

BULLETIN DE LA S. M. F.

P. HUMBERT

Sur deux polynômes associés aux polynômes de Legendre

Bulletin de la S. M. F., tome 46 (1918), p. 120-151

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__120_1

© Bulletin de la S. M. F., 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR DEUX POLYNOMES ASSOCIÉS AUX POLYNOMES
DE LEGENDRE;**

PAR M. PIERRE HUMBERT.

Soit $P_n(z)$, le polynome de Legendre d'ordre n . Nous définissons les deux polynomes $A_n(z)$, de degré $n-2$, et $B_n(z)$, de degré $n-1$, par l'identité

$$A_n(z) P_n(z) + B_n(z) P'_n(z) \equiv 1,$$

que nous appellerons *identité fondamentale*. Nous nous proposons d'étudier les principales propriétés de ces polynômes, ainsi que de quelques autres que l'on peut en considérer comme des extensions (1).

I.

Premières remarques. — Le simple examen de l'identité fondamentale nous permet les remarques suivantes : A_n , qui est d'ordre $n - 2$, ne contient que des termes d'ordres $n - 2, n - 4, n - 6, \dots$; B_n , au contraire, n'a que des termes d'ordres $n - 1, n - 3, n - 5, \dots$.

A_0, A_1 , et B_0 n'existent pas.

Les polynômes définis par les premières valeurs de n sont les suivants :

	$B_1 = 1;$
$A_2 = -2,$	$B_2 = z;$
$A_3 = -5z,$	$B_3 = \frac{5z^2 - 2}{3};$
$A_4 = -\frac{35z^2 - 8}{3},$	$B_4 = \frac{35z^3 - 23z}{12};$
$A_5 = -\frac{315z^3 - 147z}{12},$	$B_5 = \frac{315z^4 - 287z^2 + 32}{60},$
.....,,

Enfin, si α est une racine quelconque de $P_n(z)$ l'identité fondamentale montre que

(1)
$$B_n(\alpha) = \frac{1}{P'_n(\alpha)};$$

le signe de $B_n(\alpha)$ est donc celui de $P'_n(\alpha)$. On en déduit que, de même que les $n - 1$ racines de $P'_n(z)$ séparent les n racines de $P_n(z)$, les $n - 1$ racines de $B_n(z)$ séparent les n racines de $P_n(z)$. On voit de la même manière que les $n - 2$ racines de $A_n(z)$ séparent les $n - 1$ racines de $P'_n(z)$, et séparent également les $n - 1$ racines de $B_n(z)$.

(1) Nous supposons connues du lecteur les propriétés élémentaires des fonctions de Legendre, qui se trouvent dans tous les traités d'Analyse. Voir, notamment, WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 2^e édition, Cambridge, 1916.

Formules de récurrence entre P et B. — Entre les polynomes B et les polynomes de Legendre existe la relation de récurrence

$$(2) \quad P_{n-1}(z) B_n(z) - P_n(z) B_{n-1}(z) + \frac{z^2-1}{n} = 0.$$

Il nous suffit, pour la démontrer, de prouver que le premier membre, qui est un polynome en z de degré $2n-2$, s'annule pour $2n-1$ valeurs de z , à savoir les n racines α_i de $P_n(z)$, et les $n-1$ racines β_i de $P_{n-1}(z)$. En effet, pour $z = \alpha_i$, l'expression (2) devient, en vertu de (1), égale à

$$\frac{P_{n-1}(\alpha_i)}{P'_n(\alpha_i)} + \frac{\alpha_i^2-1}{n},$$

ce qui est nul, d'après l'une des formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées,

$$(z^2-1) P'_n(z) = n z P_n(z) - n P_{n-1}(z).$$

De même, pour une racine β_i , l'expression (2) devient égale à

$$-\frac{P_n(\beta_i)}{P'_{n-1}(\beta_i)} + \frac{\beta_i^2-1}{n},$$

ce qui est encore nul, en vertu de la relation

$$-(z^2-1) P'_{n-1}(z) = n z P_{n-1}(z) - n P_n(z).$$

La formule (2) est donc démontrée.

Par un raisonnement identique, on démontrera aussi la formule suivante

$$(3) \quad P_{n+1} B_{n-1} - P_{n-1} B_{n+1} = \frac{2n+1}{n(n+1)} z (z^2-1).$$

Valeurs particulières des polynomes B. — En faisant, dans la formule (2), $z = 1$, et en nous rappelant que $P_n(1) = 1$, nous obtenons le résultat

$$B_n(1) = B_{n-1}(1),$$

et, comme $B_1(1) = 1$,

$$B_n(1) = 1.$$

De même, faisant $z = -1$, et sachant que $P_n(-1) = (-1)^n$, nous trouvons

$$B_n(-1) = (-1)^{n+1}.$$

Enfin, faisant $z = 0$, nous pourrons écrire

$$B_{2m}(0) = 0,$$

$$B_{2m+1}(0) = (-1)^m \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m+1)} = \frac{1}{(2m+1)P_{2m}(0)}.$$

Le polynome B sous forme de déterminant. — Si nous écrivons la formule (2),

$$P_{n-1}B_n - P_n B_{n-1} + \frac{z^2 - 1}{n} = 0,$$

et la suite des formules obtenues en diminuant chaque fois n d'une unité,

$$P_{n-2}B_{n-1} - P_{n-1}B_{n-2} + \frac{z^2 - 1}{n-1} = 0,$$

.....,

$$P_1 B_2 - P_2 B_1 + \frac{z^2 - 1}{2} = 0,$$

en y joignant

$$P_0 B_1 - 1 = 0,$$

nous obtenons n équations linéaires en B_1, B_2, \dots, B_n , d'où nous pourrons tirer ces n quantités considérées comme inconnues. Nous aurons ainsi B_n sous forme du quotient de deux déterminants. Le déterminant dénominateur sera simplement le produit

$$P_1 P_2 \dots P_{n-1};$$

et le déterminant numérateur sera très aisément simplifié, en ajoutant terme à terme deux lignes consécutives, et tenant compte de la formule de récurrence entre trois polynomes de Legendre consécutifs. Le produit $P_1 P_2 \dots P_{n-1}$ se trouve en facteur au numérateur, et nous obtiendrons l'expression suivante :

$$B_n(z) = \frac{1}{n!} \begin{vmatrix} 2z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 5z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 7z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 4 & 9z & 5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

le déterminant ayant $n - 1$ lignes et colonnes.

Cette forme très simple permet aisément le calcul d'un polynome B_n d'ordre quelconque.

Formule de récurrence entre trois polynomes B consécutifs.
— Reprenons les relations (2) et (3), joignons-y la suivante,

$$P_n B_{n+1} - P_{n+1} B_n + \frac{z^2 - 1}{n + 1} = 0,$$

et éliminons P_{n+1} , P_n et P_{n-1} entre ces trois équations et la formule de récurrence bien connue

$$(n + 1)P_{n+1} - (2n + 1)z P_n + n P_{n-1} = 0,$$

de façon à obtenir une formule ne contenant plus que des polynomes B. Nous trouvons

$$(4) \quad (n + 1)B_{n+1} - (2n + 1)z B_n + n B_{n-1} = 0,$$

c'est-à-dire la même formule de récurrence qu'entre trois polynomes P consécutifs.

On aurait pu également l'obtenir à partir de B_n mis sous forme de déterminant.

Expression de Q_n au moyen du polynome B_n . — La formule (4) va nous conduire à un résultat très important. Si nous considérons l'équation aux différences

$$(5) \quad (n + 1)u_{n+1} + n u_{n-1} = (2n + 1)z u_n,$$

nous remarquerons que nous en connaissons deux solutions particulières, $P_n(z)$ et $B_n(z)$; la solution générale en sera donc

$$u_n = \varphi(z)P_n(z) + \psi(z)B_n(z),$$

φ et ψ étant deux fonctions quelconques, indépendantes de n . Or nous savons que cette équation (5) admet également pour solution la fonction de Legendre de seconde espèce, $Q_n(z)$. Il existe donc deux fonctions φ et ψ telles que l'on ait

$$Q_n(z) = \varphi(z)P_n(z) + \psi(z)B_n(z).$$

Cherchons à obtenir directement cette expression (1). On a, par

(1) Nous avons déjà publié ce résultat, ainsi que le raisonnement qui y conduit, (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 165, p. 759) et l'avons étendu en faisant connaître une méthode de réduction pour des fonctions de seconde espèce vérifiant une équation différentielle d'un type général (*Proceedings of the Royal Soc. of Edinburgh*, vol. XXXVIII, p. 61). Nous en verrons plus loin deux exemples.

définition de la fonction de seconde espèce,

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{dt}{(t^2-1)[P_n(t)]^2},$$

ce que nous écrirons

$$Q_n(z) = P_n(z) \int_z^\infty \frac{A_n P_n + B_n P'_n}{P_n^2} \frac{dt}{t^2-1}.$$

En intégrant par parties le terme contenant P'_n , nous trouvons

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} + \int_z^\infty \left[\frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2tB_n}{(t^2-1)P_n} \right] \frac{dt}{t^2-1}.$$

En dérivant l'identité fondamentale, nous avons la relation

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\frac{A'_n}{P'_n} - \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n}.$$

Par décomposition en éléments simples, les racines de P_n étant a_1, a_2, \dots, a_n et celles de P'_n étant b_1, b_2, \dots, b_{n-1} , nous pourrions écrire

$$\begin{aligned} \frac{A'_n}{P'_n} &= \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{A'_n(b_i)}{P'_n(b_i)} \frac{1}{z-b_i}, \\ \frac{B_n P''_n}{P_n P'_n} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2 (z-a_i)} + \sum_{i=1}^{i=n-1} \frac{B_n(b_i)}{P_n(b_i)} \frac{1}{z-b_i}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne, en observant que les sommes portant sur les b se détruisent en vertu de l'identité fondamentale dérivée,

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = -\sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_n(a_i) P''_n(a_i)}{[P'_n(a_i)]^2} \frac{1}{z-a_i}.$$

Mais nous tirons de l'équation différentielle de Legendre la relation suivante :

$$\frac{P''_n(a_i)}{P'_n(a_i)} = -\frac{2a_i}{a_i^2-1};$$

donc

$$\frac{A_n + B'_n}{P_n} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)} \frac{1}{z-a_i}.$$

D'autre part, la décomposition en éléments simples, jointe aux résultats que nous avons établis plus haut sur $B_n(1)$ et $B_n(-1)$,

nous permet d'écrire

$$\frac{2zB_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{2a_i B_n(a_i)}{(a_i^2-1)P'_n(a_i)(z-a_i)} + \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1},$$

d'où

$$(6) \quad \frac{A_n + B'_n}{P_n} - \frac{2zB_n}{(z^2-1)P_n} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1};$$

donc, en portant dans l'intégrale, et en intégrant,

$$\frac{Q_n(z)}{P_n(z)} = \frac{B_n(z)}{(z^2-1)P_n(z)} + \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{z^2-1},$$

c'est-à-dire

$$Q_n(z) = \frac{1}{2} P_n(z) \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{zP_n(z) - B_n(z)}{z^2-1}.$$

C'est bien l'expression que nous cherchions, et nous avons donc

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z}{z^2-1},$$

$$\psi(z) = \frac{1}{z^2-1}.$$

De nombreux auteurs ont mis Q_n sous la forme

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - f_{n-1},$$

où f_{n-1} est un polynome d'ordre $n-1$. Les expressions qu'ils en ont données sont en général compliquées, et contiennent les polynomes de Legendre d'ordre inférieur à n . On voit que nous avons simplement

$$f_{n-1} = \frac{zP_n - B_n}{z^2-1}.$$

Le polynome f_{n-1} est encore solution de l'équation aux différences (5), avec cette fois

$$\varphi(z) = \frac{z}{z^2-1}, \quad \psi(z) = \frac{-1}{z^2-1}.$$

Enfin la formule (6), que l'on peut écrire

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(zB_n - P_n),$$

montre que le polynome

$$\Delta(z) = -\frac{1}{2}(A_n + B'_n)$$

est lui aussi solution de la même équation aux différences, avec

$$\varphi(z) = \frac{1}{z^2-1}, \quad \psi(z) = \frac{-z}{z^2-1}.$$

La formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P_n - B_n}{z^2-1}$$

est de toute première importance dans la théorie des polynomes qui nous occupent; elle permettra en effet d'écrire de nombreuses propriétés du polynome B_n , à partir des propriétés connues de Q_n .

II.

Les polynomes A jouissent de propriétés analogues, et dont la démonstration est à peu de chose près identique à celle que nous avons donnée dans le cas des polynomes B .

Formule de récurrence entre A et P' . — C'est par une démonstration calquée sur celle de la formule de récurrence entre B et P , mais en considérant, au lieu des racines de P_n et P_{n-1} , celles de P'_n et P'_{n-1} , que l'on établira la relation

$$(7) \quad A_{n-1} P'_n - A_n P'_{n-1} = n,$$

ainsi que la suivante :

$$(8) \quad A_{n-1} P'_{n+1} - A_{n+1} P'_{n-1} = (2n+1)z.$$

Valeurs particulières des polynomes A . — Ces formules nous permettent d'écrire, en tenant compte des valeurs particulières des P' ,

$$A_n(1) = 1 - \frac{n(n+1)}{2},$$

$$A_n(-1) = (-1)^n A_n(1)$$

et

$$A_{2m+1}(0) = 0,$$

$$A_{2m}(0) = (-1)^m \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)} = -2m B_{2m-1}(0).$$

Le polynome A_n sous forme de déterminant. — En opérant sur les formules (7) et (8) exactement comme nous l'avons fait sur les formules de récurrence entre les P et les B, nous obtiendrons sans difficulté l'expression

$$A_n = - \frac{2}{(n-1)!} \begin{vmatrix} 5z & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 7z & 3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 9z & 4 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 6 & 11z & 5 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \dots \end{vmatrix},$$

où le déterminant a $n - 2$ lignes et colonnes.

Formule de récurrence entre trois polynomes A consécutifs.

— On la tirera des mêmes formules, jointes à la suivante,

$$n P'_{n+1} - (2n+1)z P'_n + (n+1)P'_{n-1} = 0$$

et l'on obtiendra

$$n A_{n+1} - (2n+1)z A_n + (n+1)A_{n-1} = 0.$$

c'est-à-dire la même formule que pour P'. Or cette équation aux différences est satisfaite aussi par la fonction $Q'_n(z)$, qui dès lors pourra s'exprimer au moyen de P'_n et de A_n .

Expression de Q'_n en fonction de A_n . — Il suffit, pour obtenir cette expression, de dériver la formule donnant Q_n en fonction de P_n et de B_n . Nous trouvons ainsi

$$Q'_n = \frac{1}{2} P'_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z^3 P'_n - z^2 B'_n - 2P_n - z P'_n + B'_n + 2z B_n}{(z^2-1)^2}.$$

En tenant compte de la formule (6) établie plus haut,

$$(z^2-1)(A_n + B'_n) = 2(z B_n - P_n),$$

nous trouvons l'expression très simple

$$Q'_n = \frac{1}{2} P'_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P'_n + A_n}{z^2-1}.$$

Remarquons que ce terme

$$\frac{z P'_n + A_n}{z^2-1}$$

n'est pas un polynome, comme dans le cas de Q_n . On a en effet

$$P'_n(1) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad A_n(1) = 1 - \frac{n(n+1)}{2};$$

le numérateur n'est donc nul pour $z = 1$.

III.

Formules de récurrence entre A et B. — Il existe, comme on le sait, un certain nombre de formules de récurrence entre les polynomes de Legendre et leurs dérivées, linéaires par rapport aux P et aux P', et vérifiées aussi par les fonctions de seconde espèce Q_n et leurs dérivées. Considérons l'une d'entre elles, et écrivons-la

$$F(Q_i, Q_j, \dots, Q'_i, Q'_j, \dots) = 0.$$

Remplaçons dans cette formule les Q par leur expression en fonction de P et de B, les Q' par leur expression en fonction de P' et de A; tous les termes en P et P' disparaîtront en vertu de

$$F(P_i, P_j, \dots, P'_i, P'_j, \dots) = 0$$

et il restera l'expression

$$F(B_i, B_j, \dots, -A_i, -A_j, \dots) = 0.$$

On obtiendra donc des formules de récurrence entre les polynomes A et B à partir d'une quelconque des formules de récurrence entre les fonctions de Legendre et leurs dérivées, en remplaçant P_i par B_i et P'_i par $-A_i$.

Nous écrivons donc, à partir des formules de récurrence classiques des polynomes de Legendre,

$$\begin{aligned} z A_n - A_{n-1} + n B_n &= 0, \\ A_n - z A_{n-1} + n B_{n-1} &= 0, \\ (z^2 - 1) A_n + n(z B_n - B_{n-1}) &= 0, \\ (z^2 - 1) A_{n-1} + n(B_n - z B_{n-1}) &= 0, \\ (2n + 1) B_n &= A_{n-1} - A_{n+1}, \end{aligned}$$

et, à partir d'une formule donnée par F. Neumann,

$$(2n + 1)(z^2 - 1) A_n = n(n + 1)(B_{n-1} - B_{n+1}).$$

Remarques. — Nous avons dit que A_0 , A_1 et B_0 n'existaient pas ; mais, pour que les formules que nous venons d'écrire soient valables quel que soit n , nous serons amenés à poser, par convention,

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_1 &= 0, \\ B_0 &= z. \end{aligned}$$

Toutes les formules indiquées ci-dessus (relations de récurrence entre P et B , entre P' et A , entre trois B ou trois A consécutifs, expressions de Q_n et de Q'_n) seront alors valables sans restrictions ; et il en sera de même de celles que nous établirons par la suite.

Formules de récurrence contenant les dérivées. — On peut obtenir un certain nombre de formules de récurrence introduisant les dérivées des polynomes A ou B ; mais elles contiendront en général les polynomes de Legendre. On y parviendra en dérivant la formule

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - \frac{z P_n - B_n}{z^2 - 1},$$

et en appliquant la relation de récurrence

$$(z^2 - 1) Q'_n = n z Q_n - n Q_{n-1}.$$

On trouvera ainsi

$$(z^2 - 1) B'_n = (n + 1) B_{n+1} - (n - 1) z B_n - 2 P_n$$

et

$$(z^2 - 1) B'_n = (n + 2) z B_n - n B_{n-1} - 2 P_n$$

ou encore

$$(9) \quad (z^2 - 1) A'_n + n(n + 1) B_n = 2 P'_n.$$

A ce groupe se rattache la formule, que nous avons établie par ailleurs,

$$(z^2 - 1) (A_n + B'_n) = 2(z B_n - P_n),$$

d'où l'on pourra tirer la suivante, ne contenant plus P ,

$$(z^2 - 1) B''_n + [n(n + 1) - 2] B_n + 2z A_n + 2(z^2 - 1) A'_n = 0,$$

mais ces dernières formules ne sont plus des formules de récurrence proprement dites.

Équation différentielle pour A_n . — Nous allons néanmoins en tirer un résultat intéressant : dans la formule (9), remplaçons B_n par sa valeur tirée de l'identité fondamentale : nous obtenons

$$(z^2 - 1)A'_n P'_n - n(n + 1)A_n P_n = 2P_n'^2 - n(n + 1),$$

d'où, par dérivation, l'équation différentielle du second ordre, linéaire et avec second membre, à laquelle satisfait le polynôme $A_n(z)$

$$(z^2 - 1)A_n'' - n(n + 1)A_n = 4P_n''.$$

On en remarquera la forme particulièrement simple ; et l'on pourra noter que l'on connaît une solution de l'équation sans second membre, à savoir la fonction primitive de $P_n(z)$.

Équation différentielle pour B_n . — Le même procédé pourrait nous conduire à une équation différentielle vérifiée par le polynôme $B_n(z)$. Il est plus simple de la rechercher à partir de l'expression de Q_n en fonction de P_n et de B_n : on la dérivera deux fois, et l'on écrira que Q_n vérifie l'équation de Legendre. On sera ainsi amené à une équation différentielle pour $B_n(z)$, beaucoup moins simple d'ailleurs que celle de A_n :

$$(z^2 - 1)^2 B_n'' - 2z(z^2 - 1)B_n' + [2(z^2 + 1) - n(n + 1)(z^2 - 1)]B_n = 4zP_n - 4(z^2 - 1)P_n'.$$

Fonction génératrice de B_n . — C'est encore à partir de la même expression de Q_n que nous pourrions trouver une fonction génératrice pour B_n : il nous suffira de partir des fonctions génératrices bien connues de P_n et de Q_n : nous trouverons sans difficulté

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} h^n B_n(z) = \frac{z^2 - 1}{\sqrt{1 - 2hz + h^2}} \log \left(e^{\frac{z}{z^2 - 1}} \frac{z - h + \sqrt{1 - 2hz + h^2}}{z + 1} \right),$$

le logarithme étant népérien ; et nous n'oublions pas la convention que nous avons faite sur B_0 .

Formules de récurrence diverses. — De nombreuses autres formules pourraient être établies par des procédés analogues : signalons par exemple les suivantes, dont la démonstration serait

et de même

$$\frac{A_{n+1}(z)P'_n(x) - A_n(z)P'_{n+1}(x)}{(n+1)(z-x)} = \frac{1}{x-z} + \frac{5}{6}A_2(z)P'_2(x),$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{2n+1}{n(n+1)}A_n(z)P'_n(x);$$

d'où, en faisant $x = z$,

$$\frac{A_n P'_{n+1} - A_{n+1} P'_n}{n+1} = \frac{A'_{n+1} P'_n - A'_n P'_{n+1}}{n+1} = \sum_{i=2}^{i=n} \frac{2i+1}{i(i+1)} A_i P'_i.$$

Autres développements. — Des développements en série analogues à ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions de Legendre s'obtiennent aisément à partir des diverses formules de récurrence : ainsi

$$-(A_{n+1} + A_n) = -1 + 3B_1 + 5B_2 + \dots + (2n+1)B_n,$$

$$-A_n = (2n-1)B_{n-1} + (2n-5)B_{n-3} + (2n-9)B_{n-5} + \dots,$$

le dernier terme étant ici $2B_1$ ou $5B_2$ suivant que n est pair ou impair.

Les mêmes formules de récurrence permettent d'écrire

$$1 - z^n A_n = B_1 + 2zB_2 + \dots + n z^{n-1} B_n$$

et

$$\frac{z^{2n-1} B_{n-1}}{1-z^2} = \frac{1}{2}A_2 + \frac{z}{3}A_3 + \dots + \frac{z^{n-2}}{n}A_n.$$

Un développement introduisant les fonctions Q. — La formule suivante, due à Frobenius,

$$\frac{1}{2(y-x)} \log \frac{(x+1)(y-1)}{(x-1)(y+1)} = \sum_0^{\infty} (2n+1) Q_n(x) Q_n(y),$$

va nous permettre d'écrire un développement particulièrement remarquable.

Remplaçons dans le second membre $Q_n(x)$ par sa valeur en fonction de P_n et de B_n ; puis tenons compte du développement fondamental

$$\frac{1}{y-x} = \sum_0^{\infty} (2n+1) P_n(x) Q_n(y).$$

Nous arriverons alors au développement cherché :

$$\frac{1}{y-x} \left(\frac{x^2-1}{2} \log \frac{y-1}{y+1} - x \right) = \sum_0^{\infty} (2n+1) B_n(x) Q_n(y).$$

Développement de B_n en série de polynomes de Legendre. — Plusieurs résultats ont été établis par Christoffel ⁽¹⁾ sur le polynome que nous avons appelé $f_{n-1}(z)$, tel que

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{z+1}{z-1} - f_{n-1}.$$

Nous allons utiliser ces travaux pour obtenir de nouvelles formules relatives au polynome B_n .

Tout d'abord, nous partirons du développement, indiqué par Christoffel, de f_{n-1} en série de polynomes de Legendre,

$$f_{n-1} = \frac{2n-1}{1.n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-9}{5(n-2)} P_{n-5} + \dots$$

Or nous avons établi la formule

$$f_{n-1} = \frac{z P_n - B_n}{z^2 - 1},$$

d'où nous tirerons

$$B_n = z P_n - (z^2 - 1) \left[\frac{2n-1}{1.n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \dots \right].$$

Les formules de récurrence entre les polynomes P nous permettent d'écrire

$$\begin{aligned} z P_n &= \frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1}, \\ (2n-1)z^2 P_{n-1} &= \frac{n(n+1)}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n^2}{2n+1} P_{n-1} \\ &\quad + \frac{(n-1)^2}{2n-3} P_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2n-3} P_{n-3}, \\ (2n-5)z^2 P_{n-3} &= \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-3)} P_{n-1} + \frac{(n-2)^2}{2n-3} P_{n-3} \\ &\quad + \frac{(n-3)^2}{2n-7} P_{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2n-7} P_{n-5}, \\ &\dots \end{aligned}$$

⁽¹⁾ *Ueber die Gaussische Quadratur* (Crelle, t. 55, 1858). Les notations de Christoffel sont un peu différentes et le polynome f_{n-1} dont il s'occupe diffère du nôtre par un facteur constant.

Ceci nous donne, après simplifications, et en remarquant que les termes en P_{n+1} se détruisent, le développement du polynôme $B_n(z)$ en série de polynômes de Legendre :

$$B_n = \frac{2(2n-1)}{3 \cdot n} P_{n-1} - \frac{2(2n-5)(n^2-2n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot n(n-1)(n-2)} P_{n-3} \\ - \frac{2(2n-9)(n^2-4n+9)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot (n-1)(n-2)(n-3)} P_{n-5} \\ - \frac{2(2n-13)(n^2-6n+20)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot (n-2)(n-3)(n-4)} P_{n-7} \\ - \dots$$

ce que nous écrivons de la façon suivante :

$$B_n = -8 \sum_{m=0,1}^{m=n-1} \frac{(2m+1)(n^2+m^2+n+m-2)P_m}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)}$$

la parité de m étant différente de celle de n .

Développement du polynôme Δ_n . — Le polynôme que nous avons désigné par Δ_n , c'est-à-dire

$$- \frac{1}{2} (A_n + B'_n),$$

admet un développement analogue, mais un peu plus simple. Il suffit, pour le trouver, d'écrire une formule connue,

$$\Delta_n = \frac{P_n - z B_n}{z^2 - 1} = -P_n + z f_{n-1},$$

et d'appliquer le développement de Christoffel. On trouve, après réductions,

$$\Delta_n = 4 \sum_{m=0,1}^{m=n-2} \frac{(2m+1)(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m+2)(n+m)} P_m,$$

m et n étant de même parité.

Développements introduisant des produits de fonctions de Legendre. — La seconde formule de Christoffel dont nous allons nous servir est la suivante :

$$P_m f_{n-1} - P_n f_{m-1} = \sum_{s=0}^{n-m-1} \frac{P_s P_{n-m-s-1}}{m+s+1},$$

qui comprend, comme cas particulier, la formule de Schäfli et Hermite,

$$f_{n-1} = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s} P_{n-s} P_{s-1}.$$

Nous remarquerons que le premier membre de la formule de Christoffel n'est autre que

$$\frac{P_n B_m - P_m B_n}{z^2 - 1}.$$

Si nous faisons alors $m = 2$, nous arriverons à l'expression suivante pour le polynome B_n :

$$\frac{3}{2} B_n = \sum_{s=3}^{s=n} \left(\frac{P_{n-s}}{s} [P_{s-1} - P_{s-3}] \right) + P_{n-1} + \frac{z P_{n-2}}{2},$$

ce qu'au moyen de formules de récurrence on peut encore mettre sous la forme

$$\frac{3}{2} B_n = (z^2 - 1) \sum_{s=3}^{s=n} \frac{2s - 3}{s(s-1)(s-2)} P_{n-s} P'_{s-2} + P_{n-1} + \frac{z P_{n-2}}{2}.$$

Faisons de même, dans la formule générale, $m = 1$; le premier membre devient

$$\frac{P_n - z B_n}{z^2 - 1},$$

c'est-à-dire le polynome Δ_n . Nous avons par conséquent le très simple développement suivant :

$$\Delta_n = \sum_{s=0}^{n-2} \frac{P_s P_{n-s-2}}{s+2}.$$

V.

Intégrales définies diverses. — Un certain nombre d'intégrales définies où figurent les polynomes A et B ont des valeurs simples et qu'il est facile de calculer.

Si nous considérons l'identité fondamentale, et si nous l'intégrons entre -1 et $+1$, en remarquant que, puisque A_n est de

degré inférieur à P_n , l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} A_n(z) P_n(z) dz$$

est nulle, nous obtenons le résultat

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_n'(z) dz = 2.$$

De même, la formule de récurrence

$$P_{n-1} B_n - P_n B_{n-1} + \frac{z^2 - 1}{n} = 0$$

nous permet d'écrire, en intégrant,

$$(10) \quad \int_{-1}^{+1} B_n(z) P_{n-1}(z) dz = \frac{4}{3n}.$$

Si nous posons à présent

$$\begin{aligned} B_n(z) &= b_{n-1} z^{n-1} + \dots, \\ P_n(z) &= p_n z^n + \dots, \end{aligned}$$

il est facile de calculer b_{n-1} en fonction de p_n : il suffit par exemple de se servir de l'équation différentielle satisfaite par B_n , ou du développement de B_n en série de polynomes de Legendre. Nous trouverons ainsi

$$b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n.$$

Écrivant alors

$$z B_n = a_0 + a_1 P_1 + \dots + a_n P_n,$$

nous aurons d'une part, en égalant les coefficients de z^n dans les deux membres,

$$b_{n-1} = a_n p_n,$$

d'où

$$a_n = \frac{2}{3},$$

et d'autre part

$$a_n = \frac{2}{2n+1} \int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z) dz,$$

d'où la formule

$$\int_{-1}^{+1} z B_n(z) P_n(z) dz = \frac{4}{3(2n+1)},$$

qui n'est d'ailleurs valable que pour $n > 1$; car pour $n = 1$, on n'a plus $b_{n-1} = \frac{2}{3} p_n$.

Un procédé analogue nous conduira aux intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} z^2 A_n(z) P_n(z) dz &= -\frac{4n}{3(2n+1)}, \\ \int_{-1}^{+1} z A_n(z) P'_n(z) dz &= 2 - n(n+1), \\ \int_{-1}^{+1} z^2 B'_n(z) P_n(z) dz &= \frac{4(n-1)}{3(2n+1)}. \end{aligned}$$

En appliquant les formules de récurrence, nous trouverons encore

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} z A_n(z) P_{n-1}(z) dz &= -\frac{4}{3}, \\ (11) \quad \int_{-1}^{+1} A_{n+1}(z) P_{n-1}(z) dz &= -\frac{4(2n+1)}{3n}. \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant aux intégrales (10) et (11) la formule d'Olinde Rodriges pour le polynome P_n , nous obtenons les suivantes :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \frac{d^n B_{n+1}}{dz^n} dz &= \frac{2^{n+2}}{3(n+1)} n!, \\ \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n \frac{d^n A_{n+2}}{dz^n} dz &= \frac{(2n+3)2^{n+2}}{3(n+1)} n!. \end{aligned}$$

Il nous est facile d'écrire une formule plus générale que toutes les précédentes. Si nous nous reportons au développement de B_n en série de polynomes P , multipliant les deux membres par P_m et intégrant, nous trouvons de suite, si m est de parité différente de n et inférieur ou égal à $n-1$,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z) dz \\ = -\frac{16(n^2 + m^2 + n + m - 2)}{(n-m-2)(n-m)(n-m+2)(n+m+3)(n+m+1)(n+m-1)}. \end{aligned}$$

Si m est de même parité que n , ou supérieur à $n-1$, on a évidemment

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) P_m(z) dz = 0.$$

Nous avons donc en particulier, si n est impair,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) dz = \frac{-16}{(n-2)n(n+1)(n+3)}.$$

Nous obtiendrons de même les résultats suivants :

1° Si n et p sont de parités différentes,

$$\int_{-1}^{+1} B_n(z) B_p(z) dz = 0;$$

2° Si n et p sont de même parité,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{+1} B_n(z) B_p(z) dz \\ &= 128 \sum_m \frac{(2m+1)(m^2+n^2+m+n-2)(m^2+p^2+m+p-2)}{\left\{ \begin{array}{l} (m-n+2)(m-n)(m-n-2)(m+n+3)(m+n+1)(m+n-1) \\ \times (m-p+2)(m-p)(m-p-2)(m+p+3)(m+p+1)(m+p-1) \end{array} \right\}} \end{aligned}$$

la somme étant entendue de la façon suivante : m doit être de parité différente de n et p , et varier depuis 0 ou 1 jusqu'au plus petit des entiers $n-1$ ou $p-1$.

De même, nous reportant aux résultats établis sur le polynome Δ_n , nous aurons, avec $m < n$ et de même parité,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z) P_m(z) dz = 8 \frac{(n-m)(n+m+1)}{(n-m-1)(n-m+1)(n+m+2)(n+m)},$$

et, en particulier, avec n pair,

$$\int_{-1}^{+1} \Delta_n(z) dz = \frac{8}{(n-1)(n+2)}.$$

Enfin, pour terminer, nous signalerons la formule suivante, que l'on déduira facilement de l'expression de Q_n sous forme d'intégrale définie, dite de *Neumann* :

$$\Delta_n(z) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{x P_n(z) - z P_n(x)}{z-x} dx.$$

VI.

Polynomes de Gegenbauer. — Les principales propriétés des polynomes de Legendre ont été étendues à divers polynomes

satisfaisant à une équation différentielle analogue, mais plus générale. Telles sont les fonctions C_n^ν de Gegenbauer, dont l'équation différentielle est

$$(1 - z^2)y'' - (2\nu + 1)zy' + n(n + 2\nu)y = 0.$$

Cherchons à étendre quelques-unes des propriétés des polynômes A_n et B_n aux polynômes A_n^ν et B_n^ν associés à C_n^ν par l'identité fondamentale

$$A_n^\nu C_n^\nu + B_n^\nu C_n^\nu \equiv 1.$$

Rappelons tout d'abord quelques points de la théorie des fonctions C_n^ν , dont nous aurons à faire usage (1).

Le polynôme $C_n^\nu(z)$ est défini par le développement

$$(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-\nu} = \sum_0^\infty \alpha^n C_n^\nu(z),$$

et s'écrit, en série hypergéométrique limitée,

$$C_n^\nu(z) = \frac{\Gamma(n + 2\nu)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(2\nu)} \Gamma\left(-n, n + 2\nu; \nu + \frac{1}{2}; \frac{1 - z}{2}\right).$$

Ces polynômes admettent diverses relations de récurrence, suivant que l'on fait varier les indices n ou ν , ou tous deux à la fois. Lorsque ν reste fixe, on a la formule de récurrence suivante entre trois polynômes consécutifs :

$$(12) \quad (n + 1)C_{n+1}^\nu + (n + 2\nu - 1)C_{n-1}^\nu = 2(n + \nu)zC_n^\nu$$

et des formules introduisant les dérivées, telles que celles-ci, dont nous nous servons,

$$(13) \quad nC_n^\nu = (n + 2\nu - 1)zC_{n-1}^\nu + (z^2 - 1)C_{n-1}^{\nu'},$$

$$(14) \quad nzC_n^\nu = (n + 2\nu - 1)C_{n-1}^\nu + (z^2 - 1)C_n^{\nu'}.$$

Polynômes associés aux polynômes de Gegenbauer. — Les principales propriétés des polynômes associés, A_n^ν et B_n^ν , se dédui-

(1) Les divers Mémoires de L. Gegenbauer sont résumés dans l'article de MM. APPELL et LAMBERT, *Généralisations diverses des fonctions sphériques édition française de l'Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, 5, p. 237).

ront des relations de récurrence suivantes :

$$(n + 2\nu - 1)C_{n-1}^\nu B_n^\nu - nC_n^\nu B_{n-1}^\nu + z^2 - 1 = 0$$

et

$$\frac{A_n^\nu C_{n-1}^\nu}{n} - \frac{A_{n-1}^\nu C_n^\nu}{n + 2\nu - 1} + 1 = 0.$$

On les démontrera en procédant comme pour leurs analogues dans le cas des fonctions de Legendre. Ainsi, pour la première, on remarquera que le premier membre, polynôme d'ordre $2n - 2$, s'annule pour les $n - 1$ racines α_i de C_{n-1}^ν , devenant alors égal à

$$-nC_n^\nu(\alpha_i) + (z_i^2 - 1)C_{n-1}^\nu(\alpha_i),$$

expression nulle d'après (13); et s'annule aussi, d'après (14), pour les n racines β_i de C_n^ν . La seconde formule admet une démonstration identique.

Nous déduirons de la première relation, comme nous l'avons fait pour le polynôme B_n , et en tenant compte de la relation (12), l'expression de B_n^ν sous forme de déterminant à $n - 1$ lignes :

$$B_n^\nu = \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n + 2\nu)} \begin{vmatrix} (2\nu + 1)z & 2\nu + 1 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & (2\nu + 4)z & 2\nu + 2 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & (2\nu + 6)z & 2\nu + 3 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

et de la deuxième, en tenant compte de la relation

$$\frac{C_n^\nu}{n + 2\nu - 1} + \frac{C_{n-2}^\nu}{n - 1} = \frac{2(n + \nu - 1)z}{(n + 2\nu - 1)(n - 1)} C_{n-1}^\nu,$$

l'expression de A_n^ν sous forme de déterminant à $n - 2$ lignes :

$$A_n^\nu = -\frac{n(2\nu + 1)\Gamma(2\nu)}{\Gamma(n + 2\nu)} \begin{vmatrix} 2(\nu + 2)z & 2\nu + 3 & 0 & 0 & \dots \\ 2 & 2(\nu + 3)z & 2\nu + 4 & 0 & \dots \\ 0 & 3 & 2(\nu + 4)z & 2\nu + 5 & \dots \\ \cdot & \cdot & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}.$$

De même, il nous sera très facile d'écrire la formule de récurrence liant trois polynômes B_n^ν à indices inférieurs consécutifs :

$$(15) \quad (n + 2\nu)B_{n+1}^\nu + nB_{n-1}^\nu = 2(n + \nu)zB_n^\nu.$$

Remarquons que, contrairement à ce qui avait lieu dans le cas

des fonctions de Legendre, cette formule n'est pas la même que la formule (12) qui lie trois polynomes C_n^ν consécutifs. Elles ne seraient identiques que si l'on avait $\nu = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire lorsque les fonctions de Gegenbauer se réduisent aux polynomes de Legendre.

Cependant on observera que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu(z)$$

vérifie la même équation aux différences (12) que C_n^ν .

Toutes les formules que nous avons indiquées deviennent, comme il fallait s'y attendre, identiques, pour $\nu = \frac{1}{2}$, aux formules correspondantes de la théorie des polynomes A_n et B_n .

Parmi les relations de récurrence existant entre les polynomes A_n^ν et B_n^ν , signalons les suivantes :

$$\frac{z A_n^\nu}{n} - \frac{A_{n-1}^\nu}{n+2\nu-1} + B_n^\nu = 0,$$

$$(z^2-1)A_{n-1}^\nu = (n+2\nu-1)(zB_{n-1}^\nu - B_n^\nu);$$

il serait aisé d'en écrire un grand nombre d'autres.

La relation (15) montrant que les polynomes B_n^ν forment une suite de Sturm, on pourra leur appliquer la formule de Darboux et obtenir par ce moyen divers développements en séries. On en déduirait aussi à partir des formules de récurrence.

Fonction de seconde espèce. — L'équation différentielle à laquelle satisfait C_n^ν admet une seconde solution, qui peut se mettre sous la forme

$$H_n^\nu(z) = K C_n^\nu(z) \int_0^z \frac{dt}{(1-t^2)^{\nu+\frac{1}{2}} [C_n^\nu(t)]^2},$$

où K est une constante arbitraire. Si l'on prend K égal à $\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)}$, la fonction H_n^ν satisfera, non seulement à la même équation différentielle, mais à la même équation aux différences que C_n^ν . Or, comme nous savons que la fonction

$$\frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} B_n^\nu$$

satisfait aussi à cette équation, nous aurons, φ et ψ étant indépendants de n ,

$$H_n^\nu(z) = \varphi(z) C_n^\nu(z) + \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} \psi(z) B_n^\nu(z).$$

En effet, si nous appliquons à H_n^ν la méthode générale de réduction, que nous avons signalée ailleurs, et que nous avons employée plus haut pour obtenir la valeur de Q_n , nous serons conduits à l'expression

$$H_n^\nu(z) = (2\nu+1)H_{n+1}^{\nu+1}(z)C_n^\nu(z) - \frac{\Gamma(n+2\nu)}{\Gamma(n+1)} \frac{B_n^\nu(z)}{(1-z^2)^{\nu+\frac{1}{2}}},$$

généralisation de celle qui donne $Q_n(z)$.

Polynomes U_n . — Particulièrement intéressants, au point de vue des applications, sont les polynomes C_n^1 , qui, désignés par le symbole U_n , ont été rencontrés par MM. Guillet et Aubert dans une question d'électrostatique (1), et forment la base de la théorie des polynomes *Électro-sphériques* introduits par ces auteurs. Les polynomes B associés aux polynomes U s'expriment fort simplement en fonction des U eux-mêmes. En faisant en effet $\nu = 1$ dans le déterminant qui donne B_n^1 , on trouve, après simplifications,

$$B_n^1 = \frac{1}{n+1} \begin{vmatrix} \frac{3}{2}z & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix},$$

avec toujours $n - 1$ lignes. En développant, il vient

$$(n+1)B_n^1 = \frac{3}{2}z \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix},$$

(1) *Annales de Physique*, 9^e série, t. IX, 1918, p. 58.

le premier déterminant étant à $n - 2$ lignes, et le second à $n - 3$. Or, ainsi qu'il est facile de le vérifier, le déterminant à n lignes

$$\begin{vmatrix} 2z & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2z & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2z & 1 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}$$

n'est autre que le polynome U_n lui-même. On a donc la remarquable expression

$$(n + 1)B_n^1 = \frac{3}{2}z U_{n-2} - U_{n-3},$$

ce qu'on peut encore écrire, eu égard aux propriétés des fonctions U ,

$$(n + 1)B_n^1 = U_{n-1} - \frac{z}{2} U_{n-2},$$

ou

$$(n + 1)B_n^1 = \frac{z}{2} U_n - (z^2 - 1)U_{n-1},$$

ou, encore plus simplement,

$$4(n + 1)B_n^1 = 3U_{n-1} - U_{n-3}.$$

Polynomes C_n^0 . — Aux fonctions C_n^y se rattachent les polynomes que l'on désigne par la notation C_n^0 , et que l'on définit comme le coefficient de $2x^n$ dans le développement de

$$-\log(1 - 2\alpha z + z^2).$$

Si l'on pose $z = \cos \theta$, on a alors

$$C_n^0(z) = \frac{\cos n\theta}{n}.$$

Les polynomes associés, A_n^0 et B_n^0 , ont alors une expression remarquablement simple, et qu'il est facile de vérifier :

$$B_n^0(z) = \cos(n - 1)\theta = (n - 1)C_n^0(z)$$

et

$$A_n^0(z) = -n \frac{\sin(n - 1)\theta}{\sin \theta} = -n C_n^0(z).$$

VII.

Polynomes de Jacobi. — Les polynomes de la série hypergéométrique, introduits par Jacobi (1) et spécialement étudiés par Darboux (2), peuvent également être considérés comme une généralisation des polynomes de Legendre.

Rappelons brièvement leurs principales propriétés, avant d'étudier les polynomes qui leur sont associés par l'identité fondamentale.

Nous désignons par $X_n(z)$ le polynome de Jacobi d'ordre n , exprimé par le symbole

$$F(-n, \alpha + n; \gamma; z).$$

Il satisfait donc à l'équation hypergéométrique

$$(16) \quad z(1-z)X_n'' + [\gamma - (\alpha + 1)z]X_n' + n(\alpha + n)X_n = 0.$$

Parmi les relations de récurrence qu'admettent ces polynomes et leurs dérivées, citons les trois suivantes :

$$(17) \quad \frac{(n + \alpha)(n + \gamma)}{2n + \alpha + 1}(X_{n+1} - X_n) + (2n + \alpha)zX_n + \frac{n(n + \alpha - \gamma)}{2n + \alpha - 1}(X_{n-1} - X_n) = 0,$$

$$(18) \quad nX_n - zX_n' = nX_{n-1} + \frac{n}{n + \alpha - 1}zX_{n-1}',$$

$$(19) \quad (n + \gamma)X_{n+1} - z(1-z)\frac{2n + \alpha + 1}{n + \alpha}X_n' = [n + \gamma - (2n + \alpha + 1)z]X_n.$$

La fonction de seconde espèce Q_n donne lieu à diverses remarques intéressantes. Darboux la définit par le développement

$$\frac{1}{z - \gamma} = \sum_0^{\infty} \frac{X_n(z)Q_n(\gamma)}{J_n},$$

(1) *Untersuchung über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe* (*Journal de Crelle*, t. 56, 1859).

(2) *Approximation des fonctions de très grands nombres* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1878).

où

$$J_n = \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{(2n+\alpha)\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}.$$

La fonction Q_n ainsi définie vérifie l'équation aux différences (17), qui lie trois polynomes de Jacobi consécutifs; mais elle ne vérifie pas l'équation différentielle (16). L'équation différentielle pour Q_n est en effet

$$z(1-z)Q_n'' + [2-\gamma+(\alpha-3)z]Q_n' + (n+1)(n+\alpha-1)Q_n = 0.$$

Mais, si l'on pose

$$Q_n(z) = z^{\gamma-1}(1-z)^{\alpha-\gamma}U_n(z),$$

on aura

$$U_n(z) = (2n+\alpha)J_n X_n(z) \int_z^{\infty} \frac{dt}{t^{\gamma}(1-t)^{\alpha-\gamma+1}X_n^2(t)}$$

et U_n vérifiera l'équation différentielle (16).

Polynomes associés aux polynomes de Jacobi. — Ceci posé, nous introduisons, comme toujours, les polynomes définis par l'identité fondamentale

$$a_n X_n + b_n X_n' = 1.$$

Comme nous l'avons fait dans les cas précédents, nous établirons, sans aucune difficulté, au moyen des formules (18) et (19), la relation de récurrence suivante :

$$n(n+\alpha-\gamma)X_{n-1}b_n - (n+\alpha-1)(n+\gamma-1)X_n b_{n-1} + z(1-z)(2n+\alpha-1) = 0$$

et nous en déduirons la formule de récurrence liant trois polynomes b consécutifs :

$$\frac{(n+1)(n+\alpha-\gamma+1)}{2n+\alpha+1} b_{n+1} + \frac{(n+\alpha-1)(n+\gamma-1)}{2n+\alpha-1} b_{n-1} - \left[\frac{(n+\alpha)(n+\gamma)}{2n+\alpha+1} + \frac{n(n+\alpha-\gamma)}{2n+\alpha-1} - (2n+\alpha)z \right] b_n = 0.$$

Cette formule, on le voit, n'est pas la même que la relation (17) entre trois polynomes X . Elle ne lui sera identique que dans le cas $\gamma = 1$. Si de plus on a $\alpha = 1$, on retombe, par un simple changement de variable, sur les polynomes de Legendre.

On sait que, si $\alpha = 2\gamma - 1$, les polynomes de Jacobi deviennent identiques aux polynomes de Gegenbauer. Ce qui précède nous montre donc que les fonctions B_n^γ et C_n^γ ne satisfont à la même équation aux différences que si $\gamma = 1$, donc $\alpha = 1$, c'est-à-dire dans le cas des fonctions de Legendre, fait que nous avons déjà remarqué directement.

Expression de la fonction de seconde espèce. — La fonction de seconde espèce Q_n ne s'exprimera donc par une expression de la forme

$$Q_n(z) = \varphi(z)X_n(z) + \psi(z)\mathfrak{U}_n(z)$$

que dans le cas $\gamma = 1$.

Mais, dans le cas général, si l'équation aux différences (17) n'est pas satisfaite par $\mathfrak{U}_n(z)$, on peut remarquer qu'elle est satisfaite par la fonction

$$(2n + \alpha)J_n \mathfrak{U}_n(z).$$

Donc on aura toujours

$$Q_n(z) = \varphi(z)X_n(z) + (2n + \alpha)J_n \psi(z)\mathfrak{U}_n(z).$$

D'ailleurs, pour $\gamma = 1$, on a $(2n + \alpha)J_n = 1$.

On trouvera cette expression en appliquant à U_n , seconde solution de l'équation différentielle (16), la méthode générale de réduction que nous avons indiquée. Dans le cas $\gamma = 1$, on aura

$$Q_n = X_n Q_0 + \frac{\alpha(\alpha + 1)\mathfrak{U}_n + [\alpha - (\alpha + 1)z]X_n}{\alpha(\alpha + 1)z(1 - z)}$$

et, dans le cas général,

$$(20) \quad Q_n = X_n Q_0 + \frac{(2n + \alpha)J_n \mathfrak{U}_n}{z(1 - z)} + \frac{J_0 X_n [\alpha - \gamma + 1 - (\alpha + 1)z]}{\gamma(\alpha + 1)z(1 - z)},$$

on a d'ailleurs

$$Q_0 = F\left(\gamma, 1; \alpha + 1; \frac{1}{z}\right).$$

La formule (20) donne une expression nouvelle de Q_n , que l'on pourra ajouter aux huit expressions différentes qu'en a données Darboux.

VIII.

Polynomes d'Hermite. — Nous allons terminer ce travail en faisant connaître quelques propriétés des polynomes A_n et B_n associés, par l'identité fondamentale, aux polynomes U_n d'Hermite, qui peuvent être considérés comme un cas limite des polynomes de Jacobi. On sait que ces polynomes ⁽¹⁾, définis par

$$U_n(x) = e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

satisfont à l'équation différentielle

$$U_n'' - 2xU_n' + 2nU_n = 0,$$

à l'équation aux différences

$$(21) \quad U_{n+1} + 2xU_n + 2nU_{n-1} = 0,$$

et possèdent la propriété fondamentale suivante :

$$(22) \quad U_n' = -2nU_{n-1}.$$

Nous démontrerons, par la méthode ordinaire, en nous servant de (22) et de

$$U_{n+1} + 2xU_n - U_n' = 0,$$

qui est une conséquence de (21) et (22), la relation de récurrence

$$(23) \quad U_{n+1}B_n - 2(n+1)U_nB_{n+1} - 1 = 0.$$

Or, d'après (22), cette relation s'écrit

$$U_{n+1}B_n + B_{n+1}U_{n+1}' = 1,$$

ce qui montre, par comparaison avec l'identité fondamentale, que l'on a la remarquable propriété suivante :

$$(24) \quad A_{n+1} = B_n.$$

Diverses autres formules peuvent être écrites aisément : ainsi

⁽¹⁾ Ch. HERMITE, *Œuvres*, t. II, p. 294-308.

la relation de récurrence entre trois polynomes B consécutifs,

$$2(n+1)B_{n+1} + 2x B_n + B_{n-1} = 0,$$

et l'expression de B_n sous forme de déterminant à $n - 1$ lignes :

$$B_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{n-1} n!} \begin{vmatrix} 2x & 4 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2x & 6 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 2x & 8 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \end{vmatrix}.$$

L'identité fondamentale, écrite sous la forme

$$B_{n-1} U_n + B_n U'_n = 1$$

donne, par dérivation, et en tenant compte des relations de récurrence établies plus haut, la formule

$$U_n [B'_{n-1} - 2n B_n] - 2n U_{n-1} [B'_n - 2(n+1) B_{n+1}] = 0,$$

d'où l'on tirera, eu égard au degré des divers termes,

$$\begin{aligned} B'_n - 2(n+1) B_{n+1} &= K_n U_n, \\ B'_{n-1} - 2n B_n &= -2n K_n U_{n-1}, \end{aligned}$$

K_n étant une constante dépendant de n ; d'ailleurs

$$B'_{n-1} - 2n B_n = K_{n-1} U_{n-1},$$

d'où

$$K_{n-1} = 2n K_n$$

et, comme $K_1 = \frac{1}{2}$,

$$K_n = \frac{1}{2^n n!}.$$

Nous aurons donc enfin

$$B'_n - 2(n+1) B_{n+1} = \frac{U_n}{2^n n!}.$$

Ce résultat nous permettra d'écrire le développement de B en série de polynomes U. On aura en effet

$$\begin{aligned} 2^{n+1}(n+1)! B_{n+1} - 2^n n! B'_n + U_n &= 0, \\ 2^n n! B'_n - 2^{n-1}(n-1)! B''_{n-1} + U'_{n-1} &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi de suite, d'où en ajoutant

$$2^{n+1}(n+1)! B_{n+1} + U_n + U'_{n-1} + U''_{n-2} + \dots = 0.$$

En tenant compte de (22), on exprimera les dérivées successives des U en fonction de ces U eux-mêmes, et l'on aura

$$-2^{n+1}(n+1)! B_{n+1} = U_n - 2(n-1)U_{n-2} + 4(n-2)(n-3)U_{n-4} + \dots,$$

le coefficient du terme U_{n-2p} étant

$$(-1)^p 2^p (n-p)(n-p-1) \dots (n-2p+1).$$

Il sera facile d'en déduire, en s'appuyant sur une propriété connue des polynomes d'Hermite, la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} B_n U_m dx.$$

Polynomes de M. Appell. — La propriété la plus intéressante des polynomes associés aux polynomes d'Hermite, c'est-à-dire la relation

$$(24) \quad A_{n+1} = B_n,$$

peut se généraliser de la façon suivante. Considérons une suite de polynomes $X_0, X_1, \dots, X_n, \dots$ satisfaisant à une équation différentielle du type

$$X_n'' + [a(n)x + b(n)]X_n' + f(n)X_n = 0$$

et jouissant de la propriété suivante :

$$(25) \quad X_n' = \varphi(n)X_{n-1},$$

ce qui les fait rentrer dans la classe de polynomes étudiée par M. Appell (1). Il est facile de voir que ces polynomes satisfont à l'équation aux différences

$$(26) \quad f(n+1)X_{n+1} + [a(n+1)x + b(n+1)]X_n + \varphi(n+1)\varphi(n)X_{n-1} = 0.$$

L'identité fondamentale pourra s'écrire

$$A_n X_n + \varphi(n) B_n X_{n-1} \equiv 1.$$

Écrivons de plus

$$A_{n+1} X_{n+1} + \varphi(n+1) B_{n+1} X_n \equiv 1.$$

(1) *Annales de l'École Normale*, t. IX, 1880, p. 119-144.

Si α est une racine de X_n , on aura

$$A_{n+1}(\alpha) X_{n+1}(\alpha) = \varphi(n) B_n(\alpha) X_{n-1}(\alpha).$$

Or, d'après (26),

donc
$$f(n+1) X_{n+1}(\alpha) + \varphi(n) \varphi(n+1) X_{n-1}(\alpha) = 0;$$

$$f(n+1) B_n(\alpha) + \varphi(n+1) A_{n+1}(\alpha) = 0,$$

ce qui, eu égard au degré de B_n et de A_{n+1} , nous montre que

$$f(n+1) B_n(\alpha) + \varphi(n+1) A_{n+1}(\alpha) \equiv 0,$$

relation qui généralise la formule (24) pour les polynomes de la classe de M. Appell.
