcul aussi simple que possible.

Par un point A_1 pris sur (C_0), je mène une tangente à (C_1) qui coupe (C_0) en un second point A_2, puis de A_2 je mène la seconde tangente à (C_1), et ainsi de suite, jusqu'à ce que j'obtienne sur (C_0) le point A_n. En joignant A_n à A_1 j'obtiens un polygone de n côtés inscrit à (C_0). En général, la droite A_nA_1 n'est pas tangente à (C_1).

Cherchons l'enveloppe de cette droite quand le point A_1 parcourt la conique (C_0). Je dis que cette enveloppe est une conique du faisceau défini par les deux coniques (C_0) et (C_1).

D'abord cette enveloppe est une conique. Soit en effet XY une droite de l'ensemble considéré. Cette droite coupe la conique (C_0) en deux points M et N qui sont les mêmes que les points désignés précédemment par A_1 et A_n. On pourra l'obtenir en faisant la construction indiquée à partir du point M ou du point N. Mais du point M on peut mener deux tangentes à la conique (C_1). Suivant qu'on prendra l'une ou l'autre, on obtiendra soit la droite XY, soit une autre droite X′Y′. Ainsi, par chaque point M de la conique (C_0) passent deux droites de l'ensemble, et deux seulement. L'enveloppe de ces droites est donc de la seconde classe : c'est une conique que nous désignerons par (E).

Soit B_1 un des points d'intersection des deux coniques (C_0)

et (C_1). Du point B_1 on ne peut mener qu'une seule tangente à la conique (C_1), au lieu de deux. Donc à partir du point B_1, on ne pourra construire qu'un seul polygone de n côtés, le dernier côté arrivant en B_1, soit $B_n B_1$. Donc, du point B_1 on ne pourra mener qu'une seule tangente $B_1 B_n$ à l'enveloppe du $n^{\text{ième}}$ côté. Cela prouve que le point B_1 se trouve sur cette enveloppe. Comme il en est de même des trois autres points d'intersection des coniques (C_0) et (C_1), la conique (E) passe bien par les quatre points d'intersection des deux autres.

Il peut arriver que la droite $A_1 A_n$, au lieu d'envelopper une conique, passe par un point fixe O. Cela revient à dire que la conique (E), enveloppe de $A_1 A_n$, se réduit à deux droites, dont O est l'intersection. En raisonnant par continuité, on voit que ces deux droites doivent passer par les quatre points communs aux coniques (C_0) et (C_1), ce qui prouve que le point O est l'un des sommets du triangle autopolaire conjugué commun aux deux coniques (C_0) et (C_1). Nous verrons plus loin (nº 5) un exemple de cette particularité qui, du reste, n'empêche pas les raisonnements suivants de s'appliquer sans presque aucun changement.

3. *Polygones de n côtés inscrits à une conique et circonscrits à une autre.* — Les coniques (C_1) et (E) admettent quatre tangentes communes. Il semble donc qu'il y ait quatre polygones de n côtés inscrits à (C_0) et circonscrits à (C_1), ce qui serait contraire au théorème de Poncelet. Mais il est facile de voir que ces quatre polygones ne sont pas des polygones proprement dits. Pour s'en rendre compte, il convient de distinguer si n est pair ou impair.

Supposons d'abord n pair et égal à $2p$. Mettons le point A_1 en l'un des quatre points communs aux coniques (C_0) et (C_1), et faisons la construction indiquée jusqu'à ce que nous ayons tracé p côtés, ce qui nous conduit au point A_{p+1}. Recommençons alors la construction en partant de ce point A_{p+1} et en suivant, en sens inverse, le contour précédent. Après avoir tracé p côtés, nous revenons au point A_1 et, comme de ce point on ne peut mener qu'une tangente à (C_1), le côté suivant coïncide avec $A_1 A_2$, et nous suivons encore, cette fois dans le sens direct, le contour déjà tracé. Alors le côté de rang $n - 1$ ou $2p - 1$ se termine au point A_p et la droite $A_p A_{p+1}$ qui termine le polygone est bien tangente à la conique (C_1). Le polygone ainsi obtenu se compose du contour $A_{p+1}A_pA_{p-1}\ldots A_2A_1$ parcouru successivement dans les deux sens. Il y a quatre de ces polygones singuliers correspondant chacun à l'un des quatre points communs aux deux coniques (C_0) et (C_1). Si donc il existe un polygone proprement dit de n côtés inscrit à (C_0) et circonscrit à (C_1), c'est que les coniques (C_1) et (E_1) auront une cinquième tangente commune, et alors elles coïncideront, ce qui démontre le théorème.

Si n est impair et égal à $2p+1$, nous placerons le point A_1 au point de contact de (C) avec une des quatre tangentes communes aux deux coniques et nous ferons la construction précédente en partant de A_1. A_2 coïncidera avec A_1. Nous continuerons jusqu'à ce que nous ayons tracé $p+1$ côtés, ce qui nous conduira au point A_{p+2}. Nous referons alors la même construction en partant du point A_{p+2} et en suivant le même contour en sens inverse. Après avoir tracé p côtés nous nous retrouverons en A_1 ou A_2; le $(p+1)^{\text{ième}}$ côté sera la tangente en A_1, qui nous ramène encore en A_1 ou A_2 à partir d'où nous suivrons encore le même contour, mais cette fois dans le sens direct. Pour avoir le côté de rang $2p$, il nous faut tracer $p-1$ côtés ce qui nous amène au point A_{2+p-1} ou A_{p+1}. Finalement le dernier côté est le côté $A_{p+1}A_{p+2}$ qui est bien tangent à la conique (C_1). Cette fois le polygone singulier est composé du contour $A_2A_3\ldots A_{p+2}$ parcouru dans les deux sens avec adjonction de la tangente en A_1 qui doit être considérée comme un côté de longueur nulle. La démonstration s'achève comme dans le cas précédent.

4. *Transformation polaire*. — Construisons la conique (C_2) polaire réciproque de (C_0) par rapport à (C_1), puis la conique (C_3) polaire réciproque de (C_1) par rapport à (C_2) et ainsi de suite; ou inversement, dans l'autre sens, la conique (C_{-1}) polaire réciproque de (C_1) par rapport à (C_0), la conique (C_{-2}) polaire réciproque de (C_0) par rapport à (C_{-1}) et ainsi de suite. Poncelet a fait remarquer que si deux coniques consécutives de cette suite admettent un polygone circonscrit à l'une et inscrit à la suivante, il en sera de même de deux coniques consécutives de la même suite. La démonstration est trop facile pour que je croie utile de la reproduire. Remarquons seulement que toutes ces coniques,

dérivées successivement l'une de l'autre par la transformation polaire, ont *le même triangle autopolaire commun*. En particulier, si les deux coniques initiales sont tangentes en un point A, toutes les coniques de la suite seront tangentes entre elles au même point A, et les droites qui joignent les deux autres points communs de deux coniques consécutives iront toutes se couper en un même point de la tangente commune en A. Si les deux coniques initiales sont bitangentes en deux points A et B, toutes les coniques de la suite seront bitangentes aux mêmes points. Plus particulièrement encore, si les deux coniques initiales ont même foyer et même directrice correspondante, toutes les coniques de la suite auront ce même foyer et cette même directrice.

5. *Propriétés homologiques*. — Supposons que le polygone (P_0) ait un nombre pair de côtés et soient A et A$'$ deux sommets opposés de ce polygone. Si l'on se donne le point A sur la conique (C_0), le point A$'$ sera complètement déterminé, et si l'on se donne le point A$'$, on retrouvera pour point opposé le point A. Donc les points A et A$'$ forment une involution sur la conique (C_0), et toutes les droites telles que AA$'$ qui joignent deux sommets opposés du polygone (P_0) et que j'appellerai diagonales *principales*, concourent en un même point ω. Considérons maintenant deux côtés opposés AB et A$'$B$'$. Les droites AA$'$ et BB$'$ se coupant au point ω, ces deux côtés vont se couper sur la polaire (X) du point ω par rapport à la conique (C_0). Si l'on fait une transformation homologique de toute la figure en prenant ω pour centre, (X) pour axe d'homologie, et A et A$'$ pour points conjugués, on sait que cette transformation homologique sera *involutive*; le polygone (P_0) se transformera en lui-même. La conique (C_0) se transformera aussi en elle-même parce que l'axe d'homologie est la polaire du centre d'homologie. La conique (C_1) doit alors se transformer en une autre, tangente à tous les côtés du polygone (P_0). Si le nombre des côtés est au moins égal à six, cette conique se transformera donc en elle-même. Il en résulte que les points de contact des côtés opposés de (P_0) avec (C_1) se correspondent aussi dans la même homologie, et il est aisé de vérifier que (X) est aussi la polaire de ω par rapport à la conique (C_1). Enfin, on peut étendre ces conclusions de proche en proche

à toutes les coniques de la suite définie au numéro précédent. Toutes ces propositions sont contenues dans l'énoncé suivant :

Si deux coniques admettent des polygones de Poncelet d'un nombre pair de côtés, ces polygones et tous ceux qu'on en peut déduire par la suite des transformations polaires définies au numéro précédent sont chacun homologique à lui-même dans une homologie involutive dont le centre et l'axe sont un sommet et le côté opposé du triangle autopolaire commun à toutes les coniques de la suite.

Il est bien entendu que, parmi les points qui se correspondent homologiquement sur un même polygone, se trouvent d'une part les sommets opposés et d'autre part les points de contact de deux côtés opposés avec la conique inscrite.

Le cas du quadrilatère échappe au raisonnement précédent parce qu'il existe une infinité de coniques passant par quatre points ou tangentes à quatre droites. On pourra donc remplacer les coniques initiales (C_0) et (C_1) chacune par une infinité d'autres, ce qui permettra d'obtenir, par transformation polaire, une infinité de suites de coniques telles que deux coniques consécutives admettent un quadrilatère inscrit à l'un et circonscrit à l'autre. Mais on sait que, lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une conique, les diagonales et les droites qui joignent les points de contact des côtés opposés passent par un même point. Il est du reste évident que ce point a la même polaire par rapport à toute conique inscrite ou circonscrite au quadrilatère. On peut alors vérifier facilement que les conclusions précédentes s'appliquent à toutes les suites qu'on peut former en partant d'un quadrilatère quelconque.

6. *Conséquences.* — La proposition du n° 2 montre que, si un polygone se déforme en restant inscrit à une conique et circonscrit à une autre, chacune des diagonales de ce polygone enveloppe une conique passant par les quatre points d'intersection des deux coniques primitives, excepté, si le nombre des côtés est pair, les diagonales principales qui pivotent autour du point ω. On voit ainsi un exemple du cas particulier signalé à la fin du n° 2. Il est, du reste, évident que si ce cas particulier se présente après qu'on

a tracé n tangentes à la conique (C_1), c'est qu'on retrouve le même point A_m en partant de l'une ou l'autre des deux tangentes qu'on peut mener du point A_1 à la conique (C_1) et alors les deux coniques admettent une infinité de polygones de $2n$ côtés inscrits à (C_0) et circonscrits à (C_1).

Si l'on cherche à construire un polygone de $2n$ côtés inscrit à (C_0) et circonscrit à (C_1) en partant de l'un des points d'intersection des deux coniques, il faudra qu'après avoir tracé n tangentes on arrive en un second point d'intersection des deux coniques, puisque le point ω par où doit passer la droite A_1A_n, étant à l'intersection de deux cordes communes aux coniques (C_0) et (C_1), se trouve nécessairement sur l'une des trois cordes communes issues de A_1. Le polygone sera constitué par l'ensemble de ces n tangentes parcouru dans les deux sens. C'est donc la condition nécessaire et suffisante que doivent remplir les deux coniques pour admettre un polygone de Poncelet de $2n$ côtés. Il en résulte que si cette condition est vérifiée pour deux des points d'intersection des deux coniques, elle est aussi vérifiée pour les deux autres.

Le cas du quadrilatère présente des particularités intéressantes, parce qu'il suffit alors de mener *deux* tangentes à (C_1).

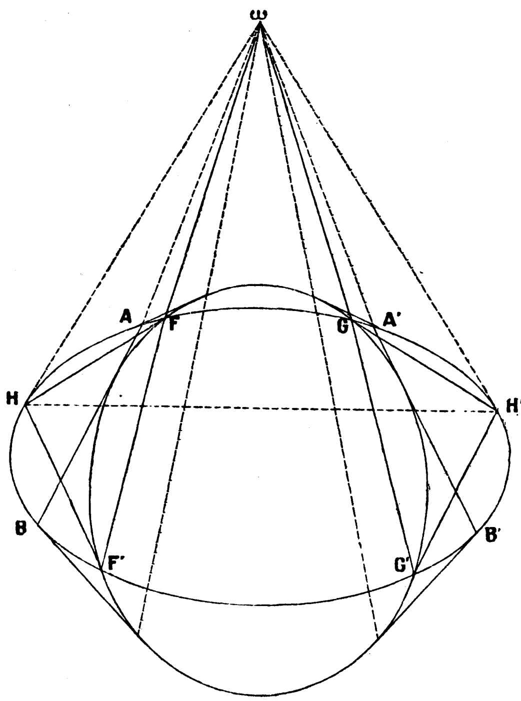
On voit d'abord que, si l'on se donne la conique (C_0), il suffira, pour construire la conique (C_1), de tracer dans (C_0) deux cordes partant d'un même point HF, HF', et de tracer ensuite une conique tangente à ces deux cordes aux points F et F'. Le nombre des paramètres dont dépend la conique (C_1) est égal à 4.

Cherchons maintenant à construire le quadrilatère en partant du point de contact A avec (C_0) d'une tangente commune aux deux coniques. Le second point se confondra avec A. De A on mènera dans (C_0) la corde AB tangente à (C_1) et de B la seconde tangente à (C_1). Pour que le quadrilatère se ferme, il faudra que cette seconde tangente soit une tangente commune aux deux coniques, de manière à donner sur (C_0) le même point B. Alors le quadrilatère de Poncelet se réduira à la droite AB, parcourue deux fois en sens inverse avec les deux tangentes communes en A et B considérées comme des côtés de longueur nulle (*fig.* 1).

De ce qui précède on déduit, par des raisonnements trop faciles pour qu'il soit utile de les développer, le théorème suivant :

Si deux coniques (C_0) *et* (C_1) *se coupent en deux points* F *et* F′, *de manière que les tangentes à* (C_1), *en ces deux points, se coupent en* H *sur la conique* (C_0), *les tangentes à* (C_1) *aux deux autres points d'intersection* G *et* G′ *des deux coniques se couperont aussi sur la conique* (C_0) *en un point* H′. *Les deux droites* FF′ *et* GG′ *se coupent en un point* ω, *d'où l'on peut mener deux tangentes à* (C_1). *Ces deux tangentes coupent* (C_0) *aux quatre points de contact des tangentes communes aux deux coniques.*

On peut ajouter que les points H et H′ sont les points de contact des tangentes menées de ω à la conique (C_0), qu'ils sont en ligne droite avec les points de contact des tangentes menées de ω à (C_1)



et que les points de contact des tangentes communes avec (C_1), convenablement associés, sont alignés sur ω (*voir* la figure).

7. *Cas particulier.* — Si le nombre des côtés du polygone (P_0) est impair, il n'existe pas de théorème analogue au précédent; mais on peut signaler un cas particulier remarquable. Supposons que les deux coniques (C_0) et (C_1) soient *bitangentes*. Nous savons que toutes les coniques de la suite seront aussi bitangentes aux deux mêmes points A et B. Faisons une transformation homographique dans laquelle *les deux points* A *et* B *seront remplacés par les points cycliques*. La suite des coniques sera remplacée par une suite de cercles *concentriques*, et les polygones (P) par des polygones *réguliers*. Donc les droites qui joignent un des sommets d'un de ces polygones au point de contact du côté opposé passeront toutes par le centre commun de tous ces cercles, et de plus, les points d'intersection d'un côté d'un polygone avec la tangente à la conique au sommet opposé seront tous à l'infini. En faisant alors la transformation inverse, nous obtenons le théorème suivant :

Si un polygone d'un nombre impair de côtés est inscrit à une conique et circonscrit à une autre bitangente à la première, les droites qui joignent chaque sommet du polygone au point de contact du côté opposé passent par le point de rencontre des tangentes communes aux deux coniques; les points d'intersection de chacun des côtés du polygone avec la tangente à la conique circonscrite au sommet opposé sont tous sur la corde commune aux deux coniques. Ce point et cette droite restent les mêmes pour tous les polygones qu'on obtient au moyen de la transformation polaire du n° 4.

Si en particulier les deux coniques initiales ont le même foyer et la même directrice, il en sera de même de toutes les autres. Le point fixe sera le foyer et la droite sera la directrice.

8. *Théorème de Moutard.* — Par un point A_1 de l'intersection de deux quadriques on mène une génératrice de l'une des quadriques. Elle rencontre l'autre en un point A_2 duquel on mène la génératrice de l'autre système de la première. Celle-ci rencontre la seconde quadrique en un point A_3 duquel on mène la génératrice du premier système de la première, et ainsi

de suite. Après qu'on a tracé ainsi un nombre *pair* de génératrices de la première quadrique, la dernière de ces génératrices est du second système; donc elle rencontre la génératrice initiale A_1A_2 qui est du premier système. Il peut se faire que le point d'intersection soit précisément le point A_1. Si cette particularité se présente, elle se présentera aussi quel que soit le point de départ choisi sur l'intersection des deux quadriques, le nombre des côtés du polygone ainsi formé étant toujours le même.

En d'autres termes :

Si dans la courbe commune à deux quadriques on peut inscrire un polygone gauche de $2n$ côtés dont les côtés sont des génératrices de l'une des quadriques, on pourra en inscrire une infinité d'autres en se donnant arbitrairement l'un des sommets sur la courbe commune aux deux quadriques.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de projeter toute la figure sur un plan quelconque en prenant pour centre de projection le sommet S d'un des quatre cônes du faisceau de quadriques défini par les deux quadriques données. La courbe commune se projette suivant une conique (C_0) et le contour apparent de la quadrique (Q_0) suivant une autre conique (D). Toutes les génératrices de (Q_0) de l'un ou l'autre système se projettent suivant des tangentes à la conique (D). Si donc la particularité indiquée se présente, il y aura un polygone de $2n$ côtés inscrit à (C_0) et circonscrit à (D). Donc il y en aura une infinité d'autres et l'on pourra se donner arbitrairement le point de départ a_1 sur la conique (C_0). On peut donc aussi se donner le point de départ A_1 sur la courbe commune aux deux quadriques. Les côtés du polygone (p) construit dans le plan de projection à partir de a_1 sont chacun les projections de deux génératrices de (Q_0) de systèmes différents. On peut alors les regarder comme les projections d'une suite de génératrices alternativement de première et de seconde espèce. Deux génératrices successives de cette suite se coupent donc en un point A et ce point est sur la courbe commune puisque la projection de leur intersection est sur la conique (C_0) [1]. Puisque le nombre des côtés est pair, le premier et le dernier côté sont des génératrices de systèmes différents qui se coupent aussi sur la courbe commune en un point qui se projette en a_1. Ce point ne peut être que le point de départ A_1, et ainsi, le théorème est démontré.

Il convient d'ajouter qu'on obtiendrait un autre polygone de Moutard si, en partant du même point A_1, on avait commencé par tracer la génératrice du système auquel n'appartient pas celle qu'on avait tracée tout d'abord.

9. *Propriétés homologiques.* — Le point S, sommet d'un des quatre cônes faisant partie du faisceau de quadriques défini par les quadriques (Q_0) et (Q_1), a le même plan polaire par rapport à ces deux quadriques et même par rapport à toutes les quadriques du faisceau. Faisons la projection sur ce plan polaire (H). Soit $A_1 A_2 \ldots A_{2n}$ le polygone (P) de $2n$ côtés formé par les génératrices de la quadrique (Q_0) et $a_1 a_2 \ldots a_{2n}$ la projection (p) de ce polygone (P), laquelle est par hypothèse inscrite dans la conique (C_0), projection de l'intersection des deux quadriques, et circonscrite à la conique (D), contour apparent de la quadrique (Q_0). Nous savons (n° 5) que les diagonales *principales* du polygone (p) passent par un même point S_1 qui est l'un des sommets du triangle autopolaire des deux coniques, et que les côtés opposés de ce même polygone (p) se coupent sur le côté $S_2 S_3$ du même triangle opposé à S_1. Les contours apparents (D) et (D_1) des deux quadriques (Q_0) et (Q_1) sont tous deux dans le plan (H) et se coupent en quatre points qui sont nécessairement sur la courbe commune aux deux quadriques. Ce sont les quatre points d'intersection de cette courbe avec le plan (H) et ils se trouvent ainsi sur la conique (C_0) [2]. Le triangle $S_1 S_2 S_3$ est donc le

---

[1] Il faut se rappeler que chaque point de (C_0) est la projection de deux points de la courbe commune, de sorte que la projetante de ce point coupe la quadrique (Q_0) en deux points qui sont sur la courbe commune. Le point A étant sur la quadrique (Q_0) est l'un de ces points.

[2] On sait que la projection d'une courbe tracée sur une surface doit être tangente à la projection du contour apparent de cette surface. On pourrait donc s'attendre à ce que la courbe (C_0) fût tangente à chacune des courbes (D) et (D_1). Mais il faut faire attention que la courbe (C_0) est une projection *double*,

triangle autopolaire du faisceau de coniques comprenant (C_0), (D) et (D_1). Puisque (D) est sur la quadrique (Q_0) et (D_1) sur la quadrique (Q_1), les points S_1, S_2, S_3 sont deux à deux conjugués par rapport à chacune de ces deux quadriques et, finalement, le tétraèdre $S S_1 S_2 S_3$ est le tétraèdre autopolaire commun aux deux quadriques.

Puisque les diagonales principales du polygone (p), projection de (P), passent par le point S_1, c'est que les diagonales principales du polygone (P) rencontrent la droite SS_1 joignant le centre de projection S au point S_1. Comme on aurait pu faire la projection en prenant pour centre l'un quelconque des sommets des quatre cônes du faisceau de quadriques, c'est-à-dire l'un quelconque des sommets du tétraèdre autopolaire, on voit que les diagonales principales du polygone (P) doivent rencontrer une des arêtes de ce tétraèdre passant par l'un quelconque de ses sommets. Cela peut se faire de deux manières. Ou bien les diagonales principales rencontrent deux arêtes opposées de ce tétraèdre, ou bien elles vont concourir en l'un des sommets.

Pour élucider la question, il convient de distinguer si n est pair ou impair, c'est-à-dire si le nombre des côtés du polygone (P) est ou n'est pas divisible par 4.

Soient AB et $A'B'$ deux côtés opposés du polygone (P), A' étant opposé à A, et B' à B. Si n est pair, les génératrices AB et $A'B'$ appartiennent à un même système, comme on le voit immédiatement en supposant que le polygone (P) ait quatre côtés, ce qui fait $n = 2$. Alors ces génératrices ne sont pas dans un même plan, et les diagonales AA', BB' ne peuvent pas se rencontrer. Donc, dans ce cas, les diagonales principales de (P) rencontrent deux arêtes opposées du tétraèdre autopolaire, soient SS_1 et S_2S_3. Nous savons aussi que sur la projection le polygone (p)

---

chacun de ces points étant la projection de ***deux*** points de la courbe commune aux deux quadriques. Elle peut donc couper le contour apparent sans que les tangentes à cette courbe et au contour apparent soient confondues, le point d'intersection étant un point ***double***. La partie intérieure au contour apparent est composée de points qui sont chacun la projection de deux points réels, tandis que la partie extérieure est le lieu des projections de couples de points ***imaginaires conjugués***. Cette circonstance se présente dans la Géométrie descriptive élémentaire, quand on fait la projection de l'intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent, sur le plan de ces deux axes.

est homologique à lui-même dans une homologie involutive ayant pour centre S_1 et pour axe S_2S_3. Si donc la diagonale aa' rencontre S_2S_3 en m, la division $aa'mS_1$ est harmonique. Si nous remontons alors au polygone (P) dont la diagonale AA′ rencontre SS_1 en N et S_2S_3 en M, la division AA′MN sera aussi harmonique, ce qui montre que le polygone (P) est homologique à lui-même dans une homologie biaxiale *involutive* dont les axes sont SS_1 et S_2S_3.

Si n est impair, les côtés opposés AB et A′B′ du polygone (P) sont deux génératrices de systèmes différents de la quadrique (Q_0); elles sont donc dans un même plan, et les deux diagonales AA′ et BB′ se coupent. Soient alors C et C′ les deux sommets opposés consécutifs à B et B′. La diagonale BB′ devra rencontrer aussi la diagonale CC′. Si les trois diagonales AA′, BB′, CC′ ne passent pas par un même point, elles devront rencontrer une même droite S_iS_j, et alors elles seront toutes les trois dans le plan de BB′ avec S_iS_j. Comme elles ne sont pas dans un même plan, il faudra qu'elles passent par un même point, et, en raisonnant de proche en proche, on verra que toutes les diagonales principales doivent passer par un même point. Ce point, d'après ce qu'on a vu, doit être sur une arête partant d'un quelconque des sommets du tétraèdre. Il ne peut donc être que l'un de ces quatre sommets, soit S_1. Nous savons de plus que sur la projection les côtés opposés de (p) se coupent sur S_2S_3. Donc les droites AB et A′B′, qui sont dans un même plan, se coupent sur le plan SS_2S_3. Si l'on considère maintenant deux diagonales *non principales* mais opposées, telles que AF et A′F′, ces diagonales se coupent encore puisqu'elles sont dans le plan des diagonales principales AA′ et FF′ qui se coupent en S. Nous savons que leurs projections se coupent sur S_2S_3; donc, elles-mêmes se coupent sur le plan SS_2S_3. Enfin la considération de la division harmonique formée sur la projection par les points $aa'S_1$, et le point m où aa' rencontre S_2S_3 prouvera comme précédemment qu'il s'agit encore d'une homologie *involutive,* mais ici, c'est une homologie centrale avec S_1 pour centre et SS_2S_3 pour plan directeur.

En résumé, *tout polygone formé par des génératrices d'une* *quadrique satisfaisant au théorème de Moutard est homologique à lui-même dans une homologie involutive qui est biaxiale si le nombre des côtés est divisible par 4, et centrale dans le cas contraire. Dans le premier cas, les deux axes sont deux arêtes opposées du tétraèdre autopolaire commun aux deux quadriques; dans le second cas, le centre est l'un des sommets de ce tétraèdre, et le plan directeur, le plan de la face opposée de ce tétraèdre.*

Il convient de remarquer que dans le second cas, si l'on projette le polygone de Moutard en prenant pour centre le centre même d'homologie, les sommets opposés du polygone se projetteront au même point, de sorte qu'on obtiendra un polygone de *n* côtés, c'est-à-dire d'un nombre impair de côtés, inscrit dans la projection de la courbe commune aux deux quadriques et circonscrit au contour apparent de cette même quadrique.

10. Dans le plan, le théorème relatif aux polygones de Poncelet est corrélatif de lui-même. Dans l'espace, il n'en est pas de même du théorème de Moutard. Le théorème corrélatif de celui-ci est le suivant :

Étant données deux quadriques (Q_0) et (Q_1), dans l'un des plans tangents communs à ces deux quadriques on trace une génératrice (G_1) de (Q_0), et par cette génératrice on mène le second plan tangent à (Q_1). Ce plan est aussi tangent à la quadrique (Q_0) puisqu'il contient la génératrice (G_1). Il contient donc une génératrice (G_2) de (Q_0) du système auquel n'appartient pas (G_1). Par cette génératrice (G_2) on mène l'autre plan tangent à (Q_1) lequel est aussi tangent à la quadrique (Q_0) puisqu'il contient (G_2). Il contient donc une génératrice (G_3) de (Q_0) qui appartient au premier système et par laquelle on mène encore l'autre plan tangent à (Q_1) et ainsi de suite. S'il arrive qu'après avoir tracé ainsi un nombre *impair* de génératrices de (Q_0), la dernière coïncide avec la génératrice initiale (G_1), il en sera de même quel que soit le plan tangent initial commun aux deux quadriques. Il en sera encore de même quel que soit le système dans lequel on prendra la génératrice initiale.

Supposons alors que les deux quadriques (Q_0) et (Q_1) satisfassent à la condition de Moutard (théorème direct). Si l'on construit la quadrique (Q_2) polaire réciproque de (Q_0) par rapport à (Q_1), les génératrices de (Q_0) seront remplacées par celles de (Q_2), et les points communs à (Q_0) et (Q_1) par les plans tangents communs à (Q_2) et (Q_1). Une génératrice de (Q_0) passant par un point commun à (Q_0) et (Q_1) sera remplacée par une génératrice de (Q_2) située dans un plan tangent commun aux deux quadriques (Q_1) et (Q_2) et alors ces deux quadriques satisferont au théorème corrélatif, les génératrices de (Q_2) construites d'après la règle indiquée formant un polygone fermé d'un nombre pair de côtés.

Faisons maintenant la transformation polaire par rapport à la quadrique (Q_2). Chaque génératrice de (Q_2) sera transformée en elle-même et la quadrique (Q_1) sera remplacée par une quadrique (Q_3). Considérons le polygone fermé formé par la suite des génératrices (G_2) de (Q_2). Ce polygone ne sera pas modifié. Deux côtés successifs de ce polygone sont dans un même plan tangent commun aux quadriques (Q_1) et (Q_2). Ce plan se transforme en un point commun aux deux quadriques (Q_3) et (Q_1), lequel devra se trouver sur les deux génératrices non modifiées. Ce sera donc leur point d'intersection, et alors nous retombons sur le théorème direct. De là résulte que, si l'on construit la suite indéfinie dans les deux sens des quadriques obtenues en prenant la polaire de chacune d'elles par rapport à la suivante ou à la précédente, chacune des quadriques de rang pair, combinée avec la suivante, satisfera au théorème de Moutard et, combinée avec la précédente, au théorème corrélatif. De plus, ce seront les mêmes polygones tracés sur une des quadriques de rang pair qui satisferont à ces deux théorèmes.

Enfin, comme la transformation polaire ne change pas le tétraèdre autopolaire commun, les propriétés d'homologie se conserveront dans toute la suite par rapport aux mêmes axes ou au même centre et au même plan d'homologie.