BULLETIN DE LA S. M. F.

P. LÉVY

Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 35-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__35_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LA VARIATION DE LA DISTRIBUTION DE L'ÉLECTRICITÉ SUR UN CONDUCTEUR DONT LA SURFACE SE DÉFORME ;

Par M. Paul Lévy.

1. On sait les services que peut rendre, pour l'étude de certaines fonctions de lignes ou de surfaces, la détermination de leurs dérivées fonctionnelles. Cette méthode a été introduite dans la Physique mathématique par M. Hadamard, qui a déterminé les dérivées fonctionnelles des fonctions de Green, et en a déduit des inégalités fort importantes pour l'étude de ces fonctions.

L'objet du Chapitre I du présent Mémoire est d'appliquer la même méthode à l'étude de la distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur. Dans le Chapitre II nous étudierons le problème correspondant de géométrie plane, et dans le Chapitre III nous étudierons au point de vue de leur intégrabilité les équations aux dérivées fonctionnelles formées dans le Chapitre II.

CHAPITRE I.

ÉTUDE DU PROBLÈME DANS L'ESPACE.

2. Bien que la solution du problème de la distribution de l'électricité, lorsqu'on connaît la fonction de Green, soit bien connue, nous allons reprendre la question de manière à obtenir les formules fondamentales sous la forme la plus commode pour la suite.

Nous considérerons le cas de deux conducteurs en présence, limités par des surfaces S et S'. On n'ajouterait aucune circonstance essentiellement nouvelle en augmentant le nombre des conducteurs.

Nous désignerons par g_B^A la fonction de Green relative au problème extérieur de Dirichlet, c'est-à-dire au problème de déterminer une fonction harmonique $f(A)$ du point A, connaissant ses valeurs sur les surfaces S et S', et sachant qu'elle est régulière à l'extérieur de ces surfaces et s'annule à l'infini. Ce problème est résolu par la formule

$$(1)\qquad f(\mathrm{A}) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn} f(\mathrm{M})\, d\mathrm{S},$$

l'intégrale étant prise sur l'ensemble des surfaces S et S′, M désignant le point de ces surfaces correspondant à l'élément dS, et le sens positif sur la normale à chacune de ces surfaces étant dirigé vers l'extérieur.

Lorsque les surfaces S et S′ se déforment, le déplacement de chaque point M, compté normalement à ces surfaces, étant désigné par δn, et les points A et B étant des points fixes extérieurs à ces surfaces, la variation de $g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ est donnée par la formule connue

$$(2)\qquad \delta g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}\frac{dg_{\mathrm{B}}^{\mathrm{M}}}{dn}\,\delta n\, d\mathrm{S},$$

l'intégrale étant étendue à l'ensemble des surfaces S et S′, ou bien seulement, ce qui revient au même, aux portions de ces surfaces qui se déforment effectivement.

3. Ceci posé, soit à résoudre le problème de la distribution de l'électricité sur les surfaces S et S′.

Supposons en premier lieu que le potentiel soit égal à 1 sur la surface S et à zéro sur la surface S′. La formule (1) nous montre qu'en un point quelconque A extérieur à ces deux surfaces, il a la valeur

$$(3)\qquad \mathrm{U_A} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}\, d\mathrm{S}.$$

En appelant x une des coordonnées du point A, on obtient par dérivation de l'expression précédente la composante X de la force électrique dans le sens de l'axe des x,

$$(4)\qquad \mathrm{X} = -\frac{\partial \mathrm{U_A}}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathrm{S}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}\right) d\mathrm{S}.$$

La fonction $g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$, et par suite sa dérivée par rapport à x, étant une fonction harmonique de B, on ne change pas la valeur de l'intégrale en remplaçant la surface S par une surface Σ entourant S et extérieure à S′. Cela est vrai, même si l'on ne peut pas amener S sur Σ par une déformation continue sans qu'à un certain moment la surface considérée contienne le point A. En effet, g_B^A est la somme de $\frac{1}{r}$ et d'une fonction régulière, sauf lorsque A et B sont voisins d'un même point des surfaces S ou S′. Il en résulte que l'intégrale analogue à l'intégrale (3), mais prise sur la surface Σ, est discontinue, quand A traverse la surface Σ, à la manière d'un potentiel de double couche de densité constante, et par suite que toutes ses dérivées sont continues. Donc le fait que, pendant la déformation de Σ, le point A vienne à traverser cette surface, n'empêche pas que l'intégrale analogue à l'expression (4), mais prise sur Σ, reste constante.

Cette remarque permet d'appliquer la formule (4), non seulement pour avoir la force électrique en un point de S′, mais même, à condition de remplacer S par Σ, en un point de S, et d'avoir en particulier, par un choix convenable de la direction de l'axe des x, la force électrique normale à la surface; il s'agit, bien entendu, non de la force à laquelle sont soumises les masses électriques situées sur cette surface, mais de la force à laquelle serait soumise une masse électrique extérieure au moment où elle atteindrait un point P de cette surface. On sait d'autre part que cette force a la valeur $4\pi\sigma_P$, σ_P désignant la densité électrique en P. On a donc, que P soit sur S ou sur S′,

$$\sigma_P = -\frac{1}{16\pi^2}\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P}\, d\Sigma, \tag{5}$$

$\frac{d}{dn}$ et $\frac{d}{dn_P}$ désignant respectivement les dérivées normales à Σ en M et à S ou S′ en P [1]. Si P est sur S′, on peut prendre pour Σ la surface S. Si P est sur S, il faut que Σ entoure P.

Par une nouvelle intégration, on en déduit les quantités totales d'électricité I et J situées respectivement sur S et sur S′. On a ainsi

$$I = -\frac{1}{16\pi^2}\int_S \int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P}\, dS\, d\Sigma, \tag{6}$$

---

[1] Nous désignerons de même par $\frac{d}{dn_1}$ ou $\frac{d}{dn'}$ des dérivées normales en des points appelés M_1 ou M'; et nous écrirons dans la suite σ sans indice au lieu de σ_M; cela simplifiera les formules, la lettre M étant celle qui y reviendrait le plus souvent.

ou, par une nouvelle application des mêmes remarques,

$$(7)\qquad I = -\frac{1}{16\pi^2}\int_{\Sigma}\int_{\Sigma_1}\frac{d^2 g_{M_1}^{M}}{dn\,dn_1}\,d\Sigma\,d\Sigma_1,$$

Σ et Σ_1 désignant deux surfaces entourant S, extérieures à S', sans point commun entre elles, décrites respectivement par les points M et M_1. De même on a

$$(8)\qquad J = -\frac{1}{16\pi^2}\int_{\Sigma}\int_{\Sigma'}\frac{d^2 g_{M'}^{M}}{dn\,dn'}\,d\Sigma\,d\Sigma',$$

Σ' étant une surface entourant S' et extérieure à Σ, décrite par le point M'. Dans cette formule, on peut remplacer Σ par S et Σ' par S'.

4. Le potentiel U_A, défini par les valeurs 1 sur S et zéro sur S' et à l'infini, est partout, à l'extérieur de S et S', compris entre 0 et 1.

Il en résulte que, pour un point partant de la surface S, il commence par décroître. Donc la force électrique normale est positive en chaque point de cette surface, et par suite la densité σ_P et la charge électrique totale I sont positives.

On voit de même qu'en chaque point de la surface S' la densité σ_P est négative, et que la charge électrique totale J située sur cette surface est négative. Cela résulte aussi des formules (5) et (8), en prenant S et S' comme surfaces d'intégration.

Pour un point s'éloignant à l'infini, le potentiel est positif et tend vers zéro; il doit donc en moyenne décroître, ce qui conduit à penser que le flux de force sortant d'une sphère de rayon très grand est positif. On peut l'établir rigoureusement. Ce flux a la valeur

$$4\pi(I+J) = -R^2\int\frac{dU}{dn}\,d\omega,$$

l'intégrale étant prise à la surface de la sphère considérée, et $d\omega$ désignant l'angle solide sous lequel chaque élément de cette surface est vu du centre de la sphère. Considérant une série de sphères concentriques, entourant toutes S et S', et dont les rayons varient de R_1 à R_2; multiplions les deux membres de l'égalité précédente par $\frac{dR}{R^2}$ et intégrons de R_1 à R_2. Il vient

$$4\pi(I + J)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\int d\omega \int_{R_1}^{R_2} \frac{dU}{dn} dR = \int (U_1 - U_2)\, d\omega,$$

U_1 et U_2 désignant les valeurs du potentiel sur les deux sphères considérées en des points situés sur un même rayon.

R_1 restant fixe, faisons croître indéfiniment R_2. U_2 tend uniformément vers zéro, et l'on a à la limite

$$\frac{4\pi(I + J)}{R_1} = \int U_1 d\omega,$$

ce qui montre bien que $I + J$ est positif. En d'autres termes, J est en valeur absolue inférieur à I.

5. On étudie de même le cas où le potentiel est égal à zéro sur S et à 1 sur S'. Il suffit, dans les résultats précédents, de permuter le rôle des surfaces S et S'. On trouve ainsi que la densité électrique a la valeur

$$\sigma'_P = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{\Sigma'} \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P} d\Sigma', \tag{9}$$

Σ' étant une surface entourant S', qui peut se confondre avec S' dans le cas où P est sur S. Cette densité est positive sur S' et négative sur S.

La charge électrique totale sur S a la valeur J obtenue dans le cas précédent pour la charge sur S', tandis que la charge sur S' a la valeur

$$I' = -\frac{1}{16\pi^2} \int_{S'} \int_{\Sigma'} \frac{d^2 g_P^M}{dn\, dn_P} dS'\, d\Sigma', \tag{10}$$

M et P décrivant respectivement les surfaces Σ' et S'; la surface S' peut être remplacée dans cette intégrale par une surface Σ'_1 comprise entre S' et Σ'.

L'intégrale I' est, comme I, positive et supérieure à J en valeur absolue.

6. Si enfin on suppose le potentiel égal à U sur la surface S et à U' sur la surface S' (U et U' étant des constantes), on déduit de

la forme linéaire de toutes les opérations qui permettent de passer du potentiel à la distribution de l'électricité par la méthode du n° 3, que les charges électriques Q et Q' des surfaces S et S' ont les valeurs

$$(11)\qquad \begin{cases} Q = IU + J\,U', \\ Q' = JU + I'U'. \end{cases}$$

Le déterminant

$$\Delta = II' - J^2$$

de ces équations est positif, puisque I et I' sont positifs et supérieurs à J en valeur absolue. On peut donc les résoudre par rapport à U et U',

$$(12)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{I'}{\Delta}Q - \dfrac{J}{\Delta}Q' = \dfrac{Q}{I_1} + \dfrac{Q'}{J_1}, \\ U' = -\dfrac{J}{\Delta}Q + \dfrac{I}{\Delta}Q' = \dfrac{Q}{J_1} + \dfrac{Q'}{I'_1}, \end{cases}$$

en posant

$$(13)\qquad \begin{cases} I_1 = \dfrac{\Delta}{I'} = I' - \dfrac{J^2}{I'}, \\ J_1 = -\dfrac{\Delta}{J} = J - \dfrac{II'}{J}, \\ I'_1 = \dfrac{\Delta}{I} = I' - \dfrac{J^2}{I}. \end{cases}$$

Il en résulte que la méthode employée au n° 3 permet de connaître la distribution de l'électricité, non seulement lorsqu'on se donne U et U', mais aussi lorsqu'on se donne Q et Q'; il suffit, dans ce cas, de commencer par en déduire U et U' par les formules (13).

Dans le cas d'un conducteur isolé, on appelle *capacité* le rapport de la charge électrique au potentiel. Dans le cas qui nous occupe, on voit que la notion de capacité a besoin d'être précisée, ce rapport n'étant pas constant; il y a lieu de mettre en évidence soit les coefficients I, J, I' des relations (11), soit les coefficients I_1, J_1, I'_1 des relations (12). Nous considérerons surtout les premiers, qui sont plus simples, et appellerons les coefficients I et I' *capacité* des surfaces S et S', et J *coefficient d'influence mutuelle* de ces deux surfaces.

Variation des intégrales I, I′ et J.

7. En raison du rôle symétrique joué dans ce qui précède par les surfaces S et S′, il suffit de considérer le cas d'une déformation de la surface S. Comme nous l'avons indiqué à propos de la formule (2), nous supposerons cette déformation définie en chaque point par la donnée du déplacement normal δn.

Considérons d'abord l'intégrale I, que nous prendrons sous la forme (7), les surfaces Σ et Σ_1 étant supposées fixes pendant que la surface S se déforme. La variation de I ne provient alors que de ce que la fonction de Green varie, sa variation étant donnée par la formule (2); en appliquant cette formule, la lettre M figurant déjà dans la formule (7), nous appellerons P au lieu de M le point qui décrit la surface S. Il vient ainsi

$$\begin{aligned}\delta \mathrm{I} &= \frac{1}{64\pi^3}\int_{\Sigma}\int_{\Sigma_1}\int_{S}\frac{d^2 g_{\mathrm{P}}^{\mathrm{M}}}{dn\, dn_{\mathrm{P}}}\,\frac{d^2 g_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{P}}}{dn_1\, dn_{\mathrm{P}}}\,\delta n_{\mathrm{P}}\, d\mathrm{S}\, d\Sigma\, d\Sigma_1\\ &= \frac{1}{64\pi^3}\int_{S}\left[\int_{\Sigma}\frac{d^2 g_{\mathrm{P}}^{\mathrm{M}}}{dn\, dn_{\mathrm{P}}}\, d\Sigma\right]\left[\int_{\Sigma_1}\frac{d^2 g_{\mathrm{M}_1}^{\mathrm{P}}}{dn_1\, dn_{\mathrm{P}}}\, d\Sigma_1\right]\delta n_{\mathrm{P}}\, d\mathrm{S},\end{aligned}$$

ou, en tenant compte de la formule (5) et écrivant de nouveau M au lieu de P,

$$\delta \mathrm{I} = 4\pi\int_{S}\sigma^2\,\delta n\, d\mathrm{S}. \tag{14}$$

On obtient de même les variations de J et de I′ :

$$\delta \mathrm{J} = 4\pi\int_{S}\sigma\sigma'\,\delta n\, d\mathrm{S}, \tag{15}$$

$$\delta \mathrm{I}' = 4\pi\int_{S}\sigma'^2\,\delta n\, d\mathrm{S}. \tag{16}$$

Les mêmes formules s'appliquent lorsque les surfaces S et S′ se déforment toutes les deux, les intégrales qui y figurent devant seulement être étendues à l'ensemble des deux surfaces.

Inégalités résultant des formules précédentes.

8. Considérons une déformation des surfaces S et S′ pour laquelle δn ne soit nulle part négatif, c'est-à-dire pour laquelle

chacune des surfaces déformées entoure la surface primitive correspondante. Il résulte des formules (14), (15) et (16), et des remarques des nos 4 et 5 sur les signes des quantités σ, σ' et J, que

$$(17) \qquad \delta I > 0, \quad \delta I' > 0, \quad \delta J < 0, \quad \delta |J| > 0.$$

Donc *les capacités électriques des surfaces* S *et* S' *et leur coefficient d'influence mutuelle augmentent en valeur absolue si l'une ou l'autre de ces surfaces se déforme de manière que la surface déformée entoure la surface primitive.*

Il résulte en outre, des formules du n° 7 et des inégalités de Schwarz, que

$$(18) \qquad \delta I\, \delta I' - \delta J^2 > 0.$$

La variation de Δ s'écrit

$$\delta\Delta = I\,\delta I' + I'\,\delta I - 2J\,\delta J.$$

Le produit $J\,\Delta J$ est inférieur à la moyenne géométrique des deux premiers termes [en raison de l'inégalité (18) et du fait que J soit inférieur en valeur absolue à I et I']; il l'est donc *a fortiori* à leur moyenne arithmétique, et ces deux termes déterminent le signe de $\delta\Delta$, qui est donc positif :

$$(19) \qquad \delta\Delta > 0.$$

Des formules (13) résulte que

$$\delta I_1 = \frac{I'^2\,\delta I - 2I'J\,\delta J + J^2\,\delta I'}{I'^2},$$

$$\delta I'_1 = \frac{I^2\,\delta I' - 2IJ\,\delta J + J^2\,\delta I}{I^2}.$$

Les numérateurs de ces expressions sont des polynomes du second degré en J à racines imaginaires, d'après l'inégalité (18), et coefficients extrêmes positifs. On a donc

$$(20) \qquad \delta I_1 > 0, \quad \delta I'_1 > 0.$$

Variation de σ et σ'.

9. Calculons d'abord la variation de la densité

$$\sigma_A = -\frac{1}{16\pi^2}\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^A}{dn_A\, dn_P}\, d\Sigma$$

(le point P décrivant la surface Σ) en un point A de la surface S′, pendant une déformation n'altérant que la surface S. Tenant compte de la formule (2), il vient

$$(21)\qquad \delta\sigma_A = \frac{1}{64\pi^3}\int_\Sigma\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,\delta n\,dS\,d\Sigma$$
$$= \frac{1}{64\pi^3}\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\left[\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^M}{dn\,dn_P}\,d\Sigma\right]\delta n\,dS,$$

ou, en tenant compte de la formule (5),

$$(22)\qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,\sigma\,\delta n\,dS.$$

Ce calcul s'applique encore, et par suite la formule finale reste exacte, pour un point A d'une quelconque des surfaces S et S′ et pour une déformation de ces surfaces *n'altérant pas la région voisine de* P, l'intégration devant seulement être étendue à l'ensemble des surfaces S et S′.

10. Si cette condition n'est pas remplie, le calcul devient plus compliqué. Supposons d'abord que A soit sur S et que cette surface se déforme seule.

1° Il faut tenir compte de ce que A varie quand la surface S se déforme; nous définirons parfaitement le déplacement de ce point en le supposant normal à la surface; il a alors la valeur δn_A (valeur de δn quand M vient en A).

Il en résulte dans la variation de σ_A le terme

$$-\frac{1}{16\pi^2}\,\delta n_A\int_\Sigma \frac{d^3 g_P^A}{dn_A^2\,dn_P}\,d\Sigma.$$

Or, du fait que $\dfrac{dg_P^A}{dn_P}$ soit une fonction de A harmonique et s'annulant sur la surface S, résulte que, K_A désignant la courbure moyenne de la surface en A,

$$\frac{d^3 g_P^A}{dn_A^2\,dn_P} = K_A\,\frac{d^2 g_P^A}{dn_A\,dn_P}.$$

Le terme considéré s'écrit donc

$$(23)\qquad -\frac{1}{16\pi^2}K_A\,\delta n_A\int_\Sigma \frac{d^2 g_P^A}{dn_A\,dn_P}\,d\Sigma = K_A\sigma_A\,\delta n_A.$$

2° Il faut tenir compte de ce que la direction de la normale à la surface en A, qui intervient dans le symbole $\frac{d}{dn_A}$, varie. La fonction $\frac{dg_P^A}{dn_P}$ s'annulant quand A vient sur la surface S, on voit aisément que cette circonstance, qui paraît devoir intervenir, est en réalité sans influence sur la variation de σ_A.

3° La variation de forme de la fonction $\frac{d^2 g_P^A}{dn_A\,dn_P}$ (indépendamment de la variation des arguments de cette fonction) n'est donnée par la formule (2) dérivée que pour un point A extérieur aux surfaces S et S', ou pour un point de ces surfaces dans le voisinage duquel δn soit nul. Si A est sur la surface S et que δn n'y soit pas nul, la fonction intégrée dans la formule (23) est infiniment grande du troisième ordre quand M vient en A (la distance AM étant prise comme infiniment petit du premier ordre); l'intégrale considérée est donc dépourvue de sens.

Pour avoir la variation cherchée, il faut remplacer A par un point B de la normale en A extérieur à la surface, former la variation de $\frac{d^2 g_P^B}{dn_A\,dn_P}$, puis faire tendre B vers A ([1]). Tenant compte du terme calculé ci-dessus [formule (23)], il vient

$$(24)\qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi}\lim_{B\to A}\int_S \frac{d^2 g_M^B}{dn\,dn_A}\,\sigma\,\delta n\,dS + K_A\sigma_A\,\delta n_A.$$

Cette expression se réduit à l'expression (22) lorsque δn s'annule en A ainsi que ses dérivées premières; dans ce cas en effet les fonctions intégrées dans les différentes formules écrites ne sont plus que des infiniment grands du premier ordre, et cela n'empêche pas les intégrales de surfaces considérées d'être absolument

(1) Nous écrivons dn_A et non dn_B pour indiquer que la direction considérée, bien qu'il s'agisse d'une fonction du point B, est celle de la normale à la surface en A.

et uniformément convergentes, de sorte qu'il n'y a aucune difficulté sur la légimité des calculs.

Dans le cas général, nous pourrons trouver une expression plus commode de $\delta\sigma_A$. Remplaçons d'abord $\sigma\delta n$ par

$$\sigma_A \delta n_A + (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A).$$

L'intégrale obtenue en considérant le premier terme se calcule sans difficulté. En nous reportant à la formule (4), dans laquelle nous pouvons supposer l'axe des x parallèle à la normale à la surface S en A, nous voyons que le coefficient de $\sigma_A \delta n_A$ n'est autre que la valeur de X en B. Quand B tend vers A il tend vers $4\pi\sigma_A$. Donc

$$(25) \quad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi}\lim_{B \to A}\int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A}(\sigma\delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS + 4\pi\sigma_A^2 \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Introduisons maintenant la notion de *valeur principale d'une intégrale*. Divisons la surface S en deux régions, S_1 et S_2, cette dernière voisine de A et se projetant sur le plan tangent en A à l'intérieur d'un cercle de centre A et de rayon R, la première comprenant le reste de la surface. Si la fonction intégrée devient infinie en A, nous appellerons « valeur principale d'une intégrale prise sur la surface S » la limite, si elle existe, de l'intégrale prise sur la région S_1 lorsque R tend vers zéro.

Il est facile d'établir que

$$(26) \qquad \int_{S_1} \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A}(\sigma\delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS$$

tend vers zéro avec R, et cela uniformément quel que soit le point B voisin de A sur la normale à la surface. Cela résulte de ce que la fonction intégrée, étant un infiniment grand d'ordre 2 au plus, prend en deux points dont les projections sur le plan tangent en A sont symétriques par rapport à A des valeurs égales et de signes contraires à un infiniment grand près d'ordre 1. La somme de deux éléments correspondants de l'intégrale a donc une limite supérieure de la forme

$$\frac{C}{\overline{BM}}\, dy\, dz < \frac{C}{\overline{AM}}\, dy\, dz,$$

y et z étant des coordonnées rectangulaires dans le plan tangent en A, et C une constante positive. Cela conduit, pour l'intégrale (26), à la limite supérieure πCR, valable quel que soit le point B sur la normale en A.

En nous donnant une quantité très petite ε, choisissons R de manière que

$$\pi C R \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Les régions S_1 et S_2 étant ainsi bien déterminées, il est évident que pour B assez près de A, la différence

$$\int_{S_1} \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS$$

est inférieure en valeur absolue à $\frac{\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\left| \int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS \right| \leq \varepsilon$$

et, par suite,

$$\left| \lim_{B \to A} \int_S \frac{d^2 g_B^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS - \int_{S_1} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS \right| \leq \varepsilon.$$

Cette différence, qui ne dépend plus de B, tend donc vers zéro avec R. Il en résulte que la formule (25) peut s'écrire

$$(27) \qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi} \text{val.pr.} \int_S \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A) dS + 4\pi \sigma_A^2 \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Bien entendu, si la surface S′ se déforme en même temps que S, il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$(27') \qquad -\frac{1}{4\pi} \int_{S'} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} \sigma \delta n\, dS.$$

11. On traiterait de même le cas où le point A est sur la surface S′. En supposant d'abord que la surface S′ se déforme seule, il vient

$$(28) \qquad \delta\sigma_A = -\frac{1}{4\pi} \text{val.pr.} \int_{S'} \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A} (\sigma \delta n - \sigma_A \delta n_A)\, dS + 4\pi \sigma_A \sigma'_A \delta n_A + K_A \sigma_A \delta n_A.$$

Si la surface S se déforme en même temps que S′, il faut ajouter à l'expression précédente le terme

$$(28') \qquad -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}\, \sigma\, \delta n\, dS.$$

La variation de σ'_A se déduit des formules précédentes en permutant le rôle des surfaces S et S′.

Il est aisé de déduire de ces formules une nouvelle démonstration des formules du n° 7. Pour l'intégrale I, par exemple, on a

$$I = \int_S \sigma_A\, dS_A,$$

d'où

$$\delta I = \int_S (\delta\sigma_A\, dS_A + \sigma_A\, \delta\, dS_A) = \int_S (\delta\sigma_A - K_A \sigma_A\, \delta n_A)\, dS_A.$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier qu'en remplaçant $\delta\sigma_A$ par sa valeur déduite des formules (27 et (27′), on retrouve bien la formule (14).

Inégalités résultant de la formule (22).

12. La formule (22), qui donne la variation de σ_A lorsque δn s'annule au point A et dans son voisinage, peut être appliquée dans quatre cas distincts :

1° La déformation portant sur une partie de la surface S et A étant sur le reste de la surface;

2° La déformation portant sur tout ou partie de la surface S et A étant sur la surface S′;

3° La déformation portant sur tout ou partie de la surface S′ et A étant sur la surface S;

4° La déformation portant sur une partie de la surface S′ et A étant sur le reste de la surface.

En supposant comme au n° 8 que δn ne soit jamais négatif, il résulte immédiatement de la formule (22) et des résultats du n° 4 sur le signe de la densité σ, que l'on a :

Pour le premier cas :

$$\delta\sigma_A < 0, \qquad \delta|\sigma_A| < 0;$$

pour le deuxième cas :

$$\delta\sigma_A < 0, \qquad \delta\,|\sigma_A| > 0;$$

pour le troisième cas :

$$\delta\sigma_A > 0, \qquad \delta\,|\sigma_A| > 0;$$

pour le quatrième cas :

$$\delta\sigma_A > 0, \qquad \delta\,|\sigma_A| < 0.$$

On aurait de même des inégalités analogues pour la densité σ'.

On peut résumer ces inégalités en disant que toute déformation portant sur une des deux surfaces et la remplaçant par une surface déformée qui ne soit nulle part intérieure à la surface primitive, et pendant laquelle les quantités d'électricité réparties sur les surfaces sont modifiées de manière à laisser le potentiel constant sur une des surfaces et constamment nul sur l'autre, la densité électrique augmente partout en valeur absolue sur celle des surfaces qui ne se déforme pas et diminue partout en valeur absolue sur les parties de la surface déformée qui ne sont pas atteintes par la déformation.

La dernière partie de cet énoncé s'applique en particulier au cas d'une surface unique.

Dans ce cas, pour la déformation considérée pour laquelle δn est nul en certains points et positif en d'autres, mais n'est nulle part négatif, mais en nous plaçant maintenant dans l'hypothèse que la charge électrique soit égale à l'unité et non plus le potentiel, il est intuitif, en raison de la propriété de l'électricité de se porter vers les parties saillantes des conducteurs, que l'électricité se porte vers les parties de la surface qui se déforment, et qu'en conséquence sa densité diminue sur le reste de la surface.

Cela revient à dire que sur ces parties

$$\delta\mu < 0,$$

en appelant μ la densité électrique dans cette nouvelle hypothèse.

Non seulement cette inégalité résulte d'une manière rigoureuse de ce qui précède, mais nous en déduisons même une inégalité d'où elle résultera *a fortiori*.

En effet, on a évidemment

$$\sigma = I\mu$$

et, par suite,

$$-\frac{\delta\mu}{\mu} = \frac{\delta I}{I} - \frac{\delta\sigma}{\sigma} > \frac{\delta I}{I} > 0,$$

puisque $\delta\sigma$, dans le cas considéré, est négatif, et que δI est positif.

CHAPITRE II.

ÉTUDE DU PROBLÈME DANS LE PLAN.

Formules générales concernant la distribution sur une courbe fermée d'une simple couche donnant lieu à un potentiel constant à l'intérieur.

13. On sait l'analogie presque absolue qui existe entre les théories relatives au problème de Dirichlet intérieur dans le cas de l'espace et dans le cas du plan, à condition de remplacer, quand on passe de l'espace au plan, le potentiel newtonien $\frac{1}{r}$ par le potentiel logarithmique $\log\frac{1}{r}$.

Pour le problème de Dirichlet extérieur, l'analogie est grande également, mais il y a une différence essentielle qu'il faut commencer par rappeler : dans l'espace, pour définir une fonction harmonique régulière à l'extérieur d'une surface S et à l'infini, il faut se donner ses valeurs sur la surface S et sa valeur à l'infini; dans le plan, au contraire, pour définir une fonction harmonique régulière à l'extérieur d'une courbe fermée C et à l'infini, il suffit de se donner ses valeurs sur la courbe C; elle est alors définie par la formule

$$f(\mathrm{A}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn} f(\mathrm{M})\,ds, \tag{29}$$

$g_{\mathrm{B}}^{\mathrm{A}}$ désignant la fonction de Green relative au problème considéré, et a à l'infini une valeur bien déterminée, la fonction $\frac{dg_{\mathrm{M}}^{\mathrm{A}}}{dn}$ ayant aussi une limite bien déterminée quand, le point M restant fixe sur la courbe C, A s'éloigne à l'infini.

La raison de cette différence se comprend aisément quand on observe qu'à l'aide d'une transformation par inversion on peut passer de la solution du problème intérieur à celle du problème extérieur. D'une manière générale, dans l'espace à p dimensions, une fonction harmonique donne, après inversion, une fonction dont le produit par $\frac{1}{r^{p-2}}$ est harmonique (r désignant la distance au centre d'inversion O), c'est-à-dire que, A et A′ étant les deux points qui se correspondent, et si l'on pose

$$f(A') = \varphi(A),$$

les fonctions $f(A')$ et $\frac{1}{\overline{OA}^{p-2}}\varphi(A)$ sont en même temps harmoniques.

A l'ensemble des fonctions $f(A')$ harmoniques et régulières à l'intérieur d'une courbe C′, dans le cas du plan, correspond donc l'ensemble des fonctions $\varphi(A)$ harmoniques et régulières à l'extérieur de la courbe inverse C et à l'infini. Au contraire, dans l'espace, à l'ensemble des fonctions $f(A')$ harmoniques et régulières à l'intérieur d'une surface S′, correspond l'ensemble des fonctions $\frac{1}{\overline{OA}}\varphi(A)$, harmoniques et régulières à l'extérieur de la surface inverse S *et s'annulant à l'infini* comme un potentiel. Cette différence explique bien la circonstance signalée plus haut.

Rappelons encore que la formule (29), dans le cas où la fonction f se réduit à une constante, donne la relation

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\,ds, \tag{30}$$

qu'on peut appliquer en particulier lorsque le point A est à l'infini. Dans l'espace, l'intégrale correspondante ne serait pas constante, mais s'annulerait à l'infini.

14. Si nous abordons l'étude des fonctions représentables à l'extérieur par un potentiel de simple couche, nous trouvons (à l'inverse de ce qui a lieu dans l'espace) que l'ensemble de ces fonctions ne coïncide pas avec celui des fonctions représentables par l'intégrale (29).

En effet, une fonction devenant infinie à l'infini peut être représentable par un potentiel de simple couche, à condition que la différence entre cette fonction et $C\log\frac{1}{r}$ (C désignant une constante convenable et r la distance à un point fixe), non seulement reste finie, mais même s'annule à l'infini.

Il en résulte que le potentiel résultant d'une couche qui donne à l'intérieur un potentiel constant ne peut être défini à l'extérieur par la formule (29) et que la méthode du n° 3 ne s'applique pas ici.

Nous désignerons par σ la densité d'une pareille couche si le potentiel constant à l'intérieur est égal à l'unité, et nous la désignerons par μ si c'est la masse totale qui est égale à l'unité. Il est évident que, comme nous l'avons déjà écrit au n° **12** pour le problème de l'espace,

$$\sigma = \mathrm{I}\mu, \tag{31}$$

I désignant toujours la capacité (rapport de la masse au potentiel, rapport bien défini dans le cas, que nous considérerons surtout, d'une courbe fermée unique).

Considérons deux courbes homothétiques C et C′, et soit k le rapport d'homothétie de la première à la seconde. Les valeurs de $\mu\,ds$ pour des éléments correspondants de ces courbes sont les mêmes, et il en résulte aisément qu'il y a entre les potentiels à l'intérieur la relation

$$\mathrm{U} - \mathrm{U}' = \frac{1}{\mathrm{I}} - \frac{1}{\mathrm{I}'} = \log\frac{1}{k}.$$

Si donc on considère une famille de courbes homothétiques croissantes, la capacité, d'abord très petite, augmente et devient infinie pour une des courbes, puis prend des valeurs négatives, d'abord très grandes en valeur absolue, puis décroissant en valeur absolue pour tendre vers zéro quand k devient très grand.

Pour la courbe à capacité infinie (par exemple pour la circonférence de rayon 1), il existe une couche de densité non nulle donnant à l'intérieur un potentiel nul, et il n'existe aucune couche donnant à l'intérieur un potentiel constant non nul. Pour cette courbe, d'une manière générale, le problème de déterminer une couche donnant à l'intérieur un potentiel égal à une fonction harmonique donnée est soumis à une condition de possibilité, et si cette condition est remplie la solution est indéterminée.

15. Montrons maintenant comment les quantités μ, σ, I se rattachent à la fonction de Green par des formules plus simples que dans le cas de l'espace.

Nous appellerons r la distance AB et ρ la distance MB, M étant un point de la courbe C.

Considérons la fonction

$$(32) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\log\frac{1}{\rho}\,ds,$$

qui, d'après la formule (29), est une fonction harmonique du point A, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, prenant sur C la valeur $\log\frac{1}{r}$. Pour distinguer nettement les cas où B est soit à l'extérieur, soit à l'intérieur de la courbe C, nous l'appellerons h_B^A dans le premier cas et H_B^A dans le second; le point A sera toujours extérieur à C ou à la limite sur cette courbe.

On a, par définition même de la fonction de Green,

$$g_B^A = \log\frac{1}{r} - h_B^A;$$

les propriétés de cette fonction sont bien connues.

Posons de même

$$(33) \qquad G_B^A = \log\frac{1}{r} - H_B^A.$$

La différence

$$G_B^A - G_{B'}^A,$$

B et B′ étant deux points intérieurs à C, est une fonction de A, harmonique, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, et nulle sur C. Elle est donc nulle, et nous pouvons écrire

$$(34) \qquad G_B^A = G_{B'}^A = G(A),$$

et par suite, en tenant compte de la formule (33),

$$H_B^A - H_{B'}^A = \log\frac{r'}{r}.$$

Si le point A s'éloigne à l'infini, le second membre tend vers zéro. Donc H_B^A, dont nous savons déjà qu'il tend vers une limite, tend vers une limite H indépendante de B.

L'expression (32), le point A étant à l'infini, et considérée comme fonction de B, est un potentiel de simple couche; d'après ce qui précède, il a à l'intérieur de C une valeur constante H, et d'après la formule (30) la masse totale est égale à l'unité. La densité de cette couche est donc la densité μ que nous nous proposions de déterminer, et l'on a

$$(35)\qquad \left\{ \begin{aligned} \mu &= \frac{1}{2\pi} \frac{dg_{M}^{\infty}}{dn}, \\ I &= \frac{1}{H}, \\ \sigma &= I\mu = \frac{\mu}{H}, \end{aligned} \right.$$

et le potentiel résultant de la couche de densité μ a à l'extérieur la valeur h_{B}^{∞} que nous écrirons plus simplement $h(B)$.

Le problème posé est donc résolu; quelques remarques seront encore utiles.

La fonction

$$G(A) + H = \log\frac{1}{r} - H_{B}^{A} + H$$

est une fonction harmonique de A, égale sur C à H, et dont la différence avec $\log\frac{1}{r}$ est nulle à l'infini; elle nous donne donc une nouvelle expression du potentiel $h(A)$

$$(36)\qquad G(A) + H = h(A).$$

En observant que la force normale en un point A, situé sur la normale en M, et tendant vers M, tend vers $2\pi\mu$, on a

$$(37)\qquad 2\pi\mu = -\frac{d\,G(M)}{dn} = -\frac{dG_{B}^{M}}{dn},$$

ce qui nous donne une nouvelle expression de μ.

Variation de I.

16. La courbe C se déformant, nous appellerons C′ la courbe déformée, et G′ et H′ les fonctions analogues à G et H relatives à C′. La déformation de la courbe C sera définie par la donnée en chaque point du déplacement normal δn.

D'après les formules (33) et (34), on a

$$(38)\qquad \delta G(A) = G'(A) - G(A) = H_B^A - H'^A_B = -\delta H_B^A.$$

Cette variation est évidemment une fonction harmonique de A, régulière à l'extérieur de C et à l'infini, et prenant sur C la valeur

$$-\frac{dG(M)}{dn}\delta n.$$

La formule (29) nous donne alors

$$(39)\qquad \delta G(A) = -\delta H_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\frac{dG(M)}{dn}\delta n\, ds.$$

Supposant le point A à l'infini, et tenant compte des formules (35) et (37), il vient

$$(40)\qquad \delta H = -2\pi\int_C \mu^2\,\delta n\, ds$$

et

$$(41)\qquad \delta I = 2\pi\int_C \sigma^2\,\delta n\, ds.$$

On remarque l'analogie absolue de cette formule et de la formule (14) obtenue dans le cas de l'espace, analogie que laissait peu prévoir la différence entre les formules du n° **15** pour définir I et les formules du n° **3** obtenues dans le cas du plan.

Il résulte aussi des différentes formules écrites que μ est positif et que, comme dans le cas du plan, δI est positif si δn est partout positif ou nul. Mais, à cause de la discontinuité de I, nous ne pouvons plus affirmer que I est plus grand pour la courbe enveloppante que pour la courbe enveloppée; la quantité inverse H n'étant pas discontinue, ce que nous pouvons affirmer c'est que H est plus petit, algébriquement, pour la courbe enveloppante que pour la courbe enveloppée.

Variation de μ.

17. Cette variation résulte des formules (37) et (39). En supposant d'abord que A soit un point de la courbe C dans le voisinage duquel δn soit nul, ou au moins où cette quantité soit infiniment petite du second ordre, il vient

$$\delta\mu_A = \frac{1}{4\pi^2}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\frac{d\,G(M)}{dn}\delta n\,ds$$

ou encore

$$(42) \qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\mu\,\delta n\,ds.$$

Cette formule est analogue à la formule (22). La formule qui donnerait la variation de σ, facile à déduire de celles qui donnent les variations de I et de μ, serait un peu plus compliquée.

On voit ainsi, malgré l'analogie des formules (14) et (41), que les formules analogues à celles qui donnent les variations de I et de σ dans l'espace s'obtiennent, dans le cas du plan, non en considérant les quantités I et σ, mais les quantités H et μ.

Cela n'est pas très surprenant si l'on constate que, des deux manières, en quelque sorte inverses, de poser le problème de la détermination d'une couche donnant à l'intérieur un potentiel constant, soit en se donnant la valeur de ce potentiel, soit en se donnant la masse totale, c'est la première qui paraît la plus simple dans le cas de l'espace, et c'est au contraire la seconde dans le cas du plan.

Nous pouvons étendre la formule (42), comme nous l'avons fait pour la formule (22), au cas où δn est quelconque. La seule différence essentielle provient de ce que l'intégrale

$$(43) \qquad \int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}\,ds$$

est nulle, à cause de la formule (30); l'intégrale correspondante, dans le cas de l'espace, prend la valeur $4\pi\sigma_A$ lorsque A tend vers un point de la surface S, et il en résultait dans les formules (25) et (27) le terme $4\pi\sigma_A^2\,\delta n_A$. Dans le plan le terme correspondant est nul. En faisant le calcul, on trouve successivement les formules

$$(44) \qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to A}\int_C \frac{d^2 g_M^B}{dn\,dn_A}\mu\,\delta n\,ds + k_A\,\mu_A\,\delta n_A$$

et

$$(45) \qquad \delta\mu_A = -\frac{1}{2\pi}\,\text{val. pr.}\int_C \frac{d^2 g_M^A}{dn\,dn_A}(\mu\,\delta n - \mu_A\,\delta n_A)\,ds + k_A\,\mu_A\,\delta n_A,$$

k_A désignant la courbure de la courbe C en A.

De cette expression, on peut, à titre de vérification, déduire la variation de l'intégrale

$$\int_C \mu\, ds = 1,$$

variation qui doit évidemment être nulle. En faisant le calcul, et en le comparant à celui qui a été indiqué à la fin du n° **11**, on s'explique bien pourquoi le terme $4\pi\sigma_A^2\,\delta n_A$, qui figure dans la formule (27) et conduit dans l'intégration au seul terme non nul dans l'expression de δI, ne se retrouve pas dans la formule (45), qui donne la variation de μ, et non de σ.

Comme dans le cas de l'espace, si nous considérons une déformation pour laquelle δn soit partout positif ou nul, la formule (42) nous montre que $\delta\mu$ est négatif dans les régions de la courbe où δn est nul. Mais nous ne pouvons pas affirmer, comme dans le cas de l'espace, que $\delta\sigma$ soit négatif. Du moins cela ne paraît pas résulter simplement des formules écrites.

CHAPITRE III.

L'INTÉGRABILITÉ DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES FONCTIONNELLES DU CHAPITRE II.

Énoncé du problème traité.

18. La variation de la fonction de Green est, comme on sait, donnée par la formule

$$(46)\qquad \delta g_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{dg_M^A}{dn}\,\frac{dg_B^M}{dn}\,\delta n\, ds.$$

Les équations (46), (44) et (40) sont ce qu'on appelle des *équations aux dérivées fonctionnelles*. Les fonctions g_B^A, μ, et la quantité H, sont entièrement déterminées par ces équations, et par leurs valeurs pour un contour particulier C_0, puisque, le contour se déformant d'une manière continue, elles définissent à chaque instant les variations de ces quantités.

Il peut être intéressant de chercher si ce système de trois équations admet d'autres solutions, que nous désignerions par Φ_B^A, u et $\mathcal{H}$, et si même il existe des solutions prenant pour le contour C_0 des valeurs arbitrairement données.

Malgré l'analogie de ces équations et des équations différentielles, cela n'est pas certain *a priori*, car les expressions de $\delta\Phi_B^A$, δu et $\delta\mathcal{H}$ qui résultent de ces équations peuvent n'être pas des *différentielles exactes*, de sorte que les valeurs de ces fonctions trouvées pour un contour C peuvent dépendre du mode de déformation du contour entre C_0 et C. C'est même *a priori* la circonstance qui paraît le plus vraisemblable, et en général il n'existe pas de solution d'une équation aux dérivées fonctionnelles prenant pour un contour particulier une valeur quelconque. En d'autres termes, les équations pour lesquelles il existe des solutions prenant pour le contour C_0 des valeurs arbitrairement données, équations qui sont dites *complètement intégrables*, sont une exception.

Mais les problèmes de physique mathématique conduisent souvent à des équations complètement intégrables, ce qui s'explique par le fait que le problème qui conduit à une équation met souvent en évidence une infinité de solutions de cette équation, et souvent le degré de généralité des solutions ainsi obtenues est suffisant pour constituer l'intégrale générale d'une équation complètement intégrable.

Le système que nous nous proposons d'étudier se présente sous une forme particulièrement simple, l'équation (46) ne contenant que la fonction de Green, l'équation (44) introduisant ensuite la fonction μ et l'équation (40) la quantité H.

Nous pouvons donc étudier successivement ces trois équations. En ce qui concerne l'équation (46), nous l'avons déjà étudiée dans notre Thèse [1], et nous allons d'abord rappeler les résultats obtenus.

Intégrabilité de l'équation (46).

19. En remplaçant g_B^A par la fonction inconnue Φ_B^A, cette équation s'écrit

$$(47)\qquad \delta\Phi_B^A = -\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d\Phi_M^A}{dn}\,\frac{d\Phi_B^M}{dn}\,\delta n\,ds.$$

Observons d'abord que cette équation est vérifiée, lorsque la

[1] Paris, 1911, et *Journal de l'École Polytechnique*, 1912 (*voir* nos 30 et 32).

courbe C se déforme, non seulement par la fonction de Green relative à toute la région du plan extérieure à cette courbe, mais par la fonction de Green relative à la région extérieure à cette courbe et à une autre courbe fixe C'. Cette solution présente un assez grand degré de généralité.

Quelle que soit la courbe C', la solution considérée est une fonction harmonique, s'annulant lorsqu'un des points dont elle dépend vient sur la courbe C, et symétrique par rapport à ces deux points. La solution générale de l'équation (47) est beaucoup plus générale; mais cette équation n'est pas complètement intégrable, et des conditions doivent êtres imposées à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A pour un contour particulier, pour qu'à cette valeur corresponde une solution de l'équation (47).

La forme de ces conditions dépend essentiellement des singularités de la fonction Φ_B^A. Dans notre Thèse nous avons étudié deux cas :

1° Le cas d'une fonction sans singularité lorsque les deux points A et B sont dans le voisinage du contour C;

2° Le cas d'une fonction de la forme

$$\Phi_B^A = g_B^A + \varphi_B^A, \tag{48}$$

φ_B^A étant une fonction sans singularité lorsque les deux points A et B sont dans le voisinage du contour C.

Dans le premier cas, la condition à imposer à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A, pour qu'à cette valeur corresponde une solution de l'équation (47), est que cette fonction soit :

ou une fonction d'un seul des points A et B;

ou une fonction de $x + iy$ et $x_1 - iy_1$, x et y désignant les coordonnées d'un des points A et B, x_1 et y_1 celles de l'autre.

Dans le deuxième cas, la condition à imposer à la valeur initiale de la fonction Φ_B^A est que

$$\frac{d\Phi_M^A}{ds} = \frac{d\Phi_A^M}{ds} = 0, \tag{49}$$

M désignant un point du contour et s la valeur de la longueur d'arc en ce point. Cela revient à dire que Φ_M^A et Φ_A^M ne dépendent que de A, et non du point M du contour.

Cette deuxième catégorie de solutions est évidemment plus intéressante au point de vue des relations entre l'équation (47) et les problèmes de physique mathématique. Nous ne considérerons dans la suite que ces solutions, de sorte que Φ_B^A sera une solution de l'équation (47), qui, pour un contour quelconque, sera de la forme (48), et vérifiera les conditions (49).

20. En remplaçant g_B^A par Φ_B^A et μ par la fonction inconnue u, l'équation (44) s'écrit

$$(50)\qquad \delta u_A = -\frac{1}{2\pi}\lim_{B\to A}\int_C \frac{d^2\Phi_M^B}{dn\,dn_A}\,u\,\delta n\,ds + k_A u_A\,\delta n_A.$$

On remarque dans cette formule que la fonction Φ n'intervient que par les valeurs *sur le contour* de la dérivée normale

$$(51)\qquad \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A};$$

on le voit nettement en remarquant que l'intégrale de la formule (50) peut s'écrire

$$\lim_{B\to A}\int_C \frac{d^2 g_B^M}{dn\,dn_A}\,u\,\delta n\,ds + \int_C \frac{d^2(\Phi_A^M - g_A^M)}{dn\,dn_A}\,u\,\delta n\,ds.$$

Dans ces conditions, afin de ne pas faire intervenir dans l'étude de l'équation (50) la fonction Φ_B^A, mais seulement l'expression (51), il y a lieu d'examiner si, sans faire intervenir d'autres renseignements concernant la fonction Φ_B^A, on peut définir la variation de cette expression lorsque le contour se déforme.

Distinguons dans ce but, lorsque M et A sont sur le contour, les variations

$$\delta\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$$

et

$$\delta_1\,\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A},$$

la première de ces notations étant relative au cas où l'on considère que, la courbe C se déformant, les points A et M restent fixes et les directions dn et dn_A également, tandis que la seconde est relative au cas où A et M restent sur la courbe C pendant que cette courbe se déforme, en décrivant une trajectoire orthogonale à cette courbe, et où dn et dn_A désignent les éléments des normales en M et A à la courbe déformée (¹).

Les relations (49) entraînent comme conséquence que $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ ne varie pas pour une rotation infiniment petite, à partir de leur position initiale, des directions dn et dn_A. La différence entre les variations δ et δ_1 est donc donnée par la formule

$$(52)\qquad \delta_1 \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} + \frac{d^3\Phi_A^M}{dn^2\,dn_A}\delta n + \frac{d^3\Phi_A^M}{dn\,dn_A^2}\delta n_A .$$

Or de l'équation (47) il résulte immédiatement que la variation δ est parfaitement définie par la donnée des valeurs initiales de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$; cette équation donne en effet, en tenant compte aussi de la formule (48),

$$(53)\qquad \delta \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta \frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A} - \frac{1}{2\pi}\lim_{P\to M}\int_C \frac{d^2 g_{M'}^P}{dn\,dn'}\,\frac{d^2\varphi_A^{M'}}{dn'\,dn_A}\,\delta n'\,ds'$$
$$- \frac{1}{2\pi}\lim_{B\to A}\int_C \frac{d^2\varphi_{M'}^M}{dn\,dn'}\,\frac{d^2 g_B^{M'}}{dn\,dn_A}\,\delta n'\,ds'$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{d^2\varphi_{M'}^M}{dn\,dn'}\,\frac{d^2\varphi_A^{M'}}{dn'\,dn_A}\,\delta n'\,ds',$$

et, g_B^A étant supposé connue, cela revient au même de se donner $\frac{d^2\varphi_A^M}{dn\,dn_A}$ ou $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$.

Dans le cas où Φ_B^A est une fonction harmonique des points A et B,

---

(¹) Nous aurions pu déjà introduire cette distinction dans les chapitres précédents et en particulier au n° 9. Mais cela n'était pas indispensable, car aucune ambiguïté n'était à craindre. Il est bien évident que, lorsque nous parlions de la variation de σ ou de μ, il ne pouvait s'agir que de la variation que nous désignons maintenant par le symbole δ_1.

il résulte des conditions (49) que

$$\frac{d^3\Phi_A^M}{dn^2 dn_A} = k\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}, \qquad \frac{d^3\Phi_A^M}{dn\,dn_A^2} = k_A\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A},$$

M et A étant sur le contour, et k et k_A désignant les valeurs de la courbure en ces deux points. La formule (52) s'écrit donc

$$(54)\qquad \delta_1\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} = \delta\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A} + \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}(k\,\delta n + k_A\,\delta n_A).$$

Cette formule et la formule (53) montrent que, si l'on ajoute aux hypothèses faites au n° **19** sur la fonction Φ_B^A celle d'être une fonction harmonique des deux points A et B, la connaissance des valeurs de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ pour un contour initial et pour les points du contour, entraîne la connaissance des valeurs de la même expression pour un contour quelconque.

D'ailleurs ces hypothèses n'empêchent pas la valeur initiale de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ d'être quelconque, à la restriction près d'être la somme de $\frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A}$ et d'une fonction régulière. En effet, il existe une fonction harmonique Φ_B^A des points A et B, ayant la même singularité que g_B^A, s'annulant lorsqu'un de ces points vient sur le contour et telle que $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ prenne sur le contour la valeur considérée. Cette fonction vérifie toutes les conditions du n° **19**; à cette valeur initiale correspond donc, lorsque le contour se déforme, une solution de l'équation (47), et par suite la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ est bien celle qui résulte des formule (53) et (54).

Donc, bien que l'équation (47) ne soit pas complètement intégrable, l'équation qui donne la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$, qui résulte de l'élimination de $\delta\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ entre les formules (53) et (54), est complètement intégrable pour les fonctions ayant la même singularité que $\frac{d^2 g_A^M}{dn\,dn_A}$.

21. Dans le cas où la fonction Φ_B^A n'est pas harmonique, il faut évidemment, au second membre de la formule (54), ajouter les termes

$$\Delta_M \frac{d\Phi_A^M}{dn_A}\delta n + \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn}\delta n_A.$$

Pour que ce terme soit nul, et que par suite la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ soit la même que dans le cas précédent, il faut que

$$\Delta_M \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} = \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} = 0,$$

et pour que cette condition reste réalisée quand le contour se déforme, la variation de Φ étant donnée par la formule (47), on voit aisément qu'il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée, non seulement pour des points A et M du contour, dn_A et dn désignant des éléments de normales au contour, mais pour des points quelconques et des directions quelconques; en d'autres termes $\Delta_A \Phi_B^A$ doit ne dépendre que de A et $\Delta_B \Phi_B^A$ ne dépendre que de B.

Si cette condition n'est pas réalisée, la variation de $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ n'est pas la même que dans le cas précédent. On peut dire qu'elle est donnée par une équation aux dérivées fonctionnelles différente de celle qui résulte des formules (53) et (54), équation qui paraît surtout intéressante à envisager.

Nous allons maintenant étudier l'intégrabilité de l'équation (50) en nous plaçant successivement dans les deux hypothèses.

Intégrabilité de l'équation (50).

22. Faisons d'abord sur Φ_B^A les hypothèses suivantes :

1° Être une solution de l'équation (47);

2° Avoir même singularité que g_B^A;

3° S'annuler lorsqu'un des points A et B vient sur le contour;

4° Être une fonction harmonique de B (mais non nécessairement de A, de sorte que nous envisageons ici un cas un peu plus général que celui du n° **20**; la fonction $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$ peut ici être choisie arbitrairement pour un contour initial, à la seule condition d'avoir même singularité que $\frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$, et sa variation lorsque le contour se déforme dépend des valeurs de $\Delta_A \Phi_B^A$.

Toutes ces conditions, supposées réalisées pour un contour initial, restent réalisées lorsque le contour se déforme.

Dans ces conditions, on vérifie aisément que l'équation (50) est vérifiée par la fonction

$$\frac{d\Phi_A^F}{dn_A},$$

F étant un point fixe quelconque, du moins dans la région voisine de la courbe C dans laquelle la fonction Φ_B^A est supposée régulière.

A cause de la forme linéaire et homogène de l'équation (50), cette équation est également vérifiée par la fonction

$$(55) \qquad u_A = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma f(M) \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} ds,$$

Γ étant une courbe décrite par le point M, ds la longueur de l'arc de cette courbe, et $f(M)$ une fonction quelconque.

Nous allons montrer que, lorsque la courbe C tend vers la courbe Γ, cette fonction u tend vers $f(A)$, c'est-à-dire vers une fonction quelconque de A. Il en résultera que l'équation (50) est complètement intégrable, et que la formule (55) en donne l'intégrale générale.

Il faudra seulement supposer que la courbe Γ a sa courbure partout finie. La fonction $\frac{d\Phi_A^M}{dn_A}$ a alors même singularité que $\frac{dg_A^M}{dn_A}$ et, par suite, d'après les propriétés connues de cette fonction, que $2 \frac{d}{dn_A} \log \frac{1}{AM}$. L'intégrale (55) est alors discontinue au moment du passage à la limite comme la dérivée normale du potentiel dû à une couche de densité $\frac{1}{\pi} f(M)$ étalée sur la courbe Γ. De cette circonstance, et du fait que $\frac{d\Phi_A^M}{dn_A}$ s'annule quand M est sur C, résulte que la limite cherchée a la valeur $f(A)$, comme nous voulions l'établir.

Donc nous avons montré que l'équation (50) est complètement intégrable; nous avons même obtenu un résultat plus complet en formant l'intégrale qui, pour un contour particulier Γ, prend la valeur $f(A)$.

23. Examinons maintenant le cas où Φ_B^A n'est pas une fonction harmonique du point B.

L'équation (50) n'est plus complètement intégrable, en général. Pour le voir nous devons former la condition d'intégrabilité.

D'après un résultat connu ([1]), cette condition se forme de la manière suivante :

Considérant une déformation de la courbe C dépendant de deux paramètres λ et μ, et définissant les symboles δ_1, δ_2, δ^2 par les formules

$$\delta_1(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\lambda}(\ldots)\,d\lambda, \qquad \delta_2(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\mu}(\ldots)\,d\mu,$$

$$\delta^2(\ldots) = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\mu}(\ldots)\,d\lambda\,d\mu;$$

il faut déduire des équations (47) et (50) l'expression de $\delta^2 u$, et écrire que l'expression

$$\delta^2 u + \frac{du}{ds}\frac{d\delta_1 n}{ds}\delta_2 n \tag{56}$$

dépend symétriquement des fonctions δn et $\delta_1 n$.

Le calcul peut se faire aisément. Mais l'on évite presque tout calcul en remarquant que, d'après le n° **22**, nous savons que cette condition est sûrement vérifiée lorsque Φ_B^A est une fonction harmonique du point B. Or, d'après le n° **21**, on passe de ce cas au cas général, envisagé ici, en ajoutant à l'expression de

$$\delta_1 \frac{d^2\Phi_A^M}{dn\,dn_A}$$

le terme

$$\Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn}\delta_1 n_A$$

([1]) *Voir* n° 11 de notre Thèse, déjà citée, ou n° 3 de notre Mémoire *Sur l'intégration des équations aux dérivées fonctionnelles partielles* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1914, 1er semestre).

ce qui revient à ajouter à l'expression (56) le terme

$$(57)\qquad -\frac{1}{2\pi}\delta_1 n_A \int_C \Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} u\,\delta_2 n\, ds.$$

Il faut donc que ce terme dépende symétriquement de $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$.

Cette condition n'est réalisée, en dehors du cas peu intéressant d'une fonction u identiquement nulle, que si

$$\Delta_A \frac{d\Phi_A^M}{dn} = 0,$$

et, comme nous l'avons vu au n° **21**, ne reste réalisée lorsque le contour se déforme que si, pour des points A et B quelconques, $\Delta_B \Phi_B^A$ dépend seulement de B, et non de A.

S'il en est ainsi, l'équation (50) est complètement intégrable. Dans le cas contraire, elle n'admet pas d'autre solution que $u = 0$.

Un raisonnement analogue à celui qui précède montre bien pourquoi le fait que Φ_B^A soit ou non une fonction harmonique de A ne joue aucun rôle dans la condition d'intégrabilité. En effet, pour passer de l'un à l'autre de ces cas, il faut ajouter à l'expression (56), au lieu du terme (57), le terme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_C \Delta \frac{d\Phi_A^M}{dn_A} u\,\delta_1 n\,\delta_2 n\, ds,$$

qui dépend symétriquement de $\delta_1 n$ et $\delta_2 n$. On s'explique ainsi que nous ayons pu former l'intégrale générale de l'équation (50) sans faire intervenir l'hypothèse que Φ_B^A soit une fonction harmonique de A, hypothèse que, d'après le n° **21**, on aurait pu croire nécessaire.

Intégrabilité de l'équation (40).

24. En écrivant u au lieu de μ, u étant une solution de l'équation (50), et en appelant $\mathcal{H}$ la fonction inconnue, cette équation s'écrit

$$(58)\qquad \delta\mathcal{H} = -2\pi \int_C u^2 \delta n\, ds.$$

La condition d'intégrabilité se forme aisément en se reportant à la méthode indiquée dans notre Thèse (n° **12**), et l'on constate que cette équation est complètement intégrable.

Son intégrale générale est évidemment de la forme

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 + \text{const.},$$

$\mathcal{H}_1$ étant une intégrale particulière.

Résumé des résultats des n^os 18 à 24.

25. On sait que, lorsqu'une quantité Φ dépend du contour C, sa variation est en général de la forme

$$\delta\Phi = \int_C \Phi_1(s)\delta n\, ds,$$

$\Phi_1(s)$ étant une fonction du contour et d'un point du contour, que l'on appelle la « dérivée fonctionnelle première de Φ ». De même la variation de $\Phi_1(s)$ introduit une fonction du contour et de deux points du contour que l'on appelle la « dérivée fonctionnelle seconde de Φ ».

Si l'on considère H comme fonction du contour, la formule (40) nous montre que sa variation introduit la fonction nouvelle μ; en d'autres termes la dérivée fonctionnelle première de H s'exprime en fonction de μ. La formule (42) nous montre que la variation de μ introduit la fonction nouvelle $\frac{d^2 g_M^A}{dn\, dn_A}$; en d'autres termes la dérivée fonctionnelle seconde de H s'exprime simplement à l'aide de cette fonction. Enfin les remarques du n° **20** nous montrent que la variation de cette fonction s'exprime sans introduire de fonction nouvelle; il est commode, pour étudier cette variation, d'introduire la fonction g_B^A, mais cela n'est pas une nécessité.

Les formules qui donnent la variation de H, μ, $\frac{d^2 g_M^A}{dn\, dn_A}$ sont ainsi analogues, dans le calcul fonctionnel, à ce qu'est dans le calcul différentiel ordinaire une équation différentielle d'ordre 3, que l'on écrirait sous la forme d'un système de trois équations différentielles du premier ordre en prenant comme inconnues auxiliaires les dérivées première et seconde de la fonction inconnue principale.

Les résultats des n^{os} **20**, **22** et **24** nous montrent que ce système d'équations aux dérivées fonctionnelles est complétement intégrable, c'est-à-dire que nous pouvons en former un système de solutions prenant, pour un contour particulier, non les valeurs H, μ, $\frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$, mais des valeurs quelconques $\mathcal{H}$, u, $\frac{d^2\Phi_A^M}{dn\, dn_A}$, avec la seule restriction que les fonctions u et

$$\frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A} - \frac{d^2 g_A^M}{dn\, dn_A}$$

soient régulières.

On voit donc quelle est la généralité de la solution ; elle dépend d'un paramètre, d'une fonction arbitraire d'un point du contour, et d'une fonction arbitraire de deux points du contour.

L'aspect du problème change si au lieu de $\frac{d^2 \Phi_A^M}{dn\, dn_A}$, dont la variation est définie comme nous l'avons vu au n° **20**, on veut étudier les valeurs pour d'autres points que ceux du contour de la fonction Φ_B^A, la variation de cette fonction étant définie par la formule (47).

Alors le système constitué par les équations (47), (50) et (58) n'est plus complètement intégrable, et pour qu'à un système de valeurs initiales de $\mathcal{H}$ et Φ_B^A, telles que u et $\Phi_B^A - g_B^A$ soient régulières, corresponde un système de solutions de ces équations, il faut et il suffit :

D'une part, pour que l'équation (47) soit intégrable, que

$$(49) \qquad \frac{d}{ds}\Phi_M^A = \frac{d}{ds}\Phi_A^M = 0,$$

M étant un point de contour et A un point quelconque; d'autre part, pour que l'équation (50) soit intégrable, que $\Delta_B \Phi_B^A$ dépende seulement de B, et non de A.

Nous n'avions il est vrai, dans l'étude qui précède de l'équation (50), envisagé que le cas où la première de ces conditions est remplacée par la condition plus restrictive

$$\Phi_M^A = \Phi_A^M = 0,$$

mais le mode de raisonnement employé au n° **23** montre que le résultat obtenu s'applique si l'on remplace cette condition par la condition (49), moins restrictive, et suffisante pour que l'équation (47) soit intégrable, et l'énoncé qui précède est bien exact.

Extension au cas de l'espace.

26. La méthode employée dans le présent Chapitre pour l'étude, au point de vue de leur intégrabilité, des équations aux dérivées fonctionnelles du Chapitre II, s'étend sans peine à l'étude au même point de vue des équations (2), (14) et (24) du Chapitre I. Nous laisserons au lecteur que cela intéresse le soin de faire cette étude.

Malgré la différence des formules des Chapitres I et II, l'analogie avec l'étude qui précède est presque complète. Signalons seulement les deux différences suivantes :

1° L'expression (56), qui intervient dans la condition d'intégrabilité, doit être remplacée par une expression dans laquelle interviennent les dérivées par rapport aux deux paramètres qui fixent la position du point sur la surface. Les calculs seront donc un peu plus compliqués.

2° L'équation (14) est complètement intégrable, comme l'équation (40), mais ici nous pouvons aisément former son intégrale qui est

$$\int_S u\, dS + \text{const.},$$

u étant la notation employée au lieu de σ pour représenter l'intégrale générale de l'équation (24) et intervenir ensuite dans l'équation (14).