BULLETIN DE LA S. M. F.

M. FOUCHÉ

Sur la transformation doublement quadratique, les polygones de Poncelet et l'involution multiple

Bulletin de la S. M. F., tome 44 (1916), p. 120-160

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1916__44__120_0>

SUR LA TRANSFORMATION DOUBLEMENT QUADRATIQUE, LES POLYGONES DE PONCELET ET L'INVOLUTION MULTIPLE;

PAR M. MAURICE FOUCHÉ.

I. — GÉNÉRALITÉS.

1. *Introduction.* — Dans un précédent travail [1], j'ai indiqué des démonstrations relativement simples des propriétés des polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre. Poncelet fait dériver ces propriétés de celles des polygones qui ont leurs sommets sur une conique et dont les côtés sont tangents à plusieurs coniques faisant, avec la première, partie d'un même faisceau. Cette question est évidemment plus générale, mais aussi plus difficile que la première : il serait illusoire d'y vouloir chercher la même simplicité. Il est bien connu que les propriétés des polygones de Poncelet se rattachent à la considération d'équations à deux variables dont le premier membre se décompose en facteurs plus simples, chacun de ces facteurs étant du second ordre par rapport à chacune des deux variables. Une pareille équation établit entre les deux variables une correspondance *doublement quadratique*. Les propriétés de l'équation doublement quadratique à deux variables sont assez bien connues et ont donné lieu à de nombreux travaux parmi lesquels il convient de citer ceux de MM. Fontené et Bricard. En particulier, M. Fontené a publié en 1897 (*Nouvelles Annales des Mathématiques*, 3e série, t. XVI) un important Mémoire où il applique les propriétés de la relation doublement quadratique à l'étude des polygones ayant leurs sommets sur certaines coniques et leurs côtés tangents à d'autres coniques, question qui a été récemment reprise par M. Darboux (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. **162**, 1916, p. 101). Je ne m'occuperai pas ici de cette extension des théorèmes

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIII, 1915.

de Poncelet; mais je voudrais montrer que les relations doublement quadratiques peuvent conduire à d'autres propositions de géométrie. Enfin, aux questions de cette nature se rattachent aussi les propriétés d'un système de n points marqués sur une courbe unicursale et se déplaçant sur cette courbe de manière que leur ensemble dépende linéairement d'un paramètre variable, ce que j'ai appelé l'*involution multiple*.

2. *Rappel de quelques propriétés fondamentales de la relation doublement quadratique.* — Soit $f(x, y) = 0$ une pareille relation. On appelle *valeurs critiques* de x, celles pour lesquelles les deux valeurs correspondantes de y sont égales. La relation peut se mettre sous la forme

$$Ay^2 + 2By + C = 0,$$

où A, B, C sont des polynomes du second degré en x. Les valeurs critiques de x sont donc les racines de l'équation

$$B^2 - AC = 0.$$

On sait d'abord que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques est que les quatre valeurs critiques de l'une des variables soient égales deux à deux, à condition toutefois d'exclure le cas où le premier membre de la relation donnée serait divisible par un polynome du premier degré en x ou en y. Il est alors évident que, dans le cas général, si les valeurs critiques d'une variable sont égales deux à deux, il en sera de même des valeurs critiques de l'autre variable.

Considérons maintenant deux relations doublement quadratiques, l'une entre les variables y, z, l'autre entre x et z :

$$f(y, z) = 0, \qquad g(z, x) = 0,$$

qu'on peut écrire, en ordonnant par rapport à z :

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} Az^2 + 2Bz + C = 0, \\ A'z^2 + 2B'z + C' = 0, \end{cases}$$

les lettres non accentuées désignant des polynomes du second degré par rapport à x, les autres des polynomes du second degré par rapport à y.

L'équation résultante obtenue en éliminant z est du huitième degré par rapport à l'ensemble des deux variables et du quatrième par rapport à chacune d'elles.

On sait que ce résultant se décompose en deux facteurs doublement quadratiques dans les deux cas suivants :

1° Si les valeurs critiques de z dans les deux équations (1) sont les mêmes; 2° si dans chacune des équations (1) deux valeurs critiques sont égales, et si les deux valeurs critiques différentes de la première équation sont respectivement égales aux deux valeurs critiques différentes de la seconde.

Dans ces deux cas, la décomposition résulte de la remarque suivante : si l'on résout la première des équations par rapport à x et la seconde par rapport à y, les deux valeurs ainsi trouvées contiendront un même radical contenant z. On pourra alors éliminer ce radical, et l'on trouvera des résultats différents, suivant qu'on aura pris le radical avec le même signe ou avec des signes différents.

3. *Examen des cas de décomposition.* — Je me suis proposé d'étudier attentivement la réciproque du théorème précédent, afin de bien mettre en évidence les cas particuliers et les propriétés géométriques qui en découlent. La proposition correcte est la suivante :

Si le résultant se décompose en deux facteurs quadratiques *différents* et si les relations données ne se décomposent ni l'une ni l'autre, les valeurs critiques de la variable commune sont les mêmes dans les deux équations, ou bien, chaque équation admet pour la variable commune une valeur critique double, et les deux valeurs critiques simples sont les mêmes dans les deux équations.

Pour le faire voir, ordonnons les deux équations par rapport à x et y :

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax^2 + 2Bx + C = 0, \\ A'y^2 + 2B'y + C' = 0. \end{cases}$$

A, B, C, A′, B′, C′ étant des polynomes du second degré en z, et supposons que le résultant R de ces équations se décompose en deux facteurs dont l'un serait

$$(3)\quad (ax^2+2bx+c)y^2+(hx^2+2kx+l)y+mx^2+2nx+p=0.$$

A chaque couple de valeurs de x et y vérifiant cette équation correspond au moins une valeur de z vérifiant avec les précédentes les équations (2). Inversement, soit un couple de valeurs $x=x_1$, $z=z_1$ vérifiant la première des équations (2). A la valeur z_1, la seconde des équations (2) fait correspondre deux valeurs de y, y_1 et y_2 qui, avec x_1, annulent le résultant R et annulent, par conséquent, soit le premier membre de l'équation (3), soit l'autre facteur du résultant R. Je dis que l'une de ces valeurs vérifie l'équation (3). Soit en effet x_1 y_3 une solution quelconque de l'équation (3). Il existe, avons-nous dit, une valeur de z, z_3 qui, avec x_1 et y_3, vérifie les deux équations (2). Donc le système x_1, z_3 annule le résultant R′ de l'équation (3) et de la seconde des équations (2). Donc ce résultant et la première des équations (2) ont une infinité de solutions communes. Il faut donc, ou que le premier membre de la première des équations (2) soit un diviseur de R′, ou que ces deux polynomes aient un facteur commun. Dans le second cas le premier membre de la première équation (2) se décomposerait en deux facteurs, ce que nous n'admettons pas. Donc toute solution de la première équation (2) annule le résultant R′, et il lui correspond une valeur de y vérifiant les deux équations dont R′ est le résultant, et en particulier l'équation (3). Ainsi, à chaque valeur de z correspondent deux valeurs de x données par la première des équations (2), à chacune desquelles correspond une valeur de y vérifiant avec x l'équation (3), soit en définitive deux valeurs de y vérifiant avec x et z l'équation (3) et les équations (2).

Cela posé, éliminons y^2 entre l'équation (3) et la seconde des équations (2). Nous obtiendrons une équation *du premier degré* en y qui nous permettra d'exprimer y au moyen d'une fraction rationnelle contenant x et z. Nous y pourrons remplacer x par sa valeur tirée de la première des équations (2) et nous aurons une expression ne contenant que la variable z et dans laquelle figurera le radical $\sqrt{B^2-AC}$. On a ainsi deux valeurs de y qui doivent être les mêmes que celles qu'on tire de la seconde des équations (2) et qui contiennent le radical $\sqrt{B'^2-A'C'}$. Si le polynome B^2-AC

a ses quatre racines distinctes, le radical ne peut se simplifier, et les deux couples de valeurs de y ne peuvent être les mêmes que si les deux radicaux ne diffèrent que par un facteur constant, ce qui prouve qu'ils admettent les mêmes racines et que, par suite, les valeurs critiques de z sont les mêmes dans les deux équations (2).

Si le polynome $B^2 - AC$ a une racine double, le facteur correspondant étant au carré sort du radical, et le radical ne porte plus que sur un polynome du second degré. Il doit en être de même du second radical; donc $B'^2 - A'C'$ admet aussi une racine double et les deux autres racines sont les mêmes que celles de $B^2 - AC$; c'est le deuxième cas prévu dans l'énoncé.

Le raisonnement précédent tombe en défaut si l'équation obtenue par l'élimination de y^2 devient une identité quand on y remplace x par sa valeur tirée de la première des équations (2). Pour faire l'élimination, tirons y^2 de la seconde des équations (2) et portons-en la valeur dans l'équation (3). Nous aurons :

$$\begin{aligned} -(ax^2+2bx+c)(2B'y+C')+A'(hx^2+2kx+l)y & \\ +A'(mx^2+2nx+p) &= 0 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} [(hA'-2aB')x^2+2(kA'-2bB')x+lA'-2cB']y & \\ +(mA'-aC')x^2+2(nA'-bC')x+pA'-cC' &= 0. \end{aligned}$$

Le cas exceptionnel est celui où cette équation devient une identité toutes les fois que x vérifie la première des équations (2). C'est donc que le coefficient de y et le second terme sont chacun identiques au premier membre de la première des équations (2), à un facteur constant près. On pourra donc écrire les six conditions :

$$(4)\qquad \begin{cases} hA'-2aB'=\lambda A, & mA'-aC'=\mu A, \\ kA'-2bB'=\lambda B, & nA'-bC'=\mu B, \\ lA'-2cC'=\lambda C, & pA'-cC'=\mu C, \end{cases}$$

d'où l'on déduit :

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} h & a & A \\ k & b & B \\ l & c & C \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} m & a & A \\ n & b & B \\ p & c & C \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne pour A, B, C deux équations linéaires homogènes à coefficients constants. Si ces deux équations ne sont pas identiques, A, B, C sont proportionnels à trois nombres constants, c'est-à-dire qu'ils sont les produits d'un même trinome du second degré en z par trois nombres constants. Alors la première des équations (2) se décompose en deux facteurs dont l'un est un trinome du second degré par rapport à x et l'autre un trinome du second degré par rapport à z.

Si les deux équations (5) sont identiques, supposons que l'un au moins des coefficients de A, B, C ne soit pas nul. Alors A, B et C seront des fonctions linéaires et homogènes de deux trinomes du second degré par rapport à z, soit Z et Z_1. On pourra ensuite tirer des équations (4) A′, B′ et C′ en fonctions linéaires et homogènes de A, B, C et par suite aussi de Z et Z_1. Finalement, les équations (2) ne contiendront que deux trinomes du second degré par rapport à z et pourront s'écrire

$$ZX_1 - XZ_1 = 0,$$
$$ZY_1 - YZ_1 = 0,$$

X et X_1 étant des trinomes du second degré par rapport à x_1, Y et Y_1 des trinomes de second degré par rapport à y_1.

L'équation résultante se réduit à

$$XY_1 - YX_1 = 0.$$

Elle est doublement quadratique au lieu d'être de huitième degré; mais si on l'avait calculée par la formule classique on aurait trouvé

$$(XY_1 - X_1Y)^2 = 0.$$

On peut supposer qu'une seule des deux équations (5) soit une identité : rien ne sera changé aux conclusions précédentes.

Si enfin les deux équations (5) sont des identités, c'est que les coefficients h, k, l d'une part, m, n, p d'autre part sont proportionnels à a, b, c. Alors le premier membre de l'équation (3) se décompose en deux facteurs qui sont des trinomes du second degré, l'un par rapport à x, l'autre par rapport à y. Cela veut dire qu'il existe deux valeurs de x par exemple, pour lesquelles les équations (2) ont une solution commune quelle que soit y. Il faut alors que la seconde des équations (2) soit vérifiée pour cette valeur de x quelle que soit y. Elle se décomposera donc en deux autres, l'une ne contenant que x, l'autre que y. Il en sera de même de la première.

Si l'on considère ensemble les deux équations (2) et l'équation (3) qui admettent une infinité de solutions communes, il est évident que le premier membre de chacune d'elles est l'un des facteurs du résultant des deux autres. On peut alors formuler la conclusion :

Si trois équations doublement quadratiques irréductibles, chacune entre deux des trois variables x, y, z admettent une infinité de solutions communes, ou bien les valeurs critiques de chacune des variables qui ne sont pas des valeurs critiques doubles sont les mêmes dans les deux équations qui contiennent cette variable, ou bien les trois équations sont de la forme

$$YZ_1 - ZY_1 = 0, \qquad ZX_1 - XZ_1 = 0, \qquad XY_1 - YX_1 = 0,$$

chacune des grandes lettres désignant un trinome du second degré par rapport à la variable du même nom.

4. *Relation doublement quadratique symétrique.* — Supposons que, si la relation doublement quadratique est vérifiée par le couple de valeurs $x = \alpha$, $y = \beta$, elle le soit aussi par le couple $x = \beta$, $y = \alpha$. Alors les deux équations $f(x, y) = 0$ et $f(y, x) = 0$ auront une infinité de solutions communes. Si les premiers membres ne se décomposent pas en facteurs, il faudra qu'ils soient identiques, et alors la relation sera symétrique par rapport aux deux variables x et y.

Remarquons qu'on obtiendra aussi une relation doublement quadratique symétrique en multipliant les premiers membres de deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre :

$$(axy + bx + cy + f)(axy + by + cx + f) = 0.$$

Il est évident que dans une relation doublement quadratique symétrique, les valeurs critiques d'une variable sont égales à celles de l'autre.

Soit une relation doublement quadratique quelconque :

$$f(x, y) = 0.$$

A chaque valeur de y correspondent deux valeurs x' et x''. Ces deux valeurs sont liées par une relation doublement quadratique symétrique. En effet, si l'on se donne x', on trouve deux valeurs de y à chacune desquelles correspond un couple de valeurs de x; mais chacun de ces couples doit contenir la valeur initiale x'. A chacune des valeurs de x' correspondent donc deux valeurs de x'' et réciproquement. Enfin, si l'équation entre x' et x'' est vérifiée par $x' = \alpha$ et $x'' = \beta$ et qu'on pose $x' = \beta$, il est clair que l'une des valeurs de x'' devra être égale à α, puisque α et β sont les deux racines de la première équation correspondant à une même valeur de y.

Remarquons aussi que, si la première relation $f(x, y) = 0$ est elle-même symétrique, les valeurs critiques de la seconde sont égales à celles de la première. Soit en effet α une valeur critique de cette équation. Si l'on fait $x = \alpha$, on trouve pour y deux valeurs égales $y = \beta$. A cette unique valeur $y = \beta$ correspond dans l'équation primitive un seul couple de valeurs de x, $x = \alpha$ et $x = \alpha'$. Donc à $x' = \alpha$ correspondent deux valeurs égales de x'' : $x'' = \alpha'$.

5. *Détermination de la relation doublement quadratique symétrique. Application géométrique.* — Cette relation est de la forme

$$ax^2y^2 + bxy(x+y) + c(x^2+y^2) + cxy + f(x+y) + h = 0.$$

Elle contient six coefficients qui peuvent être multipliés par un même nombre, et ne figurent par conséquent que par leurs rapports qui sont au nombre de cinq. Donc, cette relation est déterminée par cinq couples de valeurs conjuguées, sauf les cas d'indétermination.

Pour éviter toute discussion algébrique, faisons une application géométrique de ce qui précède. Supposons que x et y soient les paramètres de deux points A et B d'une conique (C), et cherchons l'enveloppe de la droite AB. Une droite de l'ensemble coupe la conique (C) en deux points A et B et on l'obtient en prenant pour x la valeur du paramètre du point A ou du point B et pour y, la valeur du paramètre de l'autre point. Si l'on se donne le point A sur la conique, on peut prendre pour x la valeur du paramètre de ce point, et l'équation fera connaître deux valeurs de y, c'est-à-dire deux points B et B' sur la conique, et par suite deux droites AB et AB'. Si maintenant on avait pris le paramètre de A pour valeur de y, il résulte de la symétrie de l'équation qu'on aurait trouvé pour x les deux mêmes valeurs que précédemment pour y, et par suite les deux mêmes points B et B' et les deux mêmes droites AB, AB'. Donc, par chaque point de la conique passent deux droites de l'ensemble et deux seulement. Il en résulte que l'enveloppe de la droite AB est une conique (D).

Réciproquement, les tangentes à une conique (D) déterminent sur la conique (C) une relation doublement quadratique symétrique, puisque de chaque point A pris sur (C) on peut mener à (D) deux tangentes qui coupent (C) en deux autres points B et B'. La symétrie est du reste évidente puisque, en se donnant B par exemple, on retrouve A et un autre point.

Ainsi, étant donnée une conique (C), se donner une relation doublement quadratique symétrique équivaut à se donner une conique (D) et réciproquement. Or la conique (D) est complètement déterminée par cinq tangentes, c'est-à-dire par cinq couples de points A et B pris sur la conique (C). Donc la relation doublement quadratique symétrique est complètement déterminée par cinq couples de valeurs des variables différents entre eux. Il est bien entendu que deux de ces cinq couples peuvent comprendre la même valeur d'une des variables pourvu que les valeurs de l'autre soient différentes ; cela revient à donner dans la conique (C) deux cordes partant d'un même point ; mais il ne faut pas que trois des couples donnés comprennent une même valeur d'une des variables.

Les valeurs critiques sont celles des paramètres des points de (C), d'où les deux tangentes qu'on peut mener à (D) se confondent : ce sont donc les paramètres des quatre points communs à (C) et à (D). La conique (D) sera complètement déterminée si l'on se donne ses quatre points d'intersection avec (C) et la tangente en l'un d'eux A, c'est-à-dire le point B qui correspond à A sur (C) pourvu toutefois que les deux coniques ne soient pas tangentes en A. Donc :

Une relation doublement quadratique symétrique est complètement déterminée quand on se donne les quatre valeurs *critiques et la valeur de l'autre variable correspondant à l'une d'elles, pourvu que celle-ci soit une valeur critique simple.*

Si l'on se donnait les quatre points d'intersection et une corde de (C) tangente à (D), on trouverait deux coniques (D). Donc :

Il y a deux relations doublement quadratiques symétriques qui admettent quatre valeurs critiques données et un couple de valeurs conjuguées.

Si les coniques (C) et (D) sont bitangentes, les valeurs critiques sont égales deux à deux et la relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre.

6. *Conditions de symétrie.* — Une relation doublement quadratique entre deux variables x et y est symétrique si deux valeurs critiques de x sont respectivement égales à deux valeurs critiques de y et si les valeurs de y qui correspondent aux deux valeurs critiques de x sont respectivement égales aux deux valeurs de x qui correspondent aux deux mêmes valeurs de y.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que, si une relation doublement quadratique est symétrique, elle le restera après qu'on aura fait subir aux deux variables x et y une même transformation homographique. Nous pourrons alors choisir cette transformation de manière que les deux valeurs critiques égales de x et y soient respectivement zéro et l'infini. Dans ces conditions, la relation pourra s'écrire

$$(ax+b)^2y^2+2(mx^2+2nx+p)y+(hx+k)^2=0. \tag{6}$$

Pour y infinie, on a $x=-\frac{b}{a}$, et pour $y=0$ on a $x=-\frac{k}{h}$. Par hypothèse, il faut que pour x infinie les deux valeurs de y soient égales à $-\frac{b}{a}$, et que pour $x=0$ les deux valeurs de y soient égales à $-\frac{k}{h}$. Or, pour x infinie, l'équation (6) se réduit à

$$a^2y^2+2my+h^2=0$$

qui doit être identique à

$$a^2y^2+2aby+b^2=0,$$

ce qui exige

$$m = ab, \qquad h = \pm b.$$

Le signe de h est indifférent puisque, h n'entrant que dans un carré, on peut changer à la fois les signes de h et de k. Nous prendrons donc $h = b$, et la relation deviendra

$$(ax + b)^2 y^2 + 2(abx^2 + 2nx + p)y + (bx + k)^2 = 0.$$

Si maintenant on suppose $x = 0$, on a

$$b^2 y^2 + 2py + k^2 = 0$$

qui, par hypothèse, doit être identique à

$$(hy + k)^2 = 0,$$

et, puisque $h = b$, à

$$b^2 y^2 + 2bky + k^2 = 0,$$

ce qui exige simplement

$$p = bk.$$

Finalement la relation (6) devient

$$(ax + b)^2 y^2 + 2(abx^2 + 2nx + bk)y + (bx + k)^2 = 0$$

ou

$$a^2 x^2 y^2 + 2abxy(x + y) + b^2(x^2 + y^2) + 4nxy + 2bk(x + y) + k^2 = 0$$

qui est en effet symétrique par rapport à x et y.

Comme cas particulier, la relation doublement quadratique est encore symétrique si les deux variables admettent une même valeur critique double, et si les valeurs de l'autre variable qui correspondent à cette valeur critique double sont égales, *pourvu qu'elles soient différentes de la valeur critique double.*

Pour le faire voir, faisons une transformation homographique qui rende infinie la valeur critique double, et nulle la valeur correspondante de l'autre variable. Pour x infinie, on doit avoir deux valeurs nulles de y, et pour y infinie deux valeurs nulles de x; l'équation doit donc être de la forme :

$$x^2 y^2 + axy + bx + cy + h = 0.$$

Si l'on ordonne par rapport à y, on verra que les valeurs critiques de x sont données par l'équation

$$(ax+c)^2-4x^2(bx+h)=0$$

qui n'est que du troisième degré comme cela devait être puisqu'il y a une valeur critique infinie; mais il doit y en avoir une seconde, ce qui exige $b=0$. En ordonnant par rapport à x, on trouverait $c=0$. Il reste une équation du second degré en xy, et la relation se décompose en deux relations homographiques symétriques.

Il reste à examiner le cas où la valeur d'une variable qui correspond à la valeur critique de l'autre serait justement égale à cette valeur critique. Rendons cette valeur infinie par une transformation homographique. Si l'on ordonne l'équation par rapport à x ou y, les coefficients de x^2 ou de y^2 seront des constantes et la relation ne sera pas nécessairement symétrique; mais elle est du second degré en x et y, et les deux variables pourront s'exprimer par des fractions rationnelles du second ordre d'une variable t.

7. *Résultant de deux relations doublement quadratiques symétriques admettant les mêmes valeurs critiques. Il se décompose en deux facteurs symétriques, sauf un cas particulier.* — Considérons deux relations doublement quadratiques, l'une entre y et z, l'autre entre x et z, symétriques l'une et l'autre et admettant les mêmes valeurs critiques qui, à cause de la symétrie, seront les mêmes pour les trois variables. Nous savons déjà que, puisque les valeurs critiques de z sont les mêmes dans les deux équations, l'équation résultante obtenue en éliminant z entre les deux équations données se décompose en deux équations doublement quadratiques, et que chacune d'elles admet les mêmes valeurs critiques de x et de y que les équations données, sauf dans le cas particulier signalé à la fin du n° 3. Finalement, sauf dans ce cas particulier, toutes les valeurs critiques sont égales. Cela donne à penser que les deux équations dans lesquelles se décompose l'équation résultante sont elles-mêmes symétriques. Mais le fait qu'une équation doublement quadratique a les mêmes valeurs critiques pour les deux variables ne suffit pas à prouver qu'elle est symétrique.

Pour établir la proposition qui est en effet exacte, considérons les équations

$$f(y, z) = 0, \qquad g(z, x) = 0,$$

et supposons d'abord que, parmi les quatre valeurs critiques, il y en ait au moins trois différentes. Nous pourrons faire subir aux trois variables une transformation homographique qui rende deux des valeurs critiques l'une nulle et l'autre infinie. Alors l'équation $g = 0$ devra se mettre sous la forme

$$(az + b)^2 x^2 + 2(mz^2 + 2nz + p)x + (hz + k)^2 = 0$$

et la symétrie exigera les conditions

$$m = ab, \qquad b^2 = h^2, \qquad p = hk.$$

Ainsi qu'on l'a fait remarquer au numéro précédent, on peut prendre $b = h$ et écrire la relation

$$(az + b)^2 x^2 + 2(abz^2 + 2nz + bk)x + (bz + k)^2 = 0. \tag{7}$$

Les valeurs critiques de z sont données par l'équation

$$(abz^2 + 2nz + bh)^2 - (az + b)^2 (bz + k)^2 = 0,$$

ou

$$abz^2 + 2nz + bk = \pm (az + b)(bz + k).$$

Si l'on prend le signe $+$ dans le second membre, on trouve $z = 0$ et $z = \infty$; mais si l'on prend le signe $-$ on aura

$$2abz^2 + (2n + ak + b^2)z + 2bk = 0. \tag{8}$$

On peut alors faire subir aux trois variables une nouvelle transformation homographique qui conserve les valeurs nulles et infinies, ce qui équivaut à les multiplier toutes les trois par un même nombre, et l'on peut choisir ce nombre de manière que le produit des deux dernières valeurs critiques données par l'équation (8) soit égal à $+1$. Alors on aura simplement $k = a$, et notre relation doublement quadratique deviendra

$$(az + b)^2 x^2 + 2(abz^2 + 2nz + ab)x + (bz + a)^2 = 0. \tag{9}$$

L'autre, entre z et y, sera de même :

$$(a'z + b')^2 y^2 + 2(a'b'z^2 + 2n'z + a'b')y + (b'z + a')^2 = 0. \tag{10}$$

Les discriminants de ces deux équations ne doivent différer que par un facteur constant; mais, puisqu'on peut multiplier tous les coefficients par un même nombre, on peut supposer ce facteur constant égal à $+1$. Écrivons donc que les deux discriminants sont égaux : celui de l'équation (9) est

$$\begin{aligned}&[(az+b)(bz+a)+abz^2+2nz+ab]\\ \times &[(az+b)(bz+a)-abz^2-2nz-ab]\end{aligned}$$

ou

$$(a^2+b^2-2n)z[2abz^2+(2n+a^2+b^2)z+2ab];$$

celui de l'équation (10) s'obtiendra en accentuant les lettres. Pour qu'il y ait identité, il faudra donc qu'on ait

$$(11)\qquad \begin{aligned}ab(a^2+b^2-2n)&=a'b'(a'^2+b'^2-2n'),\\ \frac{a^2+b^2+2n}{ab}&=\frac{a'^2+b'^2+2n'}{a'b'}.\end{aligned}$$

Cette deuxième condition peut s'écrire

$$a'b'(a^2+b^2+2n)=ab(a'^2+b'^2+2n'),$$

ou encore

$$(12)\qquad a'b'(a^2+b^2)-2abn'=ab(a'^2+b'^2)-2a'b'n.$$

Pour éliminer z entre les deux équations (9) et (10) commençons par éliminer le radical commun ainsi que nous l'avons expliqué à la fin du n° **2**.

Nous aurons, en prenant le radical avec des signes différents :

$$(13)\qquad \begin{aligned}&(az+b)^2x+(a'z+b')^2y\\ &\quad+(ab+a'b')z^2+2(n+n')z+ab+a'b'=0.\end{aligned}$$

On obtiendra l'un des facteurs du résultant en éliminant z entre cette équation et l'une des équations (9) ou (10). D'après ce qu'on a vu au numéro précédent, nous savons déjà que les valeurs critiques qui ne sont pas doubles, et il y en a au moins deux, sont les mêmes dans la nouvelle résultante et dans les équations (9) et (10); il nous reste donc à démontrer que dans cette nouvelle résultante les valeurs de y qui correspondent à deux valeurs critiques de x sont les mêmes que les deux valeurs de x qui correspondent respectivement aux mêmes valeurs critiques de y. Comme la transformation homographique a rendu nulle n'importe laquelle des racines du discriminant, il suffit de faire la démonstration pour cette racine nulle.

Enfin, il est inutile de faire l'élimination; il suffit de montrer que si l'on suppose successivement $x = 0$ et $y = 0$ dans le système des équations (9), (10) et (13), on trouvera dans les deux cas la même valeur soit pour x, soit pour y. Or, si l'on fait $x = 0$ dans l'équation (9), on a

$$z = -\frac{a}{b}.$$

Transportons ces valeurs dans l'équation (13). Il viendra, après disparition du dénominateur,

$$(14) \quad (bb' - aa')^2 y + (ab + a'b')a^2 - 2(n + n')ab + (ab + a'b')b^2 = 0.$$

La valeur de x s'obtiendra de même en faisant $y = 0$ dans l'équation (10). Il faudra permuter dans l'équation (14) les lettres accentuées et les lettres non accentuées. Il suffit donc de vérifier que l'équation (14) est symétrique par rapport à ces deux espèces de lettres. Or, le coefficient de y est déjà symétrique. Quant au terme constant, on peut l'écrire

$$ab(a^2 + b^2 - 2n) + a'b'(a^2 + b^2) - 2abn',$$

et les équations (11) et (12) montrent qu'il n'est pas modifié par l'échange des lettres accentuées ou non.

On serait arrivé évidemment à la même conclusion si l'on avait éliminé le radical commun pris les deux fois avec le même signe.

Supposons maintenant que le discriminant de l'équation $g = 0$ ait une racine triple que nous rendrons infinie, et une racine simple que nous rendrons nulle. Remontons alors à l'équation (8) qui donne les deux racines du discriminant autres que celles qu'on avait rendues nulle et infinie. Il faut maintenant que cette équation (8) ait deux racines infinies, ce qui exige

$$ab = 0, \qquad 2n + ak + b^2 = 0.$$

Si $b = 0$, $2n + ak = 0$, l'équation (8) est vérifiée identiquement, et le discriminant est nul quelle que soit z. Le premier membre de la relation doublement quadratique se réduit donc à un carré parfait, et cette relation à une relation homographique involutive.

Supposons donc

$$a = 0, \qquad 2n = -b^2.$$

La relation (7) devient :

$$b^2x^2 + 2(-b^2z + bk)x + (bz + k)^2 = 0.$$

Comme b n'est pas nulle, on peut tout diviser par b^2 et poser

$$\frac{k}{b} = -a.$$

L'équation sera alors

$$(15) \qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2(z + a)x + (z - a)^2 = 0, \\ \text{et l'autre} \\ y^2 - 2(z + a')y + (z - a')^2 = 0. \end{array}\right.$$

On voit d'abord que, pour x infinie, on a z infinie et, à cause de la seconde équation, y infinie aussi. De même pour y infinie, on aurait x infinie. Mais c'est justement le cas exceptionnel signalé à la fin du n° 6 et qui ne permet pas de conclure à la symétrie. Il faut donc vérifier que les valeurs correspondant à l'autre valeur critique sont égales. Si l'on résout les deux équations (15) l'une par rapport à x, l'autre par rapport à y et qu'on élimine le radical commun, pris avec des signes contraires, on trouvera

$$\sqrt{a'}(x - z - a) + \sqrt{a}(y - z - a') = 0.$$

Pour la valeur critique $x = 0$, la première des équations (15) donne $z = a$, valeur qui transportée dans l'équation précédente donne

$$y = a + a' + 2\sqrt{aa'}.$$

La symétrie de cette formule montre que pour $y = 0$ on aurait trouvé la même valeur de x, ce qui achève la démonstration.

Pour être complet, il convient de signaler le cas où les deux racines du discriminant sont égales deux à deux; mais alors le discriminant est un carré parfait, et les deux relations doublement quadratiques se décomposent chacune en deux relations homographiques symétriques l'une de l'autre. Le résultant se décompose alors en quatre facteurs homographiques symétriques deux à deux.

8. *Cas particulier.* — Il nous reste maintenant à étudier le cas particulier signalé à la fin du n° 3 et dans lequel on ne peut pas conclure que les valeurs critiques de l'équation résultante sont les mêmes que celles des équations données. Ce cas est celui où les deux équations données sont de la forme

$$XZ' - ZX' = 0, \qquad YZ' - ZY' = 0. \tag{16}$$

Le résultant est alors un carré parfait, et l'équation résultante se réduit à

$$XY' - YX' = 0.$$

Seulement ici, chacune des deux équations (16) doit être symétrique par rapport aux deux variables. La première des équations (16) peut s'écrire

$$\frac{X}{X'} = \frac{Z}{Z'} = -\lambda,$$

λ étant un nombre quelconque. A chaque valeur de x correspond une seule valeur de λ donnée par l'équation

$$X + \lambda X' = 0, \tag{17}$$

et à cette valeur de λ deux valeurs de z données par l'équation du second degré

$$Z + \lambda Z' = 0. \tag{18}$$

Pour que la valeur donnée à x soit une valeur critique, il faut et il suffit que l'équation (18) ait ses racines égales. Mais, à chaque valeur de λ correspondent deux valeurs de x. Il y a donc deux valeurs critiques de x qui donnent à λ une valeur rendant carré parfait le premier membre de l'équation (18) et qui conduisent par suite à la même valeur double de z. Donc, aux quatre valeurs critiques de x correspondent seulement deux valeurs doubles de z. Ces deux valeurs doubles ne peuvent être égales. En effet, s'il en était ainsi, ou bien l'équation (18) aurait la même racine double pour deux valeurs différentes de λ, et alors Z et Z' auraient eux-mêmes cette même racine double commune et ne différeraient que par un facteur constant, ou bien les deux valeurs de λ seraient égales. Mais, si l'on développe les trinomes du second degré Z et Z' et qu'on forme le discriminant de l'équation (18), lequel est une fonction du second degré en λ, on verra facilement que ce discriminant ne peut être un carré parfait que si le résultant de Z et Z' est nul, c'est-à-dire si ces deux polynomes ont un facteur du premier degré commun. Alors la première des équations (16) ne serait pas une relation biquadratique proprement dite.

Puisque les deux valeurs doubles de z sont différentes, nous pourrons faire une transformation homographique qui rende l'une nulle et l'autre infinie. La première des équations (16) pourra s'écrire sous la forme

$$\mathrm{A}z^2 + 2\mathrm{B}z + \mathrm{C} = 0,$$

A, B, C étant trois trinomes du second degré par rapport à x, et nous avons vu au n° 3 que l'un de ces trinomes doit être une fonction linéaire et homogène des deux autres. Ni C, ni A ne peuvent être nuls, car, ou bien l'équation contiendrait z en facteur, ou bien elle ne contiendrait pas le carré de z et ne pourrait alors, à cause de la symétrie, contenir le carré de x. Nous pourrons donc supposer que B est une fonction linéaire et homogène de A et de C et écrire

$$\mathrm{A}z^2 + (m\mathrm{A} + n\mathrm{C})z + \mathrm{C} = 0.$$

Pour une certaine valeur critique de x, cette équation doit admettre une valeur double de z égale à zéro et par conséquent se réduire à $z^2 = 0$. Cette valeur critique devra donc annuler C; elle ne peut annuler en même temps A, car les deux trinomes A et C ne doivent pas avoir de facteur commun. Donc il faut que le coefficient m soit nul. Il faut aussi que, pour une autre valeur critique de x, l'équation admette une racine double infinie et se réduise par conséquent à $\mathrm{C} = 0$. Cela exige que le coefficient n soit nul aussi, et alors notre équation devient

$$(ax^2 + 2bx + c)z^2 + (a'x^2 + 2b'x + c') = 0.$$

Pour qu'elle soit symétrique, nous aurons les conditions

$$b = b' = 0, \qquad c = a'.$$

Nous l'écrirons finalement

$$(ax^2 + c)z^2 + cx^2 + h = 0.$$

Enfin, nous pourrons encore multiplier les trois variables par un même nombre et choisir ce nombre de manière que le produit des quatre valeurs critiques de x soit égal à l'unité, ce qui nous donnera $h = a$, et l'équation deviendra

$$(ax^2 + c)z^2 + cx^2 + a = 0.$$

Le polynome Z se réduit à z^2, et le polynome Z′ à une constante. On verra par le même raisonnement que les valeurs de Z, qui correspondent aux valeurs critiques de y dans la seconde des équations (16), sont également données par l'équation (18) lorsque l'on attribue à λ une valeur qui en annule le discriminant. Ce sont donc les mêmes que celles qui correspondent aux valeurs critiques de x : on peut répéter le raisonnement précédent et la seconde des équations (16) sera

$$(a'y^2 + c')z^2 + c'y^2 + h' = 0.$$

Il faut maintenant exprimer que les valeurs critiques sont les mêmes dans les deux équations. Or ces valeurs critiques sont les racines du coefficient de z^2 et du terme constant. Ces polynomes doivent donc être les mêmes chacun à une constante près; mais il est facile de voir que les deux constantes sont égales. On pourra donc les supposer égales à $+1$, de sorte que la seconde des équations (16) sera

$$(ay^2 + c)z^2 + cy^2 + a = 0$$

ou

$$(cy^2 + a)z^2 + ay^2 + c = 0.$$

Dans le premier cas, les deux équations sont identiques, sauf le changement des variables, et la résultante se réduit à

$$x^2 = y^2, \qquad x = \pm y.$$

Dans le second cas, la résultante est

$$x^2y^2 = 1 \qquad \text{ou} \qquad xy = \pm 1.$$

On voit ainsi que les deux relations données sont des relations homographiques involutives entre les *carrés* des variables et que leur résultante se décompose en deux relations homographiques qui sont involutives toutes deux dans le second cas, tandis que dans le premier cas, une seule est involutive, et l'autre définit la transformation identique. On voit aussi qu'il n'y a que deux relations symétriques de la forme indiquée admettant les mêmes valeurs critiques.

II. — Applications géométriques.

9. *Polynomes inscrits à une conique et circonscrits à une autre.* — Soient x et y deux valeurs d'un paramètre servant à représenter d'une manière univoque les points d'une conique (C), A et B les points correspondants aux valeurs respectives de x et y. On sait que, si x et y sont liées par une relation homographique involutive, la droite mobile AB passe par un point fixe, tandis que si x et y sont liées par une relation homographique non involutive, la droite AB enveloppe une conique bitangente à la conique (C); on s'en assure en remarquant que toute droite de l'ensemble coupe la conique (C) en deux points M et N dont l'un correspond à la valeur de x, et l'autre à la valeur de y. Si l'on se donne un point M de la conique, ce point correspond soit à la valeur de x, soit à celle de y. Suivant qu'on choisira l'une ou l'autre correspondance, à ce point M correspondra soit un point N, soit un point N$'$, lesquels seront différents dans le cas général et ne se confondront que dans le cas de l'involution. Dans le cas général, il passera donc par le point M deux droites de l'ensemble, ce qui prouve que la droite MN enveloppe une conique (D). De plus, parmi tous les couples de valeurs de x et y, il y en a deux, et deux seulement pour lesquels $x=y$. Pour chacun de ces couples, les deux points A et B se confondent et la droite AB est tangente à la conique (C); mais en même temps, les deux droites de l'ensemble qu'on peut mener du point A se confondent aussi, ce qui prouve que les deux tangentes menées de A à la conique (D) se confondent, et que par conséquent la droite AB est tangente en A à la fois à la conique (C) et à la conique (D). Comme il en est de même du point A$'$ correspondant à l'autre couple de valeurs égales, les deux coniques sont bien bitangentes.

Si x et y sont liées par une relation doublement quadratique symétrique, nous avons vu au n° 5 que la droite AB enveloppe une conique (D) et que les valeurs critiques de la relation doublement quadratique symétrique définissent les points communs à ces deux coniques. Si deux valeurs critiques sont égales, les deux coniques sont tangentes. Si les valeurs critiques sont égales deux à deux, la relation doublement quadratique se décompose en deux relations homographiques. A cause de la symétrie; il faudra ou que ces deux relations soient symétriques l'une de l'autre, ou qu'elles soient chacune symétrique, c'est-à-dire involutive. Dans le premier cas, on retombe sur la relation homographique dont nous venons de parler, et il convient de remarquer que chacune de ces relations homographiques symétriques l'une de l'autre définit la même conique (D), de sorte que la droite AB enveloppe une conique bitangente à la conique (C). Dans le second cas, chacune des droites AB et AB′ qu'on peut mener par un point A de (C) passe par l'un ou l'autre des deux points fixes; la conique (D) se réduit à ces deux points fixes; mais, quand on déplace le point A d'une manière continue sur la conique (C), l'une des droites pivote autour d'un point fixe, et l'autre autour de l'autre.

Réciproquement, toute conique (D) définit par l'intersection de ses tangentes avec la conique (C) une relation doublement quadratique symétrique entre les paramètres des points de (C).

Enfin, on pourrait faire le raisonnement corrélatif, et mener des tangentes à la conique (C). Le point d'intersection des deux tangentes correspondant aux deux points homologues A et B décrit une conique (E), et les valeurs critiques de x correspondent aux tangentes communes à ces deux coniques.

On déduirait facilement de ce qui précède les propriétés des polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre; mais ce serait répéter à peu de chose près ce qui a été déjà expliqué dans le travail déjà cité [1].

10. *Polygones inscrits à une conique dont les côtés sont tangents à plusieurs coniques faisant, avec la première, partie d'un même faisceau.* — Soient x_1, x_2, x_3, ..., x_n, n valeurs du paramètre servant à définir le point A sur la conique (C). Supposons que ces n valeurs vérifient les $n - 1$ relations doublement

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIII, 1915, p. 146-160.

quadratiques symétriques :

$$f_1(x_1, x_2) = 0, \qquad f_2(x_2, x_3) = 0,$$
$$f_3(x_3, x_4) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_{n-1}(x_{n-1}, x_n) = 0$$

qui toutes ont *les mêmes valeurs critiques*.

Les droites A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ enveloppent chacune une conique, et toutes ces coniques coupent la conique (C) aux quatre mêmes points puisque les valeurs critiques sont les mêmes dans toutes les équations.

Si l'on élimine x_2 entre les deux premières, on sait (n° 7) que l'équation résultante se décomposera en deux relations doublement quadratiques symétriques ayant les mêmes valeurs critiques, sauf toujours le cas particulier du n° 8, dont l'une sera par exemple $g_3(x_1x_3) = 0$. Supposons que ce soit celle-là que vérifie x_3. Éliminons x_3 entre les équations $g_3 = 0$ et $f_3 = 0$; nous trouverons encore deux relations doublement quadratiques dont l'une sera $g_4(x_1, x_4) = 0$.

Si x_3 avait vérifié l'autre équation $g'_3 = 0$, on aurait trouvé entre x_1 et x_4 deux autres relations doublement quadratiques symétriques, soit en tout quatre.

Supposons que x_4 vérifie l'équation $g_4 = 0$ et continuons les éliminations. Finalement nous trouverons que la relation entre x_1 et x_n se décompose en 2^{n-2} relations doublement quadratiques symétriques. On aurait pu faire d'autres éliminations qui, au lieu de conserver la variable x_1, en auraient conservé une autre, de telle sorte qu'on peut conclure que la relation qui lie deux quelconques des n variables se décompose en un certain nombre de relations doublement quadratiques symétriques qui *toutes ont les mêmes valeurs critiques*.

Considérons alors la conique (C) et les $(n-1)$ coniques (D_1), (D_2), (D_3), ..., (D_{n-1}) coupant toutes (C) aux quatre mêmes points. D'un point A_1 pris sur (C), on mène une tangente à (D_1) qui coupe (C) en A_2, puis de A_2 une tangente à (D_2) qui coupe (C) en A_3 et ainsi de suite jusqu'à la tangente à (D_{n-1}) qui coupe (C) en A_n. On peut construire un grand nombre de ces polygones, puisque de chaque point A_i on peut mener deux tangentes à la conique (D_i). Il résulte immédiatement des remarques précédentes que le dernier côté de l'un de ces polygones et toutes les diagonales de l'un quelconque d'entre eux sont tangents à l'une des coniques qui correspondent aux diverses relations doublement quadratiques et symétriques qui résultent des éliminations faites entre les relations doublement quadratiques symétriques définies par les coniques (D_i), et qui toutes font partie d'un même faisceau.

Si l'on choisit un polygone particulier $A_1 A_2 \dots A_n$, et qu'on le déforme d'une manière continue en faisant parcourir au point A_1 la conique (C) le côté $A_1 A_n$ et les diagonales de ce polygone envelopperont chacun une conique appartenant au même faisceau que les coniques (C) et (D_i). C'est le *théorème* de *Poncelet*.

On peut ajouter que, si l'on considère tous les polygones (P) qu'on peut former en partant d'un même point A_1, les derniers côtés de ces polygones enveloppent deux à deux la même conique. En effet, le nombre de ces polygones est 2^{n-1}, puisqu'on peut mener deux tangentes à chacune des coniques (D_i). Or nous avons vu que le nombre des relations doublement quadratiques symétriques entre les paramètres des points extrêmes est seulement de 2^{n-2}. Il faut donc que deux par deux ces côtés extrêmes enveloppent la même conique. Une remarque analogue s'applique évidemment aux diagonales des polygones (P).

Il est bien entendu qu'il peut arriver que certaines des diagonales, ou certains des côtés extrêmes des polygones (P) passent par un même point au lieu d'envelopper une conique. On en trouve un exemple dans les polygones d'un nombre pair de côtés inscrits à une conique et circonscrits à une autre, puisqu'alors les diagonales principales passent par un même point. Un autre exemple sera indiqué plus loin (n° 11).

Il est bien entendu aussi que quelques-unes des coniques (D) peuvent être confondues. Chaque fois que deux *consécutives* de ces coniques sont confondues, le nombre des relations doublement quadratiques et le nombre des polygones qu'on peut former sont chacun réduits de moitié.

Le théorème corrélatif concerne des coniques tangentes à quatre mêmes droites; l'énoncé en est trop facile à former pour que je croie utile de m'y arrêter; mais il y a un cas qui mérite d'être signalé. C'est celui où toutes les coniques (D) se confondent. Alors, le nombre des polygones (P) partant d'un même point se réduit à deux. Le côté extrême et toutes les diagonales enveloppent des coniques faisant partie du même faisceau que (C) et (D), tandis que chacun des points d'intersection de deux côtés quelconques décrit une conique faisant partie du même faisceau tangentiel que (C) et (D).

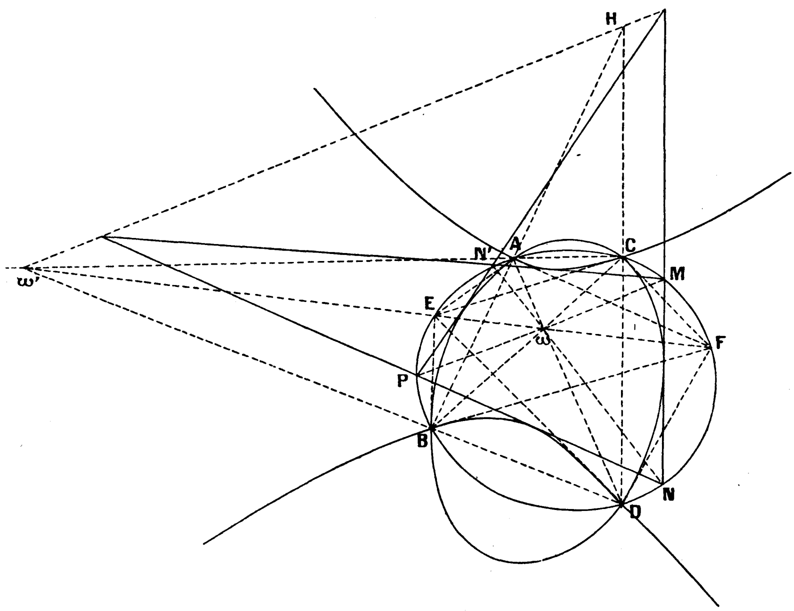
Enfin, il peut arriver que l'enveloppe du côté extrême soit précisément la conique (D). On retrouve alors les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre avec toutes leurs propriétés.

11. *Cas particulier.* — Un cas intéressant est celui où les relations doublement quadratiques symétriques données sont de la forme particulière étudiée au n° 8. Nous avons vu qu'il n'y a que deux relations symétriques de cette forme admettant les mêmes valeurs critiques. Il faudra donc admettre que les relations $f = 0$ se réduisent à deux qui seront répétées chacune un certain nombre de fois et se succéderont dans n'importe quel ordre. Les coniques (D_i) se réduiront à deux, et pour construire les polygones (P) on leur mènera des tangentes à l'une ou à l'autre dans un ordre déterminé. Je me bornerai au cas où l'on ne considère ces deux coniques qu'une seule fois chacune.

Nous avons vu au n° 8 qu'à deux valeurs critiques de x correspond une seule valeur double de z. Or, si l'on suppose que x soit le paramètre du point A et z celui du point B, quand on donne à x une valeur critique, c'est qu'on met le point A en l'un des points d'intersection des coniques (C) et (D), et le point B est l'intersection de la conique (C) avec la tangente en A à (D). La condition algébrique exprime donc que les tangentes à (D) en deux points d'intersection des deux coniques vont se couper sur la conique (C). Les deux autres valeurs critiques de x donnant aussi la même valeur double de z, c'est que les tangentes à (D) aux deux autres points d'intersection des deux coniques vont aussi se couper sur (C). C'est le cas particulier qui a fait l'objet d'un examen spécial et d'une figure dans le travail précédent.

Ici nous avons deux coniques (D) jouissant des mêmes propriétés, et le polygone (P) est un triangle. On peut construire huit de ces triangles à partir d'un point de la conique (C) puisqu'on peut commencer par l'une ou l'autre des coniques (D) et que dans chaque cas on trouve quatre triangles. Nous avons vu à la fin du n° 8 que la résultante des deux équations doublement quadratiques se réduit à des relations homographiques involutives. Donc les troisièmes côtés de quatre des triangles mobiles passeront par un point fixe, et ceux des quatre autres triangles par un autre point fixe. Il est aisé de trouver les positions de ces deux points fixes en construisant le polygone à partir d'un des sommets du faisceau des trois coniques, et l'on obtient le théorème suivant :

Étant données une conique (C) *et deux cordes de cette conique* AB *et* CD *qui se coupent en* H, *on trace la polaire de* H



A, B, C, D sont les points communs aux trois courbes; M, N, P, N', les quatre sommets du quadrilatère situés sur l'une des courbes et dont les côtés sont tangents alternativement aux deux autres.

Parmi les courbes qui se coupent en A, l'une est tangente à EA, une autre à FA, et il y a des conditions analogues aux trois autres points B, C, D.

qui coupe la conique en E *et* F, *et l'on joint les quatre droites* EA, EB, FC, FD, *puis les quatre droites* FA, FB, EC, ED. *Il existe une conique* (D) *tangente aux quatre premières droites aux points respectifs* A, B, C, D, *et une autre* (D') *tangente* *aux mêmes points aux quatre autres droites. D'un point* M *pris sur* (C) *on mène à l'une des coniques* (D) *ou* (D′) *une tangente qui coupe* (C) *en un second point* N, *duquel on mène à l'autre conique* (D′) *ou* (D) *une tangente qui coupe la conique* (C) *en un second point* P. *La droite* MP *passe par l'un des deux sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques autres que le point* H (*voir* la figure).

Nous avons déjà remarqué qu'à partir d'un point M de la conique (C) on pouvait construire huit triangles; mais il est visible que quatre de ces triangles ont le même troisième côté MP puisque P doit être sur l'une des deux droites Mω ou Mω' passant par les sommets du triangle autopolaire autres que le point H.

En assemblant les deux triangles qui ont le troisième côté MP commun, on obtient un quadrilatère dont MP sera l'une des diagonales. En mettant le point M en l'un des quatre sommets du faisceau, on verra quels sont les deux triangles qu'il faut assembler et finalement on pourra donner à l'énoncé du théorème la forme suivante :

Étant données trois coniques qui remplissent les conditions précédentes, on peut tracer une infinité de quadrilatères inscrits à la conique (C) *et ayant leurs côtés alternativement tangents à la conique* (D) *et à la conique* (D′). *Les diagonales de chacun de ces quadrilatères se coupent en l'un des deux points* ω *et* ω' *qui sont avec* H *les trois sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques.*

D'un point M pris sur la conique (C) on peut tracer quatre de ces quadrilatères : deux ont leurs diagonales qui se coupent en ω; les diagonales des deux autres se coupent en ω'.

Enfin, les propriétés très connues des polaires montrent que les côtés opposés de l'un quelconque de ces quadrilatères se coupent sur l'un des deux côtés du triangle autopolaire commun passant par H.

Le théorème corrélatif concerne trois coniques faisant partie d'un même faisceau tangentiel, telles que deux droites joignant les points de contact d'une des coniques (D) ou (D′) avec les côtés opposés du quadrilatère circonscrit commun soient tangentes à la conique (C). Le quadrilatère mobile est circonscrit à la conique (C) et ses sommets sont alternativement sur les coniques (D) et (D′). La conclusion est la même que dans le théorème direct : les diagonales du quadrilatère mobile passent par l'un des sommets du triangle autopolaire commun aux trois coniques, et les côtés opposés de ce quadrilatère se coupent sur les côtés de ce triangle autopolaire opposé à ce sommet.

En particularisant le quadrilatère circonscrit, on obtiendra des théorèmes concernant trois coniques homofocales ou trois paraboles confocales tangentes à une même droite, ces trois coniques satisfaisant toujours aux conditions énoncées.

12. *Extension à l'espace.* — Considérons maintenant $n-1$ quadriques (Q_1), (Q_2), ..., (Q_{n-1}) faisant partie d'un même faisceau, et projetons leur courbe commune sur l'une des faces (P) du tétraèdre autopolaire commun, en prenant pour centre de projection le sommet S de ce tétraèdre opposé à la face (P). Cette projection sera une conique (C) et les contours apparents des quadriques considérées seront des coniques (D_1), (D_2), ..., (D_{n-1}) appartenant toutes, avec (C), à un même faisceau. Toutes les génératrices de l'une de ces quadriques (Q_i) se projettent suivant des droites tangentes au contour apparent correspondant (D_i). Formons alors le polygone gauche suivant : Par un point A_1 de la courbe commune (E), je mène une génératrice de (Q_1) qui coupe cette courbe commune en un second point A_2. De A_2, je mène une génératrice de la quadrique (Q_2) qui coupe (E) en un second point A_3, et ainsi de suite jusqu'au point A_n faisant partie d'une génératrice de (Q_{n-1}). La projection sur le plan (P) du polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ sera un polygone de Poncelet. Donc tous ses côtés et toutes ses diagonales seront tangents à diverses coniques appartenant au même faisceau que (C), (D_1), ... Soit (D_j) l'une de ces coniques et $A_i A_j$ la droite de l'espace dont la projection $a_i a_j$ est tangente à (D_j). Par la conique (D_j) on peut faire passer une quadrique (Q_j) appartenant au même faisceau que les quadriques données et puisque (D_j) est dans le plan (P) qui est l'une des faces du tétraèdre autopolaire commun à toutes les quadriques de faisceau, (D_j) sera le contour apparent de la quadrique (Q_j), vue du sommet S. Du point A_i on ne peut mener que deux droites rencontrant la courbe commune (E) en un second point et se proje-

tant suivant $a_i a_j$ tangente à (D_j), et ces deux droites sont les deux génératrices de la quadrique (Q_j) passant par le point A_i. Donc, la droite $A_i A_j$ est l'une de ces deux génératrices. Si maintenant on déforme le polygone $A_1 A_2 \ldots A_n$ d'une manière continue en faisant décrire au point A_1 la courbe commune (E), on déduira de ce qui précède que le dernier côté de ce polygone et ses diagonales décriront chacun une quadrique appartenant au même faisceau que les quadriques données.

Pour obtenir le théorème corrélatif, on considérera des quadriques appartenant à un même faisceau tangentiel. Dans un plan tangent commun aux quadriques du faisceau on mènera une génératrice de (Q_1), soit (G_1). Par (G_1) on peut mener un second plan tangent à (Q_2), lequel sera aussi tangent à (Q_1) puisqu'il contient (G_1). Dans ce second plan tangent, on pourra mener une génératrice (G_2) de (Q_2) par laquelle on mènera un second plan tangent aux quadriques du faisceau, et ainsi de suite. On forme ainsi un polygone gauche par chaque côté duquel passe un plan tangent commun à toutes les quadriques du faisceau. Ce plan tangent est le plan défini par un des côtés du polygone et le côté suivant. Quand on déforme ce polygone d'une manière continue, en faisant rouler le premier plan tangent sur la développable circonscrite commune, la droite d'intersection de deux quelconques de ces plans décrit une quadrique appartenant au même faisceau tangentiel que les quadriques données.

13. *Théorèmes sur certaines familles de coniques.* — Considérons la famille des coniques qui passent par trois points fixes A, B, C, et qui sont tangentes à une même droite (D), et coupons-les par une droite XY. Si l'on se donne un point M sur cette droite XY, on pourra par ce point M faire passer deux coniques de la famille qui couperont chacune la droite XY en un second point. Au point M correspondront donc sur cette droite deux points N et N′. Si l'on se donne l'un de ces points N ou N′, il lui correspondra de même deux points dont l'un sera évidemment le point M. On voit ainsi que les abscisses des points d'intersection de la droite XY avec les coniques de la famille sont liées par une relation doublement quadratique symétrique.

Soit E le point d'intersection des droites (D) et XY. Les deux coniques de la famille qui passent au point E sont confondues, puisque le point E est sur la tangente (D). Soient F_1, F_2, F_3, les points d'intersection de XY avec chacun des trois côtés du triangle ABC. Le point F_1 étant supposé sur BC, la conique de la famille qui passe par F_1 doit contenir la droite BC, et comme elle doit aussi passer par A et être tangente à (D), elle se compose de la droite BC et de la droite qui joint le point A au point où BC coupe (D). Cette fois encore, les deux coniques se confondent. On voit ainsi que les valeurs critiques de la relation biquadratique sont les abscisses des quatre points E, F_1, F_2, F_3.

Inversement, supposons connue, entre les abscisses des points de XY, une relation doublement quadratique symétrique dont les valeurs critiques seraient les abscisses des quatre points précédents que, pour abréger, j'appellerai *points critiques*. Nous savons que cette relation est complètement déterminée par les quatre points critiques et le point correspondant à l'un d'eux (n° 5). Soit donc E′ le point qui correspond au point critique E. Par les cinq points A, B, C, E, E′ on peut faire passer une conique dont la tangente en E est une droite (D_1). La famille des coniques passant par A, B, C et tangente à (D_1) définit sur la droite XY une relation doublement quadratique symétrique qui est identique à la relation donnée, d'où il suit que toutes les coniques passant par deux points qui se correspondent sur XY et par les trois points A, B, C, sont tangentes à (D_1).

Si l'on se rappelle que les deux racines d'une relation doublement quadratique correspondant à une même valeur d'une des variables sont liées elles-mêmes par une relation doublement quadratique symétrique (n° 4), que la résultante de deux relations doublement quadratiques symétriques se décompose en deux relations doublement quadratiques symétriques, et enfin que toutes ces relations ont les mêmes valeurs critiques, on obtiendra les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés trois points* A, B, C, *et deux droites* (D) *et* XY *qui ne passent ni l'une ni l'autre par aucun de ces trois points, on peut, par un point* M *de* XY, *faire passer deux coniques tangentes à* (D) *et passant par* A, B, C. *Ces coniques coupent* XY *en deux autres points* N *et* N′. *Quand le point* M *parcourt la droite* XY, *la conique passant par les cinq points* A, B, C, N, N' *reste tangente à une droite fixe qui passe par l'intersection* E *des droites* (D) *et* (XY).

2° *Menons par le point* E *une suite de droites* (D), (D_1), (D_2), ..., (D_{n-1}). *Par un point* M *de* XY *faisons passer une conique tangente à* (D) *et passant aussi par les trois points* A, B, C. *Cette conique coupera* XY *en un second point* M_1. *Par* M_1 *et* A, B, C *faisons passer une nouvelle conique tangente cette fois à* (D_1), *laquelle coupera* XY *en* M_2; *par* M_2 *et* A, B, C *faisons passer une conique tangente à* (D_2) *et ainsi de suite, jusqu'au point* M_n. *Enfin par deux quelconques des points* M, M_1, M_2, ..., M_n *et les trois points* A, B, C *faisons passer une dernière conique. Quand le point* M *parcourt la droite* XY, *cette dernière conique reste tangente à une droite fixe passant par* E.

On peut remarquer que le premier théorème, plus simple, est un cas particulier du second qu'on obtient en supposant que les droites (D_i) se réduisent à deux qui coïncident.

Si l'on suppose que deux des trois points A, B, C sont les points cycliques, toutes les coniques précédentes deviennnent des cercles, et les énoncés se simplifient un peu.

Dans le théorème corrélatif que je ne crois pas utile d'énoncer complètement, les trois points sont remplacés par trois tangentes. Si deux de ces tangentes sont des droites isotropes, on a un théorème concernant des coniques confocales qui peut s'énoncer ainsi :

Soient A *un point fixe, une suite de points* B, B_1, B_2, ..., B_{n-1} *alignés sur* A, *un autre point fixe quelconque* F *et une droite fixe* (D). *Je considère une conique* (C) *de foyer* F, *passant par* B, *et tangente à* (D). *Par* A, *on peut mener à cette conique deux tangentes dont l'une sera désignée par* AX_1. *Il existe deux coniques de foyer* F *tangentes à* (D) *et à* AX_1, *et passant par* B_1. *Soient* AX_2 *l'une des tangentes menées de* A *à l'une de ces coniques, puis* AX_3 *l'une des tangentes menées de* A *à l'une des coniques de foyer* F *tangentes à* (D) *et à* AX_2 *et passant par* B_2, *et ainsi de suite. Considérons alors une conique* (G) *de foyer* F *tangente à* D *et à deux quelconques des droites* AX, AX_1,

AX_2, ... *Quand on fait varier la conique* (C), *la conique* (G) *passe par un point fixe situé sur la droite* ABB_1, ..., B_{n-1}.

Si l'on suppose la droite (D) rejetée à l'infini, on aura un théorème concernant des paraboles confocales, plus facile à énoncer.

14. *Théorèmes sur des faisceaux de coniques.* — Considérons maintenant un faisceau tangentiel de coniques et une droite fixe XY. Par un point M de XY, on peut faire passer deux coniques de ce faisceau tangentiel lesquelles coupent XY en deux autres points N et N′, et l'on verra comme précédemment que les points M et N sont liés par une relation doublement quadratique symétrique. Les points critiques de cette relation sont les quatre points d'intersection A_1, A_2, A_3, A_4 de la droite XY avec les quatre côtés du quadrilatère circonscrit à toutes les coniques du faisceau tangentiel, puisque les deux coniques passant par M se confondent quand ce point M est situé sur l'une des quatre tangentes.

Inversement, donnons-nous sur la droite XY une relation doublement quadratique symétrique définie par ses quatre points critiques A_1, A_2, A_3, A_4 et le point A'_1 qui correspond à A_1. Menons par A_2, A_3, A_4 respectivement trois droites fixes A_2X_2, A_3X_3, A_4X_4. Il existe quatre coniques tangentes à ces trois droites et passant par les points A_1 et A'_1. On peut associer aux trois droites précédentes, pour former le faisceau tangentiel, la tangente en A_1 à l'une de ces quatre coniques. On obtient ainsi quatre faisceaux tangentiels qui déterminent sur la droite XY la même relation doublement quadratique symétrique. Si donc M et M′ sont deux points correspondants de cette relation, les quatre coniques passant par M et M′ et tangentes aux trois droites A_2X_2, A_3X_3, A_4X_4 devront faire partie chacune d'un de ces quatre faisceaux; mais si l'on déforme d'une manière continue l'une de ces quatre coniques, elle restera nécessairement comprise dans le même faisceau tangentiel. De là résultent les théorèmes suivants :

1° *Soient une droite fixe* XY, *trois autres droites fixes* (D_1), (D_2), (D_3), *un point fixe* A *sur* XY, *une droite* AZ *passant par* A *et enfin un point mobile* M *sur* XY. *Par* M *on peut faire passer deux coniques tangentes aux quatre droites* (D_1), (D_2), (D_3) *et* AZ, *lesquelles coupent* XY *respectivement en deux* *autres points* N *et* N'. *Par* N *et* N' *on peut faire passer quatre coniques tangentes aux trois droites* (D_1), (D_2), (D_3). *Quand le point* M *parcourt la droite* XY, *chacune de ces coniques reste tangente à une droite fixe passant par* A.

Il y a quatre de ces droites.

2° *Étant donnés toujours la droite* XY, *les trois droites fixes* (D_i) *et le point* A, *menons par le point* A *plusieurs droites* AZ, AZ_1, AZ_2, ... *Par un point* M *de* XY *faisons passer une conique tangente aux quatre droites* AZ, (D_1), (D_2), (D_3), *laquelle coupe* XY *en un second point* M_1. *Par* M_1 *faisons passer une conique tangente aux quatre droites* AZ_1, (D_1), (D_2), (D_3), *laquelle coupe* XY *en un second point* M_2, *et ainsi de suite. Par deux quelconques des points* M, M_1, M_2, ..., *on peut faire passer quatre coniques tangentes aux trois droites* (D_i). *Quand le point* M *parcourt la droite* XY, *chacune de ces coniques, se déformant d'une manière continue, reste tangente à une droite fixe passant par* A.

Ici encore, le premier théorème est un cas particulier du second.

Si l'on suppose que deux des droites (D_i) sont isotropes, on aura un théorème concernant des coniques confocales, et si l'on suppose de plus que la troisième est rejetée à l'infini, on aura un théorème concernant des paraboles confocales.

Dans le théorème corrélatif, qu'il est inutile d'énoncer, la conique variable fera partie d'un faisceau ponctuel; si l'on suppose que deux des droites D_i sont remplacées par les points cycliques, on aura un théorème concernant des cercles. Le cercle variable qui passe déjà par le point fixe D passera par un autre point fixe.

III. — De l'involution multiple.

15. *Définition. Propriétés fondamentales.* — Je dirai que n quantités x_1, x_2, ..., n_n sont liées par une involution n-uple quand deux quelconques d'entre elles vérifient une même équation symétrique

$$f(x, y) = 0 \tag{1}$$

de degré $n - 1$ par rapport à chacune des variables. Si l'on se donne la valeur $x_1 = \alpha$ de l'une d'elles, les valeurs correspondantes des $n-1$ autres seront les $n-1$ racines de l'équation (1) où x sera considérée comme connue, et y comme inconnue. Pour qu'il y ait involution, il ne suffit pas de se donner une équation symétrique telle que l'équation (1). Il faut encore que x ayant été remplacée par α, deux quelconques des racines de l'équation (1) vérifient la même équation. Soient alors α_1 la valeur donnée à x et $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, les $n-1$ racines de l'équation (1). Si l'on donne à x une des valeurs $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$, chacune des autres valeurs, y comprise α_1, mise à la place de y doit vérifier l'équation (1). Comme cette équation n'a que $n-1$ racines, on voit que, quelle que soit la valeur choisie pour x parmi les valeurs α_i, les $n-1$ racines de l'équation seront les $n-1$ autres valeurs α_j. En d'autres termes la valeur de x et les $n-1$ valeurs de y forment un *groupe* de n quantités qui change seulement quand on donne à x une valeur non comprise dans ce groupe. On peut ajouter que deux groupes différents n'ont aucune valeur commune, car si α_i était une de ces valeurs communes, l'équation (1), après qu'on y aurait remplacé x par α_i devrait admettre pour racines les $n-1$ autres valeurs du premier groupe et aussi les $n-1$ autres valeurs du second groupe. Comme elle n'est que du degré $n-1$, il faut que toutes ces racines du second groupe soient respectivement égales à celles du premier, et les deux groupes sont identiques.

On peut former une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre admettant pour racines les n valeurs du groupe. Cette équation contiendra de plus un paramètre λ, puisque le groupe des racines peut changer avec la valeur de x. Or, quand on se donne la valeur de x, les n racines de l'équation sont complètement déterminées. Donc le paramètre λ est aussi complètement déterminé. L'équation considérée doit donc contenir ce paramètre au premier degré et pourra s'écrire :

$$g(x) + \lambda h(x) = 0. \tag{2}$$

C'est ce que nous appellerons un *faisceau* d'équations. Bien entendu, l'un des polynomes g ou h peut être d'un degré inférieur à n, à condition qu'on lui attribue autant de racines infinies qu'il manque d'unités à son degré. Il faut aussi convenir qu'on peut attribuer a λ une valeur infinie pour laquelle l'équation du faisceau se réduit à $h=0$.

Il est bien entendu aussi que les polynomes g et h ne doivent avoir aucun facteur commun ; il en résulte manisfestement que les équations du faisceau qui correspondent à deux valeurs différentes de λ n'ont aucune racine commune, car cette racine commune, si elle existait, annulerait g et h.

Réciproquement, tout faisceau d'équations de degré n définit une involution n-uple, chaque groupe de valeurs des n variables étant constitué par les n racines de l'équation du faisceau obtenue en donnant à n une valeur particulière.

En effet, la relation qui lie deux racines quelconques x_1 et x_2 du faisceau s'obtiendra en éliminant λ entre les deux équations :

$$g(x_1) + \lambda h(x_1) = 0,$$
$$g(x_2) + \lambda h(x_2) = 0,$$

ce qui donne la résultante

$$g(x_1)\, h(x_2) - g(x_2)\, h(x_1) = 0,$$

laquelle sera bien du degré $n-1$ par rapport à chacune des variables après qu'on l'aura débarrassée du facteur évident $x_1 - x_2$.

Si le faisceau d'équations est du second degré, on retombe sur l'involution ordinaire qui, dans notre nomenclature, doit s'appeler l'involution *double*.

16. *Application aux coniques.* — Si x_1 et x_2 sont les paramètres variables de deux points A_1 et A_2 d'une conique, et s'ils sont liés par une relation symétrique de degré $n-1$ par rapport à chacun d'eux, la corde A_1A_2 enveloppera une courbe de la $(n-1)^{\text{ième}}$ classe. Soit en effet A un point d'une conique dont le paramètre est α. Pour avoir une droite de l'ensemble passant par A, il faut donner soit à x_1, soit à x_2 la valeur α et prendre pour valeur de l'autre variable l'une des racines de l'équation (1), chercher le point A' qui correspond à cette racine et le joindre au point A. Cela fait en tout $2(n-1)$ cordes ; mais à cause de la symétrie de l'équation, on obtient les mêmes racines quand on donne la valeur α soit à x_1, soit à x_2 ; toutes les cordes obtenues coïncident donc deux à deux, et il n'y en a que $n-1$ qui passent par le point A, ce qui établit la proposition.

De même si (T_1) et (T_2) sont les tangentes à la conique aux points A_1 et A_2, le lieu du point d'intersection de ces tangentes est une courbe d'ordre $n - 1$.

Considérons alors un faisceau d'équations de degré n. A chaque valeur de λ correspondent n points sur la conique et, par conséquent, un polygone inscrit et un polygone circonscrit, chacun de n côtés. Nous dirons qu'ils forment un *faisceau* de polygones inscrits et un faisceau de polygones circonscrits. Il est évident que chacun de ces faisceaux est complètement déterminé par deux polygones que nous appellerons les *bases* du faisceau.

Appliquons alors les remarques précédentes et observons que les paramètres de deux points qui dépendent de la même valeur de λ vérifient, quelle que soit λ, la même relation involutive : nous trouvons les propositions suivantes :

Tous les côtés et toutes les diagonales de chacun des polygones de n côtés inscrits à une conique et faisant partie d'un même faisceau restent tangents à une même courbe de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ classe.

Tous les sommets et tous les points d'intersection de deux des côtés d'un polygone variable de n côtés circonscrit à une conique et faisant partie d'un même faisceau décrivent une même courbe du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre.

Il en résulte immédiatement que les côtés et les diagonales des deux polygones inscrits servant de base au faisceau, lesquels sont quelconques, sont tangents à une même courbe de la $(n - 1)^{\text{ième}}$ classe. De même les sommets et les points d'intersection des côtés de chacun des deux polygones de n côtés circonscrits à une même conique sont situés sur une même courbe du $(n - 1)^{\text{ième}}$ ordre.

Si $n = 2$, le faisceau des polygones inscrits se réduit à un faisceau de cordes; l'involution est double; ces cordes passent toutes par un même point : c'est le théorème de Frégier avec le théorème corrélatif.

Si $n = 3$, on obtient un faisceau de triangles inscrits en coupant la conique donnée (C) par les diverses coniques d'un faisceau dont l'un des sommets serait sur cette conique (C) elle-même. Réciproquement, soient ABC, A'B'C' deux triangles inscrits quelconques servant de base au faisceau. Marquons sur la conique (C) un point D, et dans le plan un point E non situé sur cette conique. On peut construire deux coniques passant l'une par les cinq points

A, B, C, D, E, l'autre par A$'$, B$'$, C$'$, D, E. Ces deux coniques définissent un faisceau dont les diverses coniques détermineront par leur intersection avec la conique (C) un faisceau de triangles inscrits qui aura bien pour bases les deux triangles primitifs. On en déduit les propositions suivantes :

1° *Si deux triangles sont incrits à une même conique, leurs six côtés sont circonscrits à une autre conique, et corrélativement :*

Si deux triangles sont circonscrits à une même conique, leurs six sommets sont sur une autre conique.

Ces deux propositions très connues sont du reste faciles à démontrer par l'application des théorèmes de Pascal et de Brianchon.

2° *Étant donnée une conique* (C), *si on la coupe par une conique variable faisant partie d'un faisceau dont l'un des sommets est sur* (C), *les trois autres points d'intersection forment un triangle variable qui reste circonscrit à une autre conique.*

3° Théorème corrélatif qu'il est inutile d'énoncer.

4° Réciproquement, *si l'on considère tous les triangles inscrits à une conique et circonscrits à une autre, et si, par les trois sommets du triangle mobile, un point fixe de la conique circonscrite et un point non situé sur cette conique, on fait passer une nouvelle conique, cette dernière conique variable passera constamment par deux autres points fixes.*

5° *Si de plus on construit une conique tangente aux trois côtés du triangle mobile, tangente aussi à une tangente fixe à la conique inscrite et à une autre droite fixe non tangente à la conique inscrite, cette conique variable restera tangente à deux autres droites fixes.*

Ces deux dernières propositions, corrélatives l'une de l'autre, sont aisées à démontrer par l'absurde si l'on observe que le triangle mobile fait bien partie d'un faisceau, puisque les paramètres de deux quelconques de ses sommets vérifient l'équation doublement quadratique symétrique qui exprime que la corde correspondante est tangente à la conique inscrite (n° 5).

Pour $n = 4$, on a un faisceau de quadrilatères qui peut être défini par l'intersection de la conique fixe avec les diverses coniques d'un même faisceau. Les quatre côtés et les deux diagonales du quadrilatère mobile restent tangents à une courbe de la troisième classe; mais il peut se faire que l'équation involutive qui est du troisième degré se décompose en une du second et une du premier. Alors les quatre côtés du quadrilatère restent tangents à une même conique, les deux diagonales passent par un point fixe, et l'on retombe sur un quadrilatère de Poncelet, avec toutes ses propriétés. On obtient alors les théorèmes suivants :

1° *Étant donnés deux quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre, on fait passer, par les quatre sommets de chacun d'eux et un point quelconque du plan, deux coniques qui déterminent un faisceau. Chacune des coniques du faisceau coupe la conique circonscrite en quatre points qui sont les sommets d'un quadrilatère de Poncelet inscrit et circonscrit aux deux coniques primitives.*

2° Corrélativement, *on considère les deux coniques tangentes aux quatre côtés d'un des deux quadrilatères donnés et à une droite fixe. Elles déterminent un faisceau tangentiel. Les tangentes communes à la conique inscrite aux deux quadrilatères et à chacune des coniques de ce faisceau tangentiel sont les quatre côtés d'un polygone de Poncelet inscrit et circonscrit aux deux coniques primitives.*

On peut signaler certains cas particuliers : Si les deux quadrilatères primitifs sont inscriptibles chacun dans un cercle, on obtiendra un faisceau de cercles, et par conséquent tous les quadrilatères du faisceau seront inscriptibles, les cercles circonscrits aux divers quadrilatères étant ceux du faisceau.

Si les deux quadrilatères primitifs peuvent être circonscrits à deux coniques homofocales, le faisceau tangentiel sera celui des coniques homofocales à ces deux-là, chacun des quadrilatères du faisceau sera circonscrit à l'une de ces coniques homofocales.

On peut prendre pour la droite fixe la droite de l'infini, et l'on aura un faisceau tangentiel de paraboles. En particulier, si les deux quadrilatères primitifs peuvent être circonscrits à deux paraboles confocales, tous les autres seront circonscrits aux diverses paraboles confocales du même faisceau tangentiel.

3° Réciproquement, *considérons tous les quadrilatères inscrits à une conique et circonscrits à une autre; par les quatre sommets de chacun d'eux et un point fixe faisons passer une conique. Cette conique variable passe par trois autres points fixes.* Corrélativement, *la conique variable tangente aux quatre côtés du quadrilatère et à une droite fixe reste tangente à trois autres droites fixes.*

D'une manière générale, la suite des polygones de Poncelet de n côtés inscrits à une conique et circonscrits à une autre forme un faisceau, puisque les n sommets sont connus sans ambiguïté dès qu'on se donne l'un d'entre eux. On sait que, dans ce cas, toutes les diagonales du polygone restent tangentes à certaines coniques ou passent par certains points fixes (n° **12**). On se trouve ainsi en présence d'un cas de décomposition remarquable : l'équation involutive (2) se décompose en un certain nombre d'équations qui sont chacune du second ou du premier degré par rapport à chacune des variables.

17. *Cubique gauche.* — On peut supposer que les variables x_1, x_2, ..., x_n sont les paramètres des divers points d'une courbe unicursale quelconque, plane ou gauche, et l'on sera conduit à considérer un faisceau de polygones inscrits à cette courbe unicursale. Peut-être pourrait-on déduire de cette considération des théorèmes plus ou moins intéressants. Je me bornerai à quelques cas particuliers.

Soit un faisceau de triangles inscrits à une cubique gauche (G). On peut réaliser ce faisceau en coupant la cubique par un plan qui tourne autour d'une droite fixe. Réciproquement, quelle que soit l'involution donnée, le plan des trois points passe par une droite fixe. En effet, le faisceau des triangles est complètement déterminé par deux d'entre eux, et il coïncide avec celui que définit un plan mobile tournant autour de l'intersection des plans de ces deux triangles.

Si l'on projette la figure sur un plan quelconque, en prenant pour centre de projection un point quelconque de la cubique (G), celle-ci se projette suivant une conique, et le triangle ABC suivant un triangle *abc* inscrit à cette conique; tous ces triangles *abc* forment un faisceau et sont par conséquent circonscrits à une autre conique. Donc, les trois côtés du triangle ABC sont tangents au cône perspectif qui a cette conique pour base, et l'on obtient le théorème suivant :

Si l'on coupe une cubique gauche par des plans passant par une droite fixe, tous les triangles ainsi obtenus sont circonscrits à une infinité de cônes du second ordre, ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche.

On peut aussi considérer un faisceau de quadrilatères inscrits à la cubique gauche. Les côtés et les diagonales du quadrilatère mobile resteront tangents à une infinité de cônes de la troisième classe ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche.

Pour obtenir un faisceau de quadrilatères, on pourra par exemple marquer deux points sur la cubique et faire passer par ces deux points deux quadriques qui définiront un faisceau de quadriques. Toutes les quadriques de ce faisceau couperont la cubique gauche en quatre autres points qui seront les sommets du quadrilatère mobile.

Il peut arriver que le cône de la troisième classe se décompose en une droite et un cône du second ordre. Dans ce cas, les diagonales du quadrilatère mobile rencontreront la droite fixe et les quatre côtés resteront tangents au cône du second ordre.

On obtient un cas de décomposition en coupant la cubique gauche par deux droites mobiles qui soient les génératrices d'une même quadrique. Ces droites rencontreront en effet toutes les génératrices de la quadrique de l'autre système. En précisant cette idée, on obtient un théorème facile à démontrer d'après ce qui précède :

Étant données deux quadriques (Q_1) *et* (Q_2) *qui ont une génératrice commune, on établit une involution entre les génératrices de* (Q_1) *faisant partie du même système que la génératrice commune. Les deux génératrices d'un même couple coupent la quadrique* (Q_2) *en quatre points formant les sommets d'un quadrilatère gauche dont elles peuvent être considérées comme les diagonales. Les quatre côtés de ce quadrilatère variable restent tangents à une infinité de cônes du* *second ordre ayant pour sommets respectifs les divers points de la cubique gauche commune aux deux quadriques* (Q_1) *et* (Q_2).

18. *Quadriques tangentes.* — Considérons maintenant deux quadriques tangentes en un point A. Elles se coupent suivant une courbe *unicursale* (U) du quatrième ordre, présentant en A un point double. On peut inscrire à cette courbe un faisceau de triangles. Par exemple, on peut la couper par un plan mobile tournant autour d'une droite fixe qui passe par un point de la courbe. Ce plan déterminera trois autres points d'intersection qui seront les sommets du triangle mobile.

Plus généralement, on peut marquer cinq points fixes sur la courbe (U) et faire passer deux quadriques par ces cinq points. Ces deux quadriques déterminent un faisceau de quadriques dont chacune coupe la courbe (U) en trois nouveaux points qui sont les sommets du triangle mobile.

Si l'on projette la courbe (U) sur un plan quelconque en prenant le point double A pour centre de projection, on obtiendra une conique. Alors, en raisonnant comme dans le numéro précédent, on verra que le triangle mobile reste circonscrit à un cône du second ordre ayant le point A pour sommet.

Les côtés et les diagonales des divers quadrilatères faisant partie d'un même faisceau de quadrilatères inscrits dans (U) resteront tangents à un cône de la troisième classe ayant A pour sommet. On peut obtenir un faisceau de quadrilatères plans en coupant la courbe (U) par un plan mobile tournant autour d'une droite fixe quelconque, pourvu que cette droite ne rencontre pas la courbe. On peut aussi marquer quatre points fixes sur (U) et couper cette courbe par toutes les quadriques d'un faisceau dont la courbe commune passerait par ces quatre points.

Enfin, il peut arriver que le cône du troisième ordre se décompose en une droite et un cône du second ordre. Alors les côtés du quadrilatère mobile resteront tangents au cône du second ordre, les diagonales rencontreront la droite fixe, et, puisque sur la projection les côtés opposés se couperont sur une droite fixe, c'est que dans l'espace deux côtés opposés quelconques couperont un certain plan fixe passant par A en deux points alignés sur A. Ce plan fixe sera du reste le plan polaire de la droite fixe par rapport au cône de sommet A passant par (U). En utilisant comme précédemment les génératrices d'une même quadrique pour obtenir un cas de décomposition, on obtient le théorème suivant :

Établissons une involution entre les génératrices d'une semi-quadrique (Q), *et prenons les intersections de deux génératrices conjuguées avec une quadrique* (Q_1) *tangente à* (Q) *en un point* A. *Nous obtenons ainsi un quadrilatère gauche dont les génératrices considérées sont les diagonales. Quand on fait varier ces génératrices, les quatre côtés du quadrilatère variable restent tangents à un même cône du second ordre ayant* A *pour sommet.*

Par le point A passent dans le plan tangent commun aux deux quadriques une génératrice AX de la semi-quadrique (Q) et une génératrice AY de l'autre semi-quadrique portée par la même quadrique. Les diagonales du quadrilatère variable rencontrent AY. Soit (P) le plan polaire de AY par rapport au cône de sommet A passant par l'intersection des deux quadriques. Deux côtés opposés quelconques du quadrilatère variable coupent ce plan (P) en deux points alignés sur A.

Le théorème corrélatif peut s'énoncer de la manière suivante :

Étant toujours données les deux quadriques tangentes et l'involution des génératices de (Q), *on mène par les deux génératrices d'un même couple des plans tangents à* (Q_1). *On obtient ainsi quatre plans formant les faces d'un tétraèdre dont les génératrices considérées sont deux arêtes opposées. Le lieu des points d'intersection des quatre autres arêtes de ce tétraèdre variable avec le plan tangent commun aux deux quadriques est une conique.*