E. COTTON

Sur certains critères de convergence

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 69-84
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__69_0>

SUR CERTAINS CRITÈRES DE CONVERGENCE;

PAR M. ÉMILE COTTON.

Les critères qui font le principal objet de ce travail sont relatifs aux séries

$$\Sigma|\Delta c_n|, \tag{1}$$

dont les termes sont les modules des différences premières

$$\Delta c_n = c_{n+1} - c_n$$

d'une suite de nombres complexes c_n. Ces séries (1) se rencontrent dans l'étude d'autres séries par la méthode de transformation d'Abel.

Pour faciliter l'exposition, je définis d'abord (n° 1) ce que j'appelle *suite de nombres réels à variation bornée*. Cette notion est voisine de la notion classique de fonction à variation bornée, due à M. Jordan. J'aborde ensuite les séries (1); et j'étudie en premier lieu (n° 2) le cas où les nombres c_n tendent vers une limite différente de zéro; puis le cas où la limite est nulle, en commençant (n° 3) par deux critères simples de convergence, suffisants pour les applications indiquées plus loin; viennent enfin (n^{os} 4, 5) d'autres critères plus complexes et intéressants au seul point de vue théorique.

On peut se poser au sujet des séries

$$\Sigma a_n \varphi_n(z)$$

construites avec des fonctions données $\varphi_n(z)$ et des coefficients constants des questions analogues à celles qui constituent la théorie des séries de Taylor, chercher par exemple l'analogue du théorème d'Abel, entraînant l'existence du cercle de convergence. Les critères simples signalés tout à l'heure conduisent ainsi (n° 6) à étudier les quotients $\frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} : \frac{\varphi_{n+1}(z_0)}{\varphi_n(z_0)}$, formés avec les rapports d'un terme au précédent dans les suites $\varphi_n(z)$, $\varphi_n(z_0)$. Cette étude est possible dans des cas nombreux : séries de polynomes données par des équations aux différences finies, séries de Dirichlet, séries de factorielles et généralisations diverses. Il est intéressant de comparer les façons dont cette étude se poursuit dans différents cas, de classer ainsi et d'étendre parfois (n^{os} 7 à 9) quelques-uns des résultats obtenus antérieurement par différents auteurs.

1. Nous dirons qu'une *suite indéfinie de nombres réels*

$$(1) \qquad a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

est à variation bornée si la série formée par ses différences premières

$$\Sigma\, \Delta a_n, \qquad \Delta a_n = a_{n+1} - a_n$$

est absolument convergente. Lorsqu'il en est ainsi la suite (1) (ou suite a_n) admet une limite, mais l'inverse n'est pas vrai; la série des différences peut converger sans converger absolument, la suite (1) peut admettre une limite sans être à variation bornée. On peut rattacher ces suites aux fonctions à variation bornée de M. Jordan, en supposant la fonction définie non pour toutes les valeurs de la variable comprises dans un intervalle déterminé, mais seulement pour les valeurs entières de la variable.

Parmi les propriétés que cette analogie conserve, nous citerons les suivantes, dont la démonstration est immédiate et qui seront utilisées plus loin.

Toute suite à variation bornée peut s'obtenir en retranchant terme à terme deux suites convergentes et non décroissantes. On a, en effet,

$$a_n = a_0 + \Delta a_0 + \ldots + \Delta a_{n-1},$$

et l'on sait que la série absolument convergente $\Sigma\, \Delta a_n$ peut être obtenue en retranchant terme à terme deux séries convergentes à termes positifs.

I. *Étant données deux suites a_n, b_n à variation bornée, les suites $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$ obtenues en les ajoutant, en les retranchant ou les multipliant terme à terme sont encore à variation bornée. Il en est de même de la suite $\frac{a_n}{b_n}$ que donne la* *division terme à terme, pourvu que la borne inférieure des valeurs absolues des b_n soit différente de zéro* [1].

On peut donc dire que des opérations rationnelles en nombre limité effectuées sur les termes correspondants d'un nombre limité de suites à variation bornée donnent le terme général d'une suite à variation bornée, pourvu que les dénominateurs soient tous, en valeur absolue, supérieurs à un nombre fixe. Il n'est même pas nécessaire que les opérations soient rationnelles, ainsi que le montre la proposition suivante, qui s'applique encore au cas où l'on opérerait sur plusieurs suites au lieu d'une seule [2], et qui est également valable (avec quelques modifications dans l'énoncé), pour les fonctions de M. Jordan :

II. *Étant données une suite à variation bornée a_n et une fonction $\varphi(x)$, la suite $\alpha_n = \varphi(a_n)$ est à variation bornée dès que les nombres de la première suite restent compris dans un intervalle où la fonction $\varphi(x)$ et sa dérivée $\varphi'(x)$ existent et restent bornées.*

On a, en effet,

$$\Delta\alpha_n = \varphi(a_{n+1}) - \varphi(a_n) = \varphi'(c_n)\,\Delta a_n,$$

c_n étant compris entre a_{n+1} et a_n; la série $\Sigma\,\Delta a_n$ étant absolument convergente et $\varphi'(c_n)$ étant inférieur en valeur absolue à un nombre fixe, $\Sigma\,|\,\Delta\alpha_n\,|$ est convergente.

La remarque suivante, bien évidente, nous sera utile :

III. *Étant données trois suites a_n, b_n, c_n telles que pour toutes les valeurs de n les modules des différences Δa_n, Δb_n, Δc_n puissent représenter les longueurs des trois côtés d'un triangle, si deux des trois suites sont à variation bornée la troisième l'est aussi; autrement dit, si deux des trois séries $\Sigma\,\Delta a_n$, $\Sigma\,\Delta b_n$, $\Sigma\,\Delta c_n$ convergent absolument, il en est de même de la troisième.*

Nous allons appliquer ces propositions à l'étude de certaines

---

(1) *Voir* le Chapitre I du *Cours d'Analyse* de M. Jordan.

(2) *Voir* HADAMARD, *Acta mathematica*, t. XXVII, 1903, p. 181.

séries. Quand nous dirons que les hypothèses sur lesquelles elles reposent sont vérifiées, nous sous-entendrons en général qu'elles le sont asymptotiquement, c'est-à-dire par ceux des termes des suites sur lesquelles on opère dont le rang est assez élevé.

2. Soit

$$c_0 = a_0 + ib_0, \qquad c_1 = a_1 + ib_1, \qquad \ldots, \qquad c_n = a_n + ib_n, \qquad \ldots$$

une suite de nombres complexes, nous allons étudier la convergence de la série formée par les modules de leurs différences

$$(1) \qquad \Sigma\,|\,\Delta c_n\,|, \qquad \Delta c_n = c_{n+1} - c_n = \Delta a_n + i\,\Delta b_n,$$

D'après une proposition bien connue il faut et il suffit, pour que la série soit convergente, que les séries $\Sigma\,|\,\Delta a_n\,|$, $\Sigma\,|\,\Sigma\,\Delta b_n\,|$ le soient aussi ; en d'autres termes que les suites a_n et b_n soient toutes deux à variation bornée.

Nous représenterons aussi les nombres complexes c_n par leurs modules ρ_n et leurs arguments θ_n, *que nous supposerons essentiellement choisis de façon que les valeurs absolues de leurs différences* $|\,\Delta\theta_n\,| = |\,\theta_{n+1} - \theta_n\,|$ *soient comprises entre* σ *et* π.

Si la série (1) est convergente, la suite c_n admet une limite c ; supposons d'abord cette limite différente de zéro.

Pour que la série (1) *soit convergente et que la limite* c *soit différente de zéro il faut et il suffit que les suites* ρ_n *et* θ_n *soient à variation bornée, la limite de* ρ_n *étant différente de zéro.*

Ces conditions sont *suffisantes*, car ρ_n et θ_n étant à variation bornée, $\sin\theta_n$, $\cos\theta_n$, et les produits $a_n = \rho_n\cos\theta_n$, $b_n = \rho_n\sin\theta_n$ forment des suites de même nature (propositions I et II du numéro précédent).

Montrons maintenant que ces conditions sont *nécessaires*.

Pour ρ_n, c'est une conséquence d'une proposition antérieure (n° 1, III). On peut, sans changer les différences $\Delta\theta_n$ multiplier tous les nombres c_n par $\cos\varphi + i\sin\varphi$, φ désignant l'argument de $\frac{1}{c}$; autrement dit, on peut supposer que la limite c des nombres complexes c_n est un nombre réel et positif. S'il en est ainsi,

$\operatorname{tang}\theta_n = \frac{b_n}{a_n}$ est à variation bornée et $\theta_n = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang}\theta_n)$ l'est aussi (n° 1, II).

Les conditions relatives à la suite ρ_n : variation bornée, limite non nulle équivalent à la suivante : $\log\rho_n$ est à variation bornée. On peut dès lors résumer ce qui précède en disant :

Pour que la série (1) *soit convergente et que la limite* c *de* c_n *soit différente de zéro, il faut et il suffit que la série* $\sum\left|\log\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$ *où le coefficient de* i, *dans le logarithme, est inférieur à* π *soit convergente* (1).

On ramène cette proposition à la règle de convergence absolue d'un produit infini. Posant, en effet,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + r_n, \qquad \Delta c_n = r_n c_n,$$

nous avons

$$c_n = c_0(1+r_1)(1+r_2)\ldots(1+r_n).$$

Le produit infini $c_0\Pi(1+r_n)$ est absolument convergent en même temps que la série $\Sigma|\log(1+r_n)|$ et la convergence de l'une des séries à termes positifs $\Sigma|r_n|$, $\Sigma|\log(1+r_n)|$ entraîne celle de l'autre puisque le rapport des termes correspondants tend vers l'unité quand n devient infini (2).

3. Lorsque la limite c de c_n est nulle, le raisonnement antérieur reste exact pour ρ_n qui est toujours à variation bornée, sa limite étant alors nulle. Il n'est plus valable pour θ_n ; on voit bien que si ρ_n et θ_n sont tous deux à variation bornée $\Sigma|\Delta c_n|$ converge, mais cette série peut converger sans que θ_n soit à variation bornée. Les cas élémentaires suivants, importants par leurs applications, vont nous le montrer.

I. On a

$$|\Delta c_n| = |c_{n+1} - c_n| \leqq |c_{n+1}| + |c_n| = \rho_{n+1} + \rho_n,$$

---

(1) Bien que cette proposition ramène l'une à l'autre deux questions dont les difficultés paraissent égales, elle a des conséquences intéressantes (n° 9).

(2) Cette méthode diffère peu de celle de M. Jordan (*voir* son *Cours d'Analyse*, 3e édition, t. I, p. 311).

et par suite : *si la série* $\Sigma\rho_n$ *est convergente il en est de même de la série* $\Sigma|\Delta c_n|$.

Un autre critère simple résulte de l'interprétation de $\Sigma|\Delta c_n|$ comme longueur de la brisée obtenue en joignant les points A_0, A_1, A_2, ..., A_n, d'affixes c_0, c_1, c_2, ..., c_n, ... et de la remarque suivante.

L'élément d'arc d'une courbe (C) rapportée à des coordonnées polaires θ, ρ est

$$ds = \frac{d\rho}{\cos V} = \frac{\rho\, d\theta}{\sin V},$$

V désignant l'angle de la tangente et du rayon vecteur. Supposons la courbe telle que le rayon vecteur décroisse constamment quand on la parcourt dans un sens convenable, et que l'angle V reste inférieur à un angle $\alpha < \frac{\pi}{2}$. *La longueur de tout arc de la courbe intérieur au cercle* $\rho = \rho_p$ *reste finie et inférieure à* $\frac{\rho_p}{\cos\alpha}$.

La proposition subsiste quand la courbe (C) admet une infinité de points anguleux; soient A_0, A_1, ..., A_n, ... ces points rangés dans l'ordre des rayons vecteurs décroissants; les arcs intermédiaires A_nA_{n+1} sont toujours supposés réguliers et la limite α de l'angle V est la même pour tous. La ligne brisée obtenue en traçant les cordes A_0A_1, A_1A_2, ... a, elle aussi, une longueur finie.

On peut inversement se donner la brisée $A_0A_1 \ldots A_n \ldots$ et chercher à construire une courbe (C) remplissant les conditions qui précèdent. Supposons, comme plus haut, les points A_n donnés par leur affixes c_n ou par leurs coordonnées polaires ρ_n, θ_n (avec $|\Delta\theta_n| < \pi$); nous prendrons pour arcs A_nA_{n+1} de (C) des arcs de spirales logarithmiques ayant le pôle O comme point asymptote. L'angle V_n sous lequel l'arc A_nA_{n+1} coupe ses rayons vecteurs est donné par

$$\operatorname{tang} V_n = \frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log\rho_n|}.$$

Il suffit que cette expression reste inférieure à un nombre fixe pour que la courbe (C) remplisse les conditions requises et que la brisée ait une longueur finie. On peut d'ailleurs écrire

$$\frac{\Delta\theta_n}{\Delta\log\rho_n} = \frac{\mathfrak{I}(\log q_n)}{\mathfrak{R}(\log q_n)}, \qquad q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

$\mathcal{R}(z)$ et $\mathcal{I}(z)$ désignant respectivement la partie réelle et le coefficient de i dans le nombre complexe z. La détermination du logarithme est telle que $|\mathcal{I}(\log q_n)| < \pi$. La décroissance de la suite ρ_n se traduit d'ailleurs par $\mathcal{R}(\log q_n) < 0$. Nous arrivons ainsi au critère cherché :

II. *Si l'on a posé* $q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n}$, *et si :*

1°

$$\mathcal{R}(\log q_n) < 0 \qquad (\textit{suite } \rho_n \textit{ décroissante});$$

2°

$$\frac{|\mathcal{I}(\log q_n)|}{|\mathcal{R}(\log q_n)|} < \operatorname{tang} \alpha,$$

α *étant un nombre fixe, la série* $\Sigma |\Delta c_n|$ *est convergente; de plus, le reste* $|\Delta c_p| + |\Delta c_{p+1}| + \ldots$ *est inférieur à* $\frac{\rho_p}{\cos \alpha}$.

Nous appliquerons plus loin ce critère; mais nous allons auparavant en donner d'autres qui proviennent encore de la comparaison de la croissance des suites ρ_n, $|\Delta \rho_n|$, $\rho_n |\Delta \theta_n|$.

4. Soit l_n la longueur de la partie de la brisée $A_0 A_1 A_2 \ldots$ comprise entre les sommets A_0 et A_n :

$$l_n = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \ldots + A_{n-1} A_n = |\Delta c_0| + |\Delta c_1| + \ldots + |\Delta c_{n-1}|.$$

On a

$$\Delta l_n = l_{n+1} - l_n = |\Delta c_n|,$$

et le triangle $OA_n A_{n+1}$ donne

$$\Delta l_n = \sqrt{(\Delta \rho_n)^2 + 4 \rho_n \rho_{n+1} \sin^2 \frac{\Delta \theta_n}{2}},$$

ce qui montre que [1]

$$\Delta l_n, \quad |\Delta \rho_n| \quad \text{et} \quad 2\sqrt{\rho_n \rho_{n+1}} \left| \sin \frac{\Delta \theta_n}{2} \right|$$

peuvent représenter les côtés d'un triangle; donc, *pour que* l_n

---

[1] Nous ne supposons plus ici la suite ρ_n décroissante.

tende vers une limite finie, il faut et il suffit que

$$\Sigma\,|\Delta\rho_n| \quad \text{et} \quad \Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\left|\sin\frac{\Delta\theta_n}{2}\right|$$

convergent (¹).

La convergence de l'une des séries

$$\Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\left|\sin\frac{\Delta\theta_n}{2}\right| \quad \text{et} \quad \Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\,|\Delta\theta_n|$$

entraîne celle de l'autre, puisque le quotient des termes de même rang reste compris entre les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{\pi}$.

On a d'ailleurs

$$\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}} = \sqrt{\rho_n(\rho_n+\Delta\rho_n)} = \sqrt{\left(\rho_n+\frac{1}{2}\Delta\rho_n\right)^2 - \left(\frac{\Delta\rho_n}{2}\right)^2};$$

la série $\Sigma\,|\Delta\rho_n|$ est censée convergente, par suite aussi $\Sigma\,|\Delta\rho_n\,\Delta\theta_n$ puisque $|\Delta\theta_n| < \pi$, donc (**1**, III) les séries

$$\Sigma\sqrt{\rho_n\rho_{n+1}}\,|\Delta\theta_n| \quad \text{et} \quad \sum\frac{\rho_n+\rho_{n+1}}{2}\,|\Delta\theta_n|$$

sont simultanément convergentes. On peut d'ailleurs substituer à leur étude celle de $\Sigma\rho_n|\Delta\theta_n|$, ou plus généralement celle de $\Sigma\rho'_n|\Delta\theta_n|$, ρ'_n étant un nombre positif tel que le quotient $\frac{|\rho'_n-\rho_n|}{\Delta\rho_n}$ reste borné. Tel est, par exemple, le cas de la série $\sum\left|\frac{\Delta\theta_n}{\Delta\log\rho_n}\Delta\rho_n\right|$ puisque

$$\frac{\Delta\rho_n}{\Delta\log\rho_n} = \frac{\rho_{n+1}-\rho_n}{\log\rho_{n+1}-\log\rho_n} = \rho'_n$$

est, d'après la formule de l'accroissement fini, compris entre ρ_n et ρ_{n+1}. En résumé :

Pour que la série $\Sigma\,|\Delta c_n|$ *converge, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient remplies.*

1° *La suite des nombres* $\rho_n = |c_n|$ *est à variation bornée;*

2° *La série* $\Sigma\,\rho_n|\Delta\theta_n|$ *est convergente.*

A cette dernière série on peut substituer toute série $\Sigma\,\rho'_n\,|\Delta\theta_n|$

(¹) *Voir* la Thèse de M. CAHEN, *Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XI, 1894, p. 83.

qui lui soit équivalente au point de vue de la convergence, en supposant la condition 1° remplie.

5. Si les quotients $\frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log \rho_n|}$ sont bornés, et si la condition 1° est remplie, la condition 2° l'est également; *on a ainsi une extension de la règle de convergence donnée plus haut* (n° 3, II). Nous avions, à cet endroit, supposé la suite ρ_n décroissante; étant formée de nombres positifs, elle est alors à variation bornée. Quand ce critère du n° 3 n'est pas applicable, mais que l'extension actuelle peut être utilisée, on aura une limite supérieure du reste de la série $\Sigma \rho_n |\Delta \rho_n|$ en remplaçant le facteur ρ_p du n° 3 par la variation totale de ρ, c'est-à-dire par $\Sigma |\Delta \rho_n|$, l'indice n variant de p à $+\infty$.

Quand $\frac{|\Delta\theta_n|}{|\Delta \log \rho_n|}$ devient infini avec n, on peut essayer des critères, dont nous allons dire un mot, qui sont analogues aux critères logarithmiques bien connus ([1]).

A l'aide des fonctions

$$\log_1 x = \log x, \qquad \log_2 x = \log(\log x), \qquad \ldots, \qquad \log_i x = \log(\log_{i-1} x),$$

obtenues par itération de la fonction logarithmique et des nombres $x_n = \frac{1}{\rho_n}$, construisons la suite dont le terme de rang n est

$$u_{i,p,n} = (\log_i x_n)^{-p},$$

p désignant un nombre réel, et considérons la suite des différences

$$\Delta u_{i,p,n} = (\log_i x_{n+1})^{-p} - (\log_i x_n)^{-p}.$$

Admettons que les nombres ρ_n forment une suite décroissante, et tendent toujours vers zéro. Toutes les différences $\Delta u_{i,p,n}$ ont le

---

([1]) *Voir* Borel, *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. I; Jordan, *Cours d'Analyse*, t. I, p. 292-298; *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, 4, n°s 8, 9.

Les séries de comparaison employées ici diffèrent peu sans doute des séries indiquées dans les Ouvrages cités; mais la forme qui leur est donnée, attirant dès le début l'attention sur la croissance de la somme de la série de comparaison, m'a paru assez intéressante par sa simplicité pour justifier l'exposé rapide qui fait l'objet du n° 5.

signe de $-p$; lorsque p est positif, la série $\Sigma_n \Delta u_{i,p,n}$ (à termes tous négatifs) est convergente; si $p < 0$, elle est divergente.

Une formule bien connue

$$\frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')} = \frac{f'(x'')}{g'(x'')},$$

x'' étant compris entre x et x', se prête facilement à l'étude asymptotique des rapports $\frac{\Delta u_{i,p,n}}{\Delta u_{i-1,p',n}}$, qui deviennent infinis avec n lorsque p' est positif et tendent vers zéro lorsque p' est négatif, et à celle des rapports $\frac{\Delta u_{i,p,n}}{\Delta u_{i,p',n}}$, qui deviennent infinis avec n si $p' > p$. On compare, plus facilement encore, les diverses expressions $u_{i,p,n}$ et par suite les sommes ou les restes correspondant aux n premiers termes des séries.

Utilisant alors les séries $\Sigma|\Delta u_{i,p,n}|$ comme séries de comparaison, nous suivrons le procédé indiqué par M. Borel (Ouvrage cité, p. 10) en l'appliquant à la série $\Sigma\,\rho'_n|\Delta\theta_n|$, où, comme nous l'avons vu (n° 4), ρ'_n peut être choisi de façon quelconque entre ρ_n et ρ_{n+1}. En regardant i et p comme fixes, nous prendrons pour ρ'_n un nombre tel que la formule de l'accroissement fini donne

$$\left|\frac{\Delta u_{i,p,n}}{p}\right| = \frac{(\log_i x'_n)^{-p}}{\lambda_i x'_n}\Delta\rho_n,$$

formule où $x'_n = \frac{1}{\rho'_n}$ et $\lambda_i x = x \log x \ldots \log_i x$.

Si x'_n était connu, on pourrait déterminer p_n tel que

$$\frac{(\log_i x'_n)^{-p_n}}{\lambda_i x'_n} = \rho'_n \frac{|\Delta\theta_n|}{\Delta\rho_n} = \frac{|\Delta\theta_n|}{x'_n\,\Delta\rho_n};$$

associons un tel nombre p_n à tout nombre x'_n compris entre $x_n = \frac{1}{\rho_n}$ et $x_{n+1} = \frac{1}{\rho_{n+1}}$, puis faisons croître n indéfiniment, dans ces conditions p_n admet une plus grande et une plus petite limites p' et p''. *Si ces deux limites d'indétermination sont positives, les séries* $\Sigma\,\rho_n|\Delta\theta_n|$ *et* $\Sigma|\Delta c_n|$ *sont convergentes;* si p' et p'' *sont négatifs, les séries sont divergentes;* s'ils sont de signes contraires, le critère est inapplicable; si $p' = p'' = 0$, il tombe en défaut et l'on peut essayer le critère analogue en remplaçant i par $i+1$, etc.

L'hypothèse, faite en dernier lieu, que la suite ρ_n est décroissante, n'est pas indispensable : on peut présenter le mode de comparaison précédent en faisant intervenir la grandeur de ρ_n, $\rho'_n = \frac{1}{x'_n}$, ρ_{n+1} et non le rang n, et admettant que la suite $(\log_i x_n)^{-p}$ (où p est l'exposant de la série de comparaison) est à variation bornée. Mais nous n'insisterons pas sur ces questions dont nous n'aurons pas à faire usage.

6. Les séries $\Sigma|\Delta c_n|$ se rencontrent quand on applique aux séries de la forme $\Sigma c_n u_n$ la méthode de sommation partielle d'Abel. Rappelons à ce sujet les propositions suivantes :

I. La série $\Sigma c_n u_n$ converge si les deux séries Σu_n, $\Sigma|\Delta c_n|$ sont convergentes.

II. La série $\Sigma c_n u_n$ converge si les trois conditions suivantes sont réalisées : 1° la somme des p premiers termes de la série Σu_n reste bornée quel que soit p ; 2° c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; 3° $\Sigma|\Delta c_n|$ est convergente.

Ces théorèmes peuvent être complétés par des énoncés concernant la convergence uniforme des séries $\Sigma c_n u_n$ quand la suite c_n est formée de fonctions d'une variable, la suite u_n étant composée de constantes [1]. Ils ont permis d'étendre à diverses classes de séries (séries de Dirichlet, séries de factorielles, etc.) [2], la plupart des résultats que les travaux d'Abel, de Cauchy et de M. Hadamard avaient donnés pour les séries de Taylor en ce qui concerne l'existence et la détermination du domaine de convergence, la continuité de la série, etc.

Les séries ainsi étudiées se contruisent, d'une façon générale, en partant d'une suite donnée de fonctions d'une variable complexe

$$(1) \qquad \varphi_0(z), \quad \varphi_1(z), \quad \ldots, \quad \varphi_n(z), \quad \ldots.$$

---

[1] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques* (II, 1, 17), pour ce point et pour la bibliographie.

[2] Voir *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, 17, n^{os} 1 et 17 à 20. Depuis l'apparition de cet article, M. R.-D. Carmichaël a étudié une classe générale de séries de cette nature (*Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 17, 1916, p. 207; *American Journal of Mathematics*, vol. 39, 1917, p. 385).

Elles sont de la forme $\Sigma a_n \varphi_n(z)$, les a_n désignant des constantes.

L'existence du domaine de convergence s'établit en montrant que si la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge pour une valeur z_0 de z, ou plus généralement si la somme de ses p premiers termes reste, pour cette valeur de z, bornée quelque soit p, on peut affirmer la convergence de la série pour un ensemble de valeurs de z indépendant de la suite des coefficients a_n. On écrit

$$a_n \varphi_n(z) = a_n \varphi_n(z_0) \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)}$$

et posant

$$u_n = a_n \varphi_n(z_0), \qquad c_n = \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)},$$

on est conduit par les théorèmes I et II à étudier la série $\Sigma|\Delta c_n|$ où les a_n ne figurent plus.

La convergence de cette dernière série $\Sigma|\Delta c_n|$ peut, ainsi que nous l'avons vu (n^{os} 2, 3), être, dans un grand nombre de cas, étudiée par l'examen des expressions

$$q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)} : \frac{\varphi_{n+1}(z_0)}{\varphi_n(z_0)}.$$

7. Nous poserons

$$\theta_n(z) = \frac{\varphi_{n+1}(z)}{\varphi_n(z)}, \qquad \text{d'où} \qquad q_n = \frac{\theta_n(z)}{\theta_n(z_0)}.$$

Les critères de convergence où intervient le quotient q_n sont d'une application particulièrement simple lorsque dans la suite (1) *le rapport $\theta_n(z)$ d'un terme au précédent tend vers une limite.*

1° *Supposons d'abord que la limite dépende de z*; soit $\theta(z)$ cette limite.

On applique alors le premier critère du n° 3; *la convergence de la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ est assurée en vertu de l'hypothèse concernant $\Sigma a_n \varphi_n(z_0)$ dans tout le domaine où* $|\theta(z)| < |\theta(z_0)|$. C'est le cas des séries de Taylor; c'est également le cas de certaines séries de polynomes, par exemple de celles signalées par Poincaré dans son Mémoire (1) : *Sur les équations linéaires ordinaires et aux différences finies*. Les séries de cette nature s'étu-

(1) *American Journal of Mathematics*, t. VII, 1885, p. 243.

dient, comme les séries de Taylor, sans faire appel, en général, à la méthode de sommation d'Abel.

2° *Si* $\theta_n(z)$ *tend vers une limite* θ *indépendante de* z, *et différente de zéro*, q_n tend vers l'unité. On peut alors écrire

$$\theta_n(z) = \theta[1 + p_n(z)],$$

$p_n(z)$ tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et

$$q_n = \frac{1 + p_n(z)}{1 + p_n(z_0)} = 1 + p_n(z) - p_n(z_0) + \ldots .$$

Les termes non écrits peuvent être négligés dans l'application des théorèmes des n^{os} **2** et **3**, si, comme nous le supposons, $p_n(z)p_n(z_0)$ et $[p_n(z_0)]^2$ sont infiniment petits par rapport à la différence $p_n(z) - p_n(z_0)$. Dans ces conditions, on étudiera d'abord la série $\Sigma|p_n(z) - p_n(z_0)|$ (n° **2**); s'il existe une région où elle est convergente, $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge dans cette région. Si l'on ne peut affirmer l'existence d'une pareille région, on examine, comme au n° 3, la partie réelle et le coefficient de i de $\log q_n$ ou de l'infiniment petit équivalent $p_n(z) - p_n(z_0)$. La série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge dans toute région où $\mathfrak{R}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}$ est négatif et où le rapport $\frac{\mathfrak{J}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}}{\mathfrak{R}\{p_n(z) - p_n(z_0)\}}$ reste borné.

On peut donner comme exemple certaines séries de polynomes (Poincaré, *loc. cit.*, p. 254), les séries de factorielles et leurs généralisations (1).

Il est facile d'ailleurs de construire des suites de fonctions $\varphi_n(z)$ pour lesquelles le rapport $\theta_n(z)$ tende vers une limite θ indépendante de z; on peut toujours (par le changement de φ_n en $l^n\varphi_n$) supposer $\theta = 1$. Il suffit de déterminer alors φ_n par la donnée de φ_0 et de $\theta_n(z)$. Prenons, par exemple,

$$\varphi_0 = 1, \qquad \theta_{n-1}(z) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{n}\right);$$

on voit facilement que les séries construites en partant de la suite de fonctions

$$\varphi_n(z) = \prod_{h=1}^{n} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{h}\right)$$

(1) Landau, *Sitzungsberichte Akad. München*, 1906, p. 151.

ont un domaine de convergence limité par une parallèle à l'axe des quantités imaginaires. Il est intéressant d'observer que se donner $\theta_n(z)$ tendant vers la limite 1 revient à se donner $p_n(z) = \theta_n(z) - 1$, et à déterminer les fonctions φ_n par le système d'équations linéaires aux différences finies

$$\Delta \varphi_n(z) = p_n(z)\, \varphi_n(z).$$

8. Les critères précédents peuvent être encore d'une application facile lorsque $\theta_n(z)$, sans tendre vers une limite finie et différente de zéro, a une expression simple.

Telles sont les séries de Dirichlet, où, comme on le sait,

$$\varphi_n(z) = e^{-\lambda_n z},$$

les nombres λ_n étant positifs croissants et devenant infinis avec n. On a

$$\theta_n(z) = e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n) z}$$

et l'étude des quotients

$$q_n = e^{-(\lambda_{n+1} - \lambda_n)(z - z_0)}$$

est immédiate. Les différences $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ pouvant être des nombres positifs quelconques, on n'a plus, en général, de limite pour $\theta_n(z)$; mais on voit immédiatement que si $\mathcal{R}(z) > \mathcal{R}(z_0)$, le coefficient de i dans z étant naturellement fini, les conditions du n° 3 sont réalisées; l'existence de l'abscisse de convergence en résulte immédiatement.

Plus généralement, supposons connue une expression asymptotique pour $\theta_n(z)$, telle qu'on puisse en déduire

$$(1) \quad \log q_n = g_n \left\{ a(z, z_0) + i\, b(z, z_0) \right\} \left\{ 1 + \alpha_n(z, z_0) + i\, \beta_n(z, z_0) \right\},$$

les nombres g_n étant constants, réels, positifs, la série Σg_n étant divergente; $a(z, z_0)$, $b(z, z_0)$, $\alpha(z, z_0)$, $\beta(z, z_0)$ désignant des expressions réelles construites en partant des nombres complexes z et z_0, α_n et β_n tendant vers zéro en même temps que $\frac{1}{n}$. On a

$$\mathcal{R} \log q_n = g_n\, a \left\{ 1 + \alpha_n - \frac{b}{a} \beta_n \right\},$$

$$\frac{\mathfrak{I} \log q_n}{\mathcal{R} \log q_n} = \frac{b}{a} \frac{1 + \alpha_n}{1 + \alpha_n - \frac{b}{a} \beta_n} + \frac{\beta_n}{1 + \alpha_n - \frac{b}{a} \beta_n}.$$

Si donc la série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge pour $z = z_0$, ou si tout au moins la somme de ses p premiers termes reste bornée, elle convergera pour les valeurs de z telles que $a(z, z_0)$ soit négatif et que $\frac{b(z, z_0)}{a(z, z_0)}$ reste borné. C'est le cas des séries étudiées par M. D. Carmichaël dans le travail cité plus haut.

On peut encore donner un exemple d'utilisation d'une expression asymptotique de q_n en prenant

$$q_n = \left(\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}\right)^p e^{-(\lambda_{n+1}-\lambda_n)(z-z_0)}. \tag{2}$$

Dans $\log q_n$ le terme $p(\log\lambda_{n+1} - \log\lambda_n)$ est négligeable vis-à-vis du terme contenant $\lambda_{n+1} - \lambda_n$ en facteur, lorsque les λ deviennent infinis avec n. Ce rapport (2) intervient et ces circonstances se présentent dans l'étude directe des séries obtenues en dérivant terme à terme une série de Dirichlet, étude faite par M. Cahen dans sa Thèse bien connue.

9. Étant données deux suites de fonctions

$$\begin{array}{llll} \varphi_0(z), & \varphi_1(z), & \ldots, & \varphi_n(z), \quad \ldots, \\ \psi_0(z), & \psi_1(z), & \ldots, & \psi_n(z), \quad \ldots, \end{array}$$

si l'on pose $c_n = \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, et si l'on admet que pour tous les points z d'un domaine D la série $\Sigma|\Delta c_n|$ converge $\left(\text{ce qu'on peut souvent reconnaître, d'après les n}^{\text{os}}\ \mathbf{2} \text{ et } \mathbf{3}, \text{ par l'étude du rapport } \frac{\psi_{n+1}}{\psi_n} : \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}\right)$, alors en tous les points de D où une série $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ converge, la série $\Sigma a_n \psi_n(z)$ construite avec les mêmes coefficients est également convergente [1].

Si, de plus, la limite c de c_n pour n infini est différente de zéro, dans le domaine D la réciproque est vraie (*voir* n° **1**, I) de telle façon que les séries $\Sigma a_n \varphi_n(z)$, $\Sigma a_n \psi_n(z)$ convergent pour les mêmes points. D'après ce qu'on a vu plus haut (n° **2**), pour que les deux conditions : $\Sigma|\Delta c_n|$ convergente, $c \neq 0$ soient rem-

---

[1] Lorsque c_n tend vers zéro, $\Sigma|\Delta c_n|$ étant convergente, il suffit que la somme des p premiers termes de $\Sigma a_n \varphi_n(z)$ reste bornée quel que soit p pour que la série $\Sigma a_n \psi_n(z)$ soit convergente.

plies, il faut et il suffit que le produit infini

$$\Pi(1 + r_n), \qquad 1 + r_n = q_n = \frac{c_{n+1}}{c_n},$$

soit absolument convergent.

C'est ainsi que la proposition de M. Landau (*loc. cit.*, p. 166), concernant la convergence simultanée d'une série de factorielles et d'une série de Dirichlet, se rattache à la convergence absolue du produit infini

$$z(1+z)\prod_{n=2}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{z\log\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right\}$$

qui représente la fonction $\frac{1}{\Gamma(z)}$, et qu'on ramène aisément à la forme classique

$$z\,e^{Cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right\},$$

où C désigne la constante d'Euler.