BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur un problème d'algèbre

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 26-30
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__26_1>

Sur un problème d'Algèbre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 10 janvier 1877.)

1. En désignant par S_μ la somme des puissances d'ordre μ des racines, de l'équation de degré n, $f(x) = 0$, on peut se proposer de déterminer le polynôme $f(x)$ connaissant S_1, S_3, ..., S_{2n-1}.

Comme on a ainsi n équations de condition pour déterminer les coefficients du polynôme, il est clair que le problème est généralement déterminé. Il peut se faire néanmoins qu'il y ait une infinité de solutions; car, si l'on satisfait à la question, ce qui, dans certains cas, sera évidemment possible, en prenant pour $f(x)$ un polynôme de *degré inférieur à* n, en désignant par $\varphi(x^2)$ un polynôme quelconque ne renfermant que des puissances paires de x, on y satisfera aussi en remplaçant $f(x)$ par $f(x) + \varphi(x^2)x^m$, les coefficients de $\varphi(x^2)$ et l'exposant m étant du reste arbitraires, pourvu que le degré de l'expression précédente soit égal à n.

2. Pour poser d'une façon plus précise le problème à résoudre, je l'énoncerai ainsi :

Déterminer un polynôme $f(x)$, de degré égal ou inférieur à n, jouissant de la propriété énoncee et tel, que $f(x)$ et $f(-x)$ n'aient aucun facteur commun.

Il est facile alors de démontrer que, si le problème a une solution, le polynôme $f(x)$ est parfaitement déterminé.

A cet effet, posons $f(-x)=\varphi(x)$; d'après ce que je viens de dire, la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ sera irréductible. Soient de plus $a, b, c, \ldots$ les racines de l'équation $f(x)=0$, on aura évidemment

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum\frac{1}{x+a}-\sum\frac{1}{x-a}=\sum\frac{-2a}{x^2-a^2}$$
$$=-\frac{2S_1}{x^2}-\frac{2S_3}{x^4}-\ldots-\frac{2S_{2n-1}}{x^{2n}}+\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right),$$

l'expression $\left(\frac{1}{x^m}\right)$ désignant, en général, sans que je me préoccupe des valeurs des coefficients, une série développée suivant les puissances de $\frac{1}{x}$ et commençant par un terme d'un degré au plus égal à $-m$.

En intégrant l'équation précédente entre les limites x et ∞, il viendra

$$\log\frac{\varphi(x)}{f(x)}=2\left[\frac{S_1}{x}+\frac{S_3}{3x^3}+\ldots+\frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}}\right]+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

ou en posant, pour abréger,

$$W=\frac{S_1}{x}+\frac{S_3}{3x^3}+\ldots+\frac{S_{2n-1}}{(2n-1)x^{2n-1}};$$

et en passant des logarithmes aux nombres,

$$e^{2W}=\frac{\varphi(x)}{f(x)}+\left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right). \tag{1}$$

3. La détermination du polynôme $f(x)$ est donc ramenée à la question suivante :

Déterminer une fraction rationnelle irréductible dont le dénominateur et le numérateur soient d'un degré au plus égal à n, et qui soit égale au développement de e^{2W}, en négligeant les termes d'un ordre supérieur à celui de $\frac{1}{x^{2n}}$. Il faut, en outre, qu'en désignant par $f(x)$ ce dénominateur, le numérateur de la fraction soit égal à $f(-x)$; mais, comme je le ferai voir, il n'y a pas à se préoccuper de cette condition, qui sera satisfaite d'elle-même si la première condition est remplie.

Je démontrerai d'abord qu'il ne peut exister qu'un seul polynôme $f(x)$ qui y satisfasse; en effet, si $f_1(x)$ était une autre solution, on aurait évidemment

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} - \frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où

$$\varphi(x) f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = f(x) f_1(x) \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

relation évidemment impossible, à moins que le premier membre ne soit nul; car c'est un polynôme entier en x, tandis que le second membre (s'il n'est pas nul) se développe suivant une série commençant par un terme en $\frac{1}{x}$, puisque chacun des polynômes $f(x)$ et $f_1(x)$ est d'un degré au plus égal à n.

La relation précédente ne peut donc avoir lieu que si l'on a

$$\varphi(x) f_1(x) - f(x)\varphi_1(x) = 0,$$

ou encore

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

et, si l'on suppose ces fractions irréductibles, $f_1(x)$ ne doit différer que par un facteur constant de $f(x)$.

Ce polynôme n'étant pas d'ailleurs, par hypothèse, divisible par x, on peut supposer que le terme constant qui y entre est égal à l'unité; il est alors complétement déterminé.

4. Cela posé, il est facile de prouver que, la fraction irréductible $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ ayant été déterminée par la condition ci-dessus énoncée, $\varphi(x)$ est égal à $f(-x)$.

En effet, W ne renfermant que des puissances impaires de x, en changeant x en $-x$ dans l'équation (1), il viendra

$$e^{-2\mathrm{W}} = e^{\frac{1}{2\mathrm{W}}} = \frac{\varphi(-x)}{f(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right),$$

d'où, par une transformation facile,

$$e^{2\mathrm{W}} = \frac{f(-x)}{\varphi(-x)} + \left(\frac{1}{x^{2n+1}}\right);$$

le polynôme $\varphi(-x)$, d'après ce que je viens d'établir, ne peut différer que par un facteur constant de $f(x)$; d'ailleurs, e^{2W}, pour $x=0$, se réduit à l'unité; donc le premier terme de $\varphi(-x)$ est aussi l'unité et, par suite,

$$\varphi(-x)=f(x).$$

5. Le problème est donc entièrement ramené à trouver un polynôme $f(x)$, de degré au plus égal à n, et satisfaisant à l'équation (1); mais on peut supposer que $f(x)$ soit effectivement de degré n, en faisant abstraction de la condition imposée jusqu'ici, à savoir que $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont premiers entre eux.

Effectivement, si $f(x)$ était d'un degré $m<n$, il suffirait de multiplier les deux termes de la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ par un polynôme arbitraire de degré $(n-m)$ pour obtenir une fraction satisfaisant à la relation (1) et dont le dénominateur soit du degré n.

Nous poserons donc $f(x)=1+ax+bx^2+\ldots+lx^n$; $a, b, \ldots, l$ désignant n coefficients indéterminés, et nous exprimerons que le produit $e^{2W}f(x)$ manque des termes en $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots, \frac{1}{x^n}$; nous aurons ainsi, pour déterminer les n coefficients inconnus, n équations linéaires avec second membre.

Généralement, le déterminant de ces équations étant différent de zéro, elles fourniront pour les coefficients des valeurs bien déterminées; le polynôme $f(x)$ sera donc effectivement du degré n.

Si le déterminant est nul, il se peut que le problème n'ait pas de solution; s'il y en a une infinité, on déterminera l'un quelconque des polynômes $f(x)$ satisfaisant aux équations, et l'on en déduira le numérateur correspondant $\varphi(x)$; on réduira ensuite la fraction $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ à sa plus simple expression : le dénominateur de la fraction irréductible ainsi obtenue sera la solution cherchée, et son degré sera inférieur à n.

6. Il est clair que l'on peut remplacer l'expression e^{2W} par toute autre expression dont le développement coïnciderait avec elle jusqu'aux termes de l'ordre de $\frac{1}{x^{2n}}$ inclusivement.

Ainsi, si l'on développe en fraction continue l'expression $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^m$, où m désigne un nombre quelconque, et si l'on forme la réduite dont le dénominateur $f(x)$ est de degré n, les racines de l'équation $f(x) = 0$ jouiront de la propriété que les sommes $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$ soient toutes égales à m.

7. Les résultats obtenus dans cette Note peuvent s'énoncer ainsi :

Les coefficients d'un polynôme de degré n s'expriment rationnellement en fonction des fonctions symétriques $S_1, S_3, \ldots, S_{2n-1}$ des racines de l'équation $f(x) = 0$. C'est ce qu'il est facile du reste de vérifier au moyen des formules de Newton, au moins pour de petites valeurs du nombre n.